Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Махалов, В. П. Николаенко, Глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье–Стокса с равномерно большой начальной завихренностью, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 79–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 04:41:10

УДК 517.9

Посвящается профессору Ольге Александровне Ладыженской
с уважением и восхищением

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА С РАВНОМЕРНО БОЛЬШОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

А. С. Махалов, В. П. Николаенко

В настоящей статье представлен обзор результатов по трехмерным уравнениям Навье–Стокса и Эйлера с начальными данными, которые характеризуются равномерно большой завихренностью. Доказано существование регулярных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса на неограниченном промежутке времени при больших начальных данных как в $\mathbb{R}^3$, так и в ограниченных цилиндрических областях. Кроме того, установлено существование гладких решений на больших конечных промежутках времени для трехмерных уравнений Эйлера. Эти результаты получены без привлечения дополнительных условий о поведении решений при $t > 0$. Гладкие решения не близки к каким-либо двумерным многообразиям. Наш подход основан на вычислении сингулярных пределов быстро осциллирующих операторов, нелинейных усреднениях и учете взаимного поглощения нелинейных колебаний вихревого поля. При помощи нелинейного метода усреднений для почти периодических функций, условий резонанса и методов теории малых знаменателей получены предельные резонансные уравнения Навье–Стокса. Для этих уравнений доказана глобальная разрешимость без каких-либо ограничений на трехмерные начальные данные. На основании регулярности слабых решений и сильной сходимости доказывается глобальная регулярность слабых решений трехмерных уравнений Навье–Стокса с равномерно большой завихренностью при $t = 0$.

Библиография: 42 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	80
§ 2. Волновой оператор Пуанкаре–Соболева и трехмерные резонансные уравнения Навье–Стокса	88
§ 3. Глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье–Стокса при больших конечных Ω	94
§ 4. Волновой оператор Пуанкаре–Соболева и трехмерные резонансные уравнения Навье–Стокса в цилиндрических областях	98
§ 5. Глобальная регулярность трехмерных уравнений Навье–Стокса при больших конечных Ω в цилиндрических областях	103
§ 6. Регулярность на большом промежутке времени для трехмерных уравнений Эйлера в цилиндрических областях с начальными данными, характеризующимися равномерно большой завихренностью	106
Список литературы	109

§ 1. Введение

Глобальная разрешимость задачи Коши для трехмерных уравнений Навье–Стокса является знаменитой задачей прикладного анализа [37]. Эта проблема для ограниченных двумерных областей была решена положительно в фундаментальных работах О. А. Ладыженской [27], [28], [31]. В случае начальных данных с симметрией, сводящейся к зависимости от двух переменных, и при малых возмущениях таких начальных данных глобальная разрешимость [30], [33] также известна. В то время как глобальная разрешимость для малых трехмерных начальных данных хорошо известна [25], имеется недостаток результатов для трехмерных начальных данных без дополнительных недоказанных предположений о свойствах решений при $t > 0$.

В данной работе исследована глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье–Стокса ($\nu > 0$) и Эйлера ($\nu = 0$) для начальных данных с равномерно большой завихренностью:

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \operatorname{curl}^2 \mathbf{V} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{V}(t, y)|_{t=0} = \mathbf{V}(0) = \tilde{\mathbf{V}}_0(y) + \frac{\Omega}{2} e_3 \times y, \quad (1.2)$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{V}(t, y) = (V_1, V_2, V_3)$ – векторное поле скоростей, p – давление. В (1.2) через e_3 обозначен единичный вектор вертикального направления, Ω – постоянный параметр. Поле $\tilde{\mathbf{V}}_0(y)$ зависит от трех переменных y_1 , y_2 и y_3 . Поскольку $\operatorname{curl}(\frac{\Omega}{2} e_3 \times y) = \Omega e_3$, в начальный момент времени $t = 0$ вихрь определяется формулой

$$\operatorname{curl} \mathbf{V}(0, y) = \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{V}}_0(y) + \Omega e_3, \quad (1.3)$$

и при $\Omega \gg 1$ начальный вихрь имеет большую компоненту в направлении e_3 . Такие начальные данные являются полностью трехмерными начальными данными с большим начальным трехмерным “растяжением вихря”. В этой статье сделан обзор результатов, полученных в наших совместных работах с А. Бабиным [4]–[9], К. Бардошем и Ф. Гольсом [10].

Сначала уравнения (1.1)–(1.2) рассматриваются в $\mathbb{R}^3$, затем (в §§ 4 и 5) в ограниченных цилиндрических областях. Мы выбираем $\tilde{\mathbf{V}}_0(y)$ из пространства $\mathbf{L}_2$ локально в $\mathbb{R}^3$ и из $\mathbf{L}_2$ в цилиндре. Так как начальная энергия не ограничена в $\mathbb{R}^3$, то в этом случае рассматриваются решения, которые не убывают на бесконечности, и выбираются подходящие весовые пространства Соболева, в которых существование слабых решений уже было установлено. Введем $\tilde{\mathbf{V}}(t, y)$ такое, что

$$\mathbf{V}(t, y) = \tilde{\mathbf{V}}(t, y) + \frac{\Omega}{2} e_3 \times y, \quad \operatorname{curl} \mathbf{V}(t, y) = \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{V}}(t, y) + \Omega e_3. \quad (1.4)$$

Для цилиндрических областей вертикальная ось цилиндра выбирается направленной по e_3 , граничное условие на границе $\partial \operatorname{Cyl}$ области Cyl имеет вид

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \text{на } \partial \operatorname{Cyl}; \quad \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{V}} \times \mathbf{N} = 0 \quad \text{на } \partial \operatorname{Cyl}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{N}$ – нормаль к границе $\partial \operatorname{Cyl}$, включая нижнюю и верхнюю границы. Краевое условие (1.5) соответствует нулевому потоку (нулевой нормальной компоненте) векторного поля скоростей и нулевой тангенциальной компоненте поля вихрей $\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{V}}$; при

таком краевом условии отсутствует вязкий пограничный слой. Такое краевое условие было также применено О. А. Ладыженской в работе, посвященной доказательству глобального существования осесимметричных решений уравнений Навье–Стокса в ограниченном цилиндре, где затем был выполнен предельный переход при стремлении вязкости к нулю и доказано существование решения уравнений Эйлера на большом промежутке времени [30].

Для поля вихрей $\omega = \text{curl } \mathbf{V}$ уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \mathbf{V} \cdot \nabla \omega + \nu \text{curl}^2 \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{V}, \quad (1.6)$$

$$\omega(0, y) = \text{curl } \tilde{\mathbf{V}}_0(y) + \Omega e_3, \quad (1.7)$$

начальное условие включает в себя большое начальное “растяжение вихря”. В случае, если параметр Ω велик, но конечен, устанавливается регуляризация слабых решений и глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье–Стокса при всех значениях времени. Наши решения ни в каком смысле не близки к решениям двумерных или “квазидвумерных” уравнений Навье–Стокса и характеризуются быстрыми колебаниями в направлении вектора e_3 вместе с выражением, которое дает большое растяжение завихренности

$$\omega(t, y) \cdot \nabla \mathbf{V}(t, y) = \omega_1 \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \omega_2 \frac{\partial V_2}{\partial y_2} + \omega_3 \frac{\partial V_3}{\partial y_3}, \quad t \geq 0,$$

имеющим большую компоненту $\Omega \frac{\partial}{\partial y_3} V_3(t, y) \gg 1$. Мы не делаем предположений относительно осцилляции решений по y_1 и y_2 (также и для начальных данных $\tilde{\mathbf{V}}_0(y)$). В §6 рассматриваются уравнения Эйлера, доказано существование на большом промежутке времени решений трехмерных уравнений Эйлера с начальными данными, характеризующимися равномерно большой завихренностью. Для доказательства используются равномерные пределы при стремлении вязкости к нулю [10], [24].

Наш подход основан на быстро осциллирующих сингулярных пределах уравнений (1.6)–(1.7), нелинейных усреднениях и аннулировании колебаний в нелинейных взаимодействиях для поля вихрей при больших Ω . Для каждого Ω (не обязательно большого) при помощи канонического преобразования (1.14)–(1.15) для поля скоростей $\mathbf{V}(t, y)$ и пространственных координат $y = (y_1, y_2, y_3)$ каждое решение $\mathbf{V}(t, y)$ уравнения (1.1) взаимно однозначно отображается на решение $\mathbf{U}(t, x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, следующих уравнений:

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla_x) \mathbf{U} + \nu \text{curl}_x^2 \mathbf{U} + \Omega e_3 \times \mathbf{U} = -\nabla_x \left(p - \frac{\Omega^2}{4} |x_h|^2 \right), \quad \nabla_x \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{U}(t, x)|_{t=0} = \mathbf{U}(0, x) = \tilde{\mathbf{V}}_0(x), \quad (1.9)$$

где $x = y$ при $t = 0$ и $x_h = (x_1, x_2)$. При $\Omega \gg 1$ почти сингулярная начальная задача (1.1)–(1.2) (т.е. с большим начальным вихрем и вихревым растяжением) переходит в задачу (1.8)–(1.9) с почти сингулярным оператором Кориолиса на пространстве соленоидальных полей:

$$\frac{1}{\varepsilon} e_3 \times \mathbf{U}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \varepsilon = 1/\Omega \ll 1. \quad (1.10)$$

Как уточняется в §§ 2 и 4, линейная часть уравнений (1.8) представляет из себя нелокальные волновые уравнения Пуанкаре–Соболева [3], [15], [34], [38]:

$$\partial_t \Phi + \Omega e_3 \times \Phi = -\nabla \pi, \quad \nabla \cdot \Phi = 0. \quad (1.11)$$

Взаимодействия между волнами Пуанкаре, порожденными квадратичной нелинейностью в уравнении (1.8), приводят к нелинейным резонансам и к малым знаменателям в пределе при $\Omega \rightarrow \infty$. С помощью метода нелинейных усреднений для почти периодических функций, принимающих значения в банаховом пространстве, получаем вполне трехмерные предельные резонансные уравнения Навье–Стокса. Устанавливается глобальная разрешимость этих уравнений без каких-либо ограничений на размеры трехмерных начальных данных и глобальная разрешимость уравнений (1.8)–(1.9) для больших, но конечных Ω . Затем, с помощью канонического преобразования (1.14)–(1.15) векторного поля $\mathbf{V}$ (которое является изометрией на обобщенных пространствах Соболева, основывающихся на операторе curl) устанавливается глобальная разрешимость уравнений (1.1)–(1.2) при больших конечных Ω .

Эти результаты существенно используют алгебру оператора curl с граничными условиями; напомним что уравнение для $\tilde{\omega} = \text{curl } \mathbf{U}(t, x)$ имеет вид:

$$\partial_t \tilde{\omega} + \mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{\omega} + \nu \text{curl}^2 \tilde{\omega} = \tilde{\omega} \cdot \nabla \mathbf{U} + \Omega \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{U}. \quad (1.12)$$

Мы используем глубокие свойства оператора curl^{-1} , расширяющие первоначальные результаты, полученные О. А. Ладыженской, ее коллегами и студентами при изучении уравнений магнито-гидродинамики [29], [32], [12], [13], [39]. Существуют три принципиальных вопроса при изучении уравнений (1.1)–(1.2), (1.8)–(1.12) с большим значением параметра Ω . Первый – структура предельных уравнений, полученных при сингулярном пределе при $\Omega \rightarrow +\infty$, и глобальная регулярность их решений (трехмерный резонансный предел уравнений Навье–Стокса). Второй – сильная сходимость решений уравнений (1.8)–(1.9) к решениям предельных уравнений. И, наконец, переход от анализа первых двух вопросов к доказательству регулярности решений задачи (1.1)–(1.2) на неограниченном интервале времени при больших, но конечных Ω .

Теперь подробно опишем каноническое преобразование, устанавливающее связь между исходным векторным полем $\mathbf{V}(t, y)$ и векторным полем $\mathbf{U}(t, x)$. Пусть матрица $\mathbf{J}$ такова, что $\mathbf{J}\mathbf{a} = e_3 \times \mathbf{a}$ для любого векторного поля $\mathbf{a}$. Тогда

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon(t) \equiv e^{\Omega \mathbf{J} t / 2} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

При любом фиксированном значении параметра Ω (не обязательно большом) вводим следующее преобразование:

$$\mathbf{V}(t, y) = e^{+\Omega \mathbf{J} t / 2} \mathbf{U}(t, e^{-\Omega \mathbf{J} t / 2} y) + \frac{\Omega}{2} \mathbf{J} y, \quad x = e^{-\Omega \mathbf{J} t / 2} y. \quad (1.14)$$

Преобразование (1.14) обратимо:

$$\mathbf{U}(t, x) = e^{-\Omega \mathbf{J} t / 2} \mathbf{V}(t, e^{+\Omega \mathbf{J} t / 2} x) - \frac{\Omega}{2} \mathbf{J} x, \quad y = e^{+\Omega \mathbf{J} t / 2} x. \quad (1.15)$$

Преобразования (1.14)–(1.15) устанавливают взаимно однозначное соответствие между соленоидальными векторными полями $\mathbf{V}(t, y)$ и $\mathbf{U}(t, x)$. Заметим, что при $t = 0$ $x = y$ и, следовательно, $\tilde{\mathbf{V}}_0(y) = \tilde{\mathbf{V}}_0(x)$. Пусть $x = (x_h, x_3)$, где $x_h = (x_1, x_2)$, $|x_h|^2 = x_1^2 + x_2^2$, и аналогично для y . Имеем:

ЛЕММА 1.1. Для векторных полей $\mathbf{V}(t, y)$ и $\mathbf{U}(t, x)$ и давления p выполнены следующие тождества:

- 1) $\nabla_y \cdot \mathbf{V}(t, y) = \nabla_x \cdot \mathbf{U}(t, x)$;
- 2) $\nabla_y p = \Upsilon(t) \nabla_x p$;
- 3) $\operatorname{curl}_y \mathbf{V}(t, y) = \Upsilon(t) \operatorname{curl}_x \mathbf{U}(t, x) + \Omega e_3$, $\operatorname{curl}_y^2 \mathbf{V}(t, y) = \Upsilon(t) \operatorname{curl}_x^2 \mathbf{U}(t, x)$;
- 4) $\frac{D}{Dt} \mathbf{V}(t, y) = \Upsilon(t) \left(\frac{D}{Dt} \mathbf{U}(t, x) + \Omega \mathbf{J} \mathbf{U} - \frac{\Omega^2}{2} x_h \right)$, где $\frac{D}{Dt}$ означает соответствующие лагранжевы производные; $\mathbf{J} \mathbf{U} = e_3 \times \mathbf{U}$.

В лемме 1.1 устанавливается, что преобразование (1.14)–(1.15) является каноническим для уравнений (1.1)–(1.2). Так как $\nabla_y \cdot \mathbf{V}(t, y) = 0$, из п. 1) леммы 1.1 следует, что $\nabla_x \cdot \mathbf{U}(t, x) = 0$. Теперь, используя утверждения 2)–4) вышеприведенной леммы 1.1 и тот факт, что матрица $\Upsilon(t)$ является унитарной, можем выразить каждый член в (1.1) в переменных x и t , для того чтобы получить для $\mathbf{U}(t, x)$ уравнения (1.8)–(1.12). При преобразовании (1.14)–(1.15) уравнения (1.1)–(1.2) переходят в систему Навье–Стокса (1.8)–(1.9) с дополнительным оператором Кориолиса $\Omega e_3 \times \mathbf{U}$, модифицированными начальными данными и давлением. При каждом значении Ω (не обязательно большом) системы уравнений (1.1)–(1.2) и (1.8)–(1.9) эквивалентны и пара преобразований (1.14)–(1.15) устанавливает взаимно однозначное соответствие между их полностью трехмерными решениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для цилиндрического случая каноническое преобразование (1.14)–(1.15) сохраняет граничные условия (1.5), которые переходят в условия

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathbf{U} \times \mathbf{N} = 0 \quad \text{на} \quad \partial \text{Cyl}. \quad (1.16)$$

Воспользовавшись элементарными тождествами $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \operatorname{curl} \mathbf{U} \times \mathbf{U} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{U}|^2}{2} \right)$ и $\operatorname{curl}^2 = -\Delta$ на соленоидальных векторных полях, можем переписать уравнения (1.8) в виде

$$\partial_t \mathbf{U} + (\operatorname{curl} \mathbf{U} + \Omega e_3) \times \mathbf{U} + \nu \operatorname{curl}^2 \mathbf{U} = -\nabla \left(p - \frac{\Omega^2}{4} |x_h|^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} \right), \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U}(t, x)|_{t=0} = \mathbf{U}(0) = \tilde{\mathbf{V}}_0(x). \quad (1.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если Ω велико, начальное условие (1.2) можно интерпретировать как слабое соответствие начальной завихренности с направлением e_3 . В смысле теории обобщенных функций для любой пробной функции $\phi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ имеем:

$$\begin{aligned} |\langle \operatorname{curl} \mathbf{V}(0, y)/\Omega - e_3, \phi(y) \rangle| &= \left| \left\langle \mathbf{V}(0, y)/\Omega - \frac{1}{2} e_3 \times y, \operatorname{curl} \phi(y) \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\Omega} |\langle \mathbf{U}(0, x), \operatorname{curl} \phi(x) \rangle| \end{aligned} \quad (1.19)$$

с $\Omega \geq \Omega_0$ (Ω_0 определено в теореме 1.1 ниже, $\Omega_0 \gg 1$).

Сформулируем основные теоремы о глобальной разрешимости. Сначала для цилиндра, обозначая через h его высоту и через R радиус. Через $\mathbf{H}_\sigma^s(\text{Cyl})$, $s \geq 0$, обозначаются обычные пространства Соболева соленоидальных векторных полей в цилиндре Cyl .

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть произвольные параметры h и R фиксированы, $\nu > 0$.

1. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) с начальным условием $\tilde{\mathbf{V}}_0(y) \in \mathbf{L}_2(\text{Cyl})$ и с граничными условиями, определенными уравнениями (1.5). Предположим, что $\|\tilde{\mathbf{V}}_0\|_{\mathbf{L}_2(\text{Cyl})} \leq M_0$. Тогда для любого слабого решения $\mathbf{V}(t, y)$ уравнений (1.1)–(1.2) существует $\hat{T} = \hat{T}(M_0, h/R, \nu)$ такое, что для любого фиксированного $\Omega \geq \Omega_0(\nu, h/R)$, не зависящего от M_0 , верны следующие утверждения:

- (а) $\mathbf{V}(t, y)$ единственно и регулярно при $\hat{T} \leq t < +\infty$;
- (б) $\mathbf{V}(t, y)$ принадлежит пространству $\mathbf{H}_\sigma^1(\text{Cyl})$, $\operatorname{curl} \mathbf{V}(t, y)$ принадлежит пространству $\mathbf{L}_2(\text{Cyl})$ и для любого $t \geq \hat{T}$

$$\|\mathbf{V}(t, y)\|_{\mathbf{H}_\sigma^1(\text{Cyl})} \leq C_2(\nu, h/R), \quad (1.20)$$

где постоянная C_2 не зависит от M_0 .

2. Предположим, что $\|\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{V}}_0(y)\|_{\mathbf{L}_2(\text{Cyl})} \leq M_1$ и Ω – большой параметр: $\Omega \geq \Omega_1(M_1, \nu, h/R)$. Тогда решения трехмерных уравнений Навье–Стокса (1.1)–(1.2) регулярны при всех $t \geq 0$ и справедлива оценка

$$\|\mathbf{V}(t, y)\|_{\mathbf{H}_\sigma^1(\text{Cyl})} \leq C_3(\nu, h/R, M_1). \quad (1.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. При выполнении граничных условий (1.5), (1.16) в цилиндрической области слабые решения понимаются в том смысле, что $\mathbf{U}(t, x)$ и $\tilde{\mathbf{V}}(t, y) = \mathbf{V}(t, y) - \frac{\Omega}{2} e_3 \times y$ удовлетворяют энергетическим тождествам:

$$\|\mathbf{U}(T)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + 2\nu \int_0^T \|\operatorname{curl}_x \mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 dt = \|\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{L}_2}^2, \quad (1.22)$$

$$\|\tilde{\mathbf{V}}(T)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + 2\nu \int_0^T \|\operatorname{curl}_y \tilde{\mathbf{V}}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 dt = \|\tilde{\mathbf{V}}(0)\|_{\mathbf{L}_2}^2; \quad (1.23)$$

из свойств канонического преобразования для оператора curl (утверждение 3) леммы 1.1) имеем при $t \geq T$

$$\|\operatorname{curl}_x \mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \|\operatorname{curl}_y \tilde{\mathbf{V}}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \leq M_1^2 \leq \frac{M_0^2}{\nu T}. \quad (1.24)$$

Из результатов работ [12], [13] и [32] следует существование постоянных $c_1, c_2, c_3 > 0$ (зависящих от h и R) таких, что

$$c_1 \|\nabla_y \tilde{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|\operatorname{curl}_y \tilde{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{L}_2} \leq c_2 \|\nabla_y \tilde{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{L}_2}, \quad (1.25)$$

$$\|\tilde{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{L}_2} \leq c_3 \|\operatorname{curl}_y \tilde{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{L}_2}. \quad (1.26)$$

Как для цилиндрической, так и для неограниченной областей доказательство регулярности и глобального существования решений (1.1)–(1.2) сводится к доказательству аналогичных результатов для преобразованных уравнений (1.8)–(1.12), полученных при каноническом преобразовании (1.14)–(1.15).

Для случая всего пространства $\mathbb{R}^3$, прежде всего, определим подходящие функциональные пространства. Введем пространства Соболева с весами [41], [42]: при $r \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{H}_0^r = \{\mathbf{V} \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \|\mathbf{V}\|_{0,r} < +\infty\}, \quad (1.27)$$

где

$$\|\mathbf{V}\|_{0,r} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathbf{V}(y)|^2}{(1+|y|^2)^r} dy \right)^{1/2}, \quad (1.28)$$

и при $s \geq 0$:

$$\mathbf{H}_s^r = \{\mathbf{V} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3), \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \|\mathbf{V}\|_{s,r} < +\infty\}, \quad (1.29)$$

где

$$\|\mathbf{V}\|_{s,r} = \left(\|\mathbf{V}\|_{0,r}^2 + \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha \mathbf{V}(y)\|_{0,r}^2 dy \right)^{1/2}.$$

Пространства $\mathbf{H}_s^r$ с введенными выше нормами являются гильбертовыми.

Для функций, заданных на периодической решетке $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}$, используем ряды Фурье для представления физических полей:

$$\mathbf{W} = \sum_n \exp(i(n_1 x_1 / a_1 + n_2 x_2 / a_2 + n_3 x_3 / a_3)) \mathbf{W}_n = \sum_n \exp(i\check{n} \cdot x) \mathbf{W}_n, \quad (1.30)$$

где $\mathbf{W}_n$ – коэффициенты Фурье, $n = [n_1, n_2, n_3] \in \mathbb{Z}^3$, $\check{n} = (n_1/a_1, n_2/a_2, n_3/a_3)$. Как обычно, считаем, что все физические поля имеют нулевые средние по области $[0, 2\pi a_1] \times [0, 2\pi a_2] \times [0, 2\pi a_3]$. В частности, $\mathbf{W}_{(0,0,0)} = 0$ в (1.30). Введем пространства Соболева $\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{T})$ периодических вектор-функций с нулевыми средними, нулевой дивергенцией и нормой, определяемой формулой

$$\|\mathbf{W}\|_{\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{T})}^2 = \sum_n |\check{n}|^{2\alpha} |\mathbf{W}_n|^2, \quad (1.31)$$

где $|\check{n}|^2 = \theta_1 n_1^2 + \theta_2 n_2^2 + \theta_3 n_3^2$, $\theta_j = 1/a_j^2$ ($j = 1, 2, 3$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Для $r > 3/2$, $s \geq 0$ вложение $\mathbf{H}^s(\mathbf{T}) \subset \mathbf{H}_s^r(\mathbb{R}^3)$ непрерывно. При $\text{diam}(\mathbf{T}) \rightarrow +\infty$ имеем $\|\mathbf{W}|_{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\|_{\mathbf{H}_0^r} \rightarrow 0$, где $r > 3/2$, через $\mathbf{W}|_{\mathbf{T}}$ обозначено периодическое сужение $\mathbf{W}$ на решетку $\mathbf{T}$. Начальные данные из $\mathbf{H}_0^r(\mathbb{R}^3)$ можно аппроксимировать данными из $\mathbf{H}_0(\mathbf{T})$ с большими a_1, a_2, a_3 . Как указывается в [41], [42] и [19], рассмотрение решений, не убывающих на бесконечности в $\mathbb{R}^3$ (например, в $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^3)$), необходимо в теории однородной статистической турбулентности.

Для задачи (1.1)–(1.2) рассматриваются начальные условия $\tilde{\mathbf{V}}_0$ на заданной y -периодической решетке $[0, 2\pi a_1] \times [0, 2\pi a_2] \times [0, 2\pi a_3]$ с нулевым средним. Заметим, что из предположения $\tilde{\mathbf{V}}_0(y) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^y)$ следует $\mathbf{V}(0, y) \in \mathbf{H}_0^r(\mathbb{R}^3)$ при всех $r > 5/2$ и $\tilde{\mathbf{V}}_0(y) \in \mathbf{L}_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Каноническое преобразование $\mathbf{U}(t)$, определенное в (1.13), сохраняет условие соленидальности, нулевые средние и норму в весовых соболевских пространствах $\mathbf{H}_s^r$, $s \geq 0$. При каноническом преобразовании (1.14)–(1.15) начальная задача (1.1)–(1.2) переходит в задачу (1.8)–(1.9) с $\mathbf{U}(t, x)|_{t=0} = \mathbf{U}_0(x) = \tilde{\mathbf{V}}_0(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x)$. Рассмотрим ограничение эволюционной задачи для $\mathbf{U}(t, x)$ на решетку $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$, периодическую по переменным x . Конечно, периодическое по переменным x поле не обязательно является периодическим по переменным y , за исключением начального момента времени $t = 0$ и дискретной последовательности времен $t = 2\pi j/\Omega$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Как определено в [41] и [42] (см. также замечание 1.5 ниже), слабое решение $\mathbf{V}(t, y)$ из весового соболевского пространства в $\mathbb{R}^3$ таково, что

$$\mathbf{V} \in \mathbf{L}^\infty((0, T'); \mathbf{H}_0^r(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^2((0, T'); \mathbf{H}_1^r(\mathbb{R}^3)) \quad \forall T' \geq 0. \quad (1.32)$$

Сформулируем основные теоремы для случая пространства $\mathbb{R}^3$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть произвольные $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ фиксированы, $\nu > 0$.

1. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) с $\tilde{\mathbf{V}}_0(y) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^y)$.

Пусть $\|\tilde{\mathbf{V}}_0\|_{\mathbf{H}_0(\mathbf{T}^y)} \leq M_0$. Тогда для любого слабого решения задачи (1.1)–(1.2) вида

$$\mathbf{V}(t, y) = e^{+\Omega \mathbf{J} t/2} \mathbf{U}(t, e^{-\Omega \mathbf{J} t/2} y) + \frac{\Omega}{2} \mathbf{J} y,$$

где $\mathbf{U}(t, x)$ удовлетворяет периодическим граничным условиям на $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$, существует $\hat{T} = \hat{T}(M_0, a_1, a_2, a_3, \nu)$ такое, что для любого $\Omega \geq \Omega_0(\nu, a_1, a_2, a_3)$, не зависящего от M_0 , верны следующие утверждения:

- (а) $\mathbf{V}(t, y)$ единственно и регулярно при $\hat{T} \leq t < +\infty$;
- (б) $\mathbf{V}(t, y)$ принадлежит пространству $\mathbf{H}_1^r(\mathbb{R}^3)$ ($r > 5/2$), $\text{curl } \mathbf{V}(t, y)$ принадлежит пространству $\mathbf{L}_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и при $t \geq \hat{T}$

$$\|\mathbf{V}(t, y)\|_{\mathbf{H}_1^r(\mathbb{R}^3)} \leq C_2(\nu, a_1, a_2, a_3), \quad (1.33)$$

где постоянная C_2 не зависит от M_0 .

2. Предположим, что $\|\text{curl } \tilde{\mathbf{V}}_0\|_{\mathbf{H}_0(\mathbf{T}^y)} \leq M_1$.

Тогда для любого $\Omega \geq \Omega_1(\nu, M_1, a_1, a_2, a_3)$

$$\mathbf{V}(t, y) \in \mathbf{H}_1^r(\mathbb{R}^3) \quad (r > 5/2), \quad \text{curl } \mathbf{V}(t, y) \in \mathbf{L}_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^3)$$

и при всех $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{V}(t, y)\|_{\mathbf{H}_1^r(\mathbb{R}^3)} \leq C_3(\nu, M_1, a_1, a_2, a_3). \quad (1.34)$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\mathbf{T}^x = \mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$ – произвольная периодическая решетка, $\nu > 0$.

1. Предположим, что $\|\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}^0(\mathbf{T}^x)} \leq M_0$, $\mathbf{U}(t, x)$ – произвольное слабое решение уравнений (1.8)–(1.9) на периодической решетке $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$, удовлетворяющее классическим энергетическим оценкам

$$\|\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}^0(\mathbf{T}^x)} \leq M_0, \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \nu \|\operatorname{curl} \mathbf{U}(s)\|_{\mathbf{H}^0(\mathbf{T}^x)}^2 ds \leq C(a_1, a_2, a_3) \quad (1.35)$$

для каждого $T \geq 0$. Тогда существует $\hat{T} = \hat{T}(M_0, a_1, a_2, a_3, \nu)$ такое, что для любого $\Omega \geq \Omega'(\nu, a_1, a_2, a_3)$, не зависящего от M_0 , верны следующие утверждения:

- (а) $\mathbf{U}(t, x_1, x_2, x_3)$ единственно и регулярно при $\hat{T} \leq t < +\infty$;
- (б) $\mathbf{U}(t, x)$ принадлежит $\mathbf{H}^1(\mathbf{T}^x)$ и при $t \geq \hat{T}$

$$\|\mathbf{U}(t, x)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{T}^x)} \leq C_1(\nu, a_1, a_2, a_3), \quad (1.36)$$

где постоянная C_1 не зависит от M_0 .

2. Предположим, что

$$\|\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{T}^x)} \leq M_\alpha, \quad \alpha > 1/2,$$

и Ω достаточно большое: $\Omega \geq \Omega_1(\nu, M_\alpha, a_1, a_2, a_3)$. Тогда решения трехмерных уравнений Навье–Стокса (1.8)–(1.9) в $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$ регулярны при всех $t \geq 0$ и справедлива оценка

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{T}^x)} \leq C_0(\nu, M_\alpha, a_1, a_2, a_3).$$

Подчеркнем, что все условия теорем 1.1, 1.2 и 1.3 ставятся только в начальный момент времени при $t = 0$; никаких дальнейших предположений не сделано при $t > 0$. Доказательство теоремы 1.2 легко выводится из теоремы 1.3, если заметить, что каноническое преобразование (1.14)–(1.15) сохраняет нормы в весовых пространствах Соболева $\mathbf{H}_1^r(\mathbb{R}^3)$, $r \geq 0$, и что вложение $\mathbf{H}^1(\mathbf{T}) \subset \mathbf{H}_1^r(\mathbb{R}^3)$ непрерывно при $r > 3/2$; это вложение применяется к пространству $\mathbf{H}^1(\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. М.И. Вишик и А.В. Фурсиков в [41], [42] подробно исследовали однородные статистические решения трехмерных уравнений Навье–Стокса как в пространствах $\mathbf{L}_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, так и в $\mathbf{H}_0^r(\mathbb{R}^3)$. Они продемонстрировали существование статистических решений Лере; однородные статистические меры не единственны. Затем они установили в [41] и [42] существование частных решений слабого типа Лере для начальной задачи в $\mathbf{H}_0^r(\mathbb{R}^3)$ для множества начальных условий с вероятностной мерой, равной единице. Сначала статистические решения строились на последовательностях периодических решеток, диаметры которых стремятся к бесконечности. Имеет ли начальная задача в $\mathbf{H}_0^r(\mathbb{R}^3)$ решение для всех начальных данных из этого пространства, неизвестно [42].

§ 2. Волновой оператор Пуанкаре–Соболева и трехмерные резонансные уравнения Навье–Стокса

Оператор Пуанкаре – это унитарная группа решений $\mathbf{E}(-\Omega t)\Phi(0) = \Phi(t)$ ($\mathbf{E}(0) = \mathbf{Id}$ – тождественный оператор) линейной задачи Пуанкаре, которая является линеаризацией задачи (1.1) с $\nu = 0$:

$$\partial_t \Phi + \Omega \mathbf{J} \Phi = -\nabla \pi, \quad \nabla \cdot \Phi = 0,$$

или, что эквивалентно,

$$\partial_t \Phi + \Omega \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P} \Phi = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{P}$ – проектор на векторные поля с нулевой дивергенцией. Для случая ограниченной области D – это проектор Вейля–Гельмгольца на соленоидальные поля с краевым условием $\mathbf{P} \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0$ на ∂D . Применяя проектор $\mathbf{P}$ на векторные поля с нулевой дивергенцией к уравнениям (1.8), мы получаем для $\mathbf{U} = \mathbf{P} \mathbf{U}$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \Omega \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P} \mathbf{U} + \nu \operatorname{curl}^2 \mathbf{U} &= \mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \\ \mathbf{U}|_{t=0} &= \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}(0, x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{J}$ – матрица вращений, $\mathbf{J} \mathbf{U} = e_3 \times \mathbf{U} = (-U_2, U_1, 0)$ – член, соответствующий силе Кориолиса, и

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -\mathbf{P}(\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U} \times \operatorname{curl} \mathbf{U}). \quad (2.3)$$

Оператор $\mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}$ является кососимметричным относительно скалярного произведения в $\mathbf{L}_2$ и удовлетворяет тождеству

$$\operatorname{curl} \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{P}. \quad (2.4)$$

Задача Пуанкаре эквивалентна нелокальному волновому оператору (уравнение Пуанкаре–Соболева), см. [38] и [3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{curl}^2 \Phi - \Omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \mathbf{P} \Phi = 0; \quad (2.5)$$

его свойства были широко исследованы школой С. Л. Соболева (см. ссылки в [3], [26]) для областей различной геометрии.

ТЕОРЕМА 2.1 [26]. *$\mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}$ является ограниченным антисимметричным нелокальным оператором нулевого порядка с плотным спектром в $[-i, +i]$.*

В случае резонансных областей, которые эргодически заполнены характеристиками (2.5) [1], [3], спектр этого оператора может быть вполне непрерывным в $[-i, +i]$. Ситуация проще в периодических областях $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$, где $\mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}$ коммутирует с оператором curl , следовательно, на соленоидальных полях с $\operatorname{curl}^{2\alpha} = (-\Delta)^\alpha$ и где $\mathbf{E}(-\Omega t) = \exp(-\Omega \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P} t)$ сохраняет все соболевские нормы [6], [7].

Для ясности сначала приводятся основные идеи доказательства для периодических областей, затем в §§ 4, 5 и 6 рассматривается случай ограниченных цилиндрических областей. Вследствие уравнения (2.4) $\mathbf{PJP}$ можно представить как

$$\mathbf{PJP}\mathbf{U} = -\frac{\partial}{\partial x_3}(\text{curl}^2)^{-1} \text{curl } \mathbf{U} \quad (2.6)$$

с $(\text{curl}^2)^{-1} \equiv (-\Delta)^{-1}$ на соленоидальных полях с нулевым средним значением на $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$.

Собственными значениями $\mathbf{PJP}$ являются $\pm i\xi_n$, где

$$\xi_n = \frac{\check{n}_3}{|\check{n}|}, \quad \check{n}_3 = \frac{n_3}{a_3}, \quad |\check{n}| = \sqrt{\theta_1 n_1^2 + \theta_2 n_2^2 + \theta_3 n_3^2}, \quad \theta_j = \frac{1}{a_j^2}. \quad (2.7)$$

Как показано в [6], оператор Пуанкаре–Соболева, который является унитарной группой решений (2.1), может быть записан в пространстве изображений Фурье как

$$\mathbf{E}_n(\Omega t) = \{\mathbf{E}(\Omega t)\}_n = \cos(\xi_n \Omega t) \mathbf{I} + \frac{1}{|\check{n}|} \sin(\xi_n \Omega t) \mathbf{R}_n, \quad \xi_n = \frac{\check{n}_3}{|\check{n}|} = \frac{n_3}{a_3 |\check{n}|}, \quad (2.8)$$

где матрица $i\mathbf{R}_n$ – преобразование Фурье оператора curl . Оператор $\mathbf{E}(\Omega t)$ коммутирует с оператором curl , он диагонализирован в базисе из собственных векторов оператора curl . Обозначим через ψ_n^+ и ψ_n^- собственные функции оператора curl в пространстве изображений Фурье, соответствующие собственным значениям $|\check{n}|$ и $-|\check{n}|$:

$$i\check{n} \times \psi_n^+ = |\check{n}| \psi_n^+, \quad i\check{n} \times \psi_n^- = -|\check{n}| \psi_n^-, \quad \check{n} \cdot \psi_n^+ = \check{n} \cdot \psi_n^- = 0. \quad (2.9)$$

Далее, $(\psi_n^+)^* = \psi_n^-$, где $*$ означает комплексное сопряжение. Имеем

$$\mathbf{E}_n(\Omega t) \psi_n^+ = e^{-i\xi_n \Omega t} \psi_n^+, \quad \mathbf{E}_n(\Omega t) \psi_n^- = e^{+i\xi_n \Omega t} \psi_n^-. \quad (2.10)$$

Обозначив через $\ker$ ядро оператора, получим из уравнений (2.4), (2.5) и (2.6) следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1.

$$\ker(\mathbf{PJP}) = \{\mathbf{U} \in \mathbf{L}_2 : \mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}}(x_1, x_2) = (U_1(x_1, x_2), U_2(x_1, x_2), U_3(x_1, x_2))\}.$$

В этой статье используется ортогональное разложение

$$\mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}} + \mathbf{U}^\perp,$$

где $\overline{\mathbf{U}}(t, x_1, x_2) = \Pi \mathbf{U}$ – “баротропная” проекция (вертикальное усреднение) на ядро $\ker(\mathbf{PJP})$,

$$\overline{\mathbf{U}}(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi a_3} \int_0^{2\pi a_3} \mathbf{U}(t, x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad (2.11)$$

и для ортогонального поля $\mathbf{U}^\perp(t, x_1, x_2, x_3)$ выполнено $\overline{\mathbf{U}^\perp} = 0$.

Введем преобразование ван дер Пола (см. [2]), положив в уравнениях (2.2)

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{E}(-\Omega t)\mathbf{u}(t), \quad (2.12)$$

где $\mathbf{u}$ – “медленная переменная”, называемая также в этой работе переменной Пуанкаре. В контексте слабо нелинейной геометрической оптики такие преобразования используются при получении модуляционных уравнений для резонансно взаимодействующих гиперболических волн [16], [21]–[23], [35], [36].

Заметим, что из (2.7) следует $\xi_n = 0$ при $n_3 = 0$ и вследствие (2.8) $\mathbf{E}(-\Omega t) = \exp(-\Omega \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P} t)$ сводится к тождественному оператору на любом баротропном (вертикально усредненном) поле, откуда

$$\overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{E}(-\Omega t)\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}. \quad (2.13)$$

Поскольку $\mathbf{E}(\Omega t)\beta|_{t=0} = \mathbf{Id}$, имеем

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{u}|_{t=0}. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.2), записанные в переменных $\mathbf{u}$, имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \nu \operatorname{curl}^2 \mathbf{u} &= \mathbf{B}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{B}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \mathbf{E}(\Omega t) \mathbf{B}(\mathbf{E}(-\Omega t)\mathbf{u}, \mathbf{E}(-\Omega t)\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\mathbf{B}$ задается (2.3). Вышеприведенное уравнение для $\mathbf{u}(t)$ в пространстве изображений Фурье принимает вид

$$\partial_t \mathbf{u}_n = \sum_{k+m=n} \mathbf{B}_n(\Omega t, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m) - \nu |\tilde{n}|^2 \mathbf{u}_n; \quad k+m=n \Leftrightarrow k_j+m_j=n_j, \quad j=1,2,3, \quad (2.16)$$

где $\mathbf{B}_n(\Omega t, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m)$ задается формулой

$$\mathbf{B}_n(\Omega t, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m) = i \sum_{k+m=n} \mathbf{P}_n \mathbf{E}_n(\Omega t) (\mathbf{E}_k(-\Omega t)\mathbf{u}_k \times (\tilde{m} \times \mathbf{E}_m(-\Omega t)\mathbf{u}_m)). \quad (2.17)$$

Разложим

$$\mathbf{B}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (2.18)$$

Здесь $\mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u})$ содержит все члены, зависящие от Ωt (т.е. не резонансные), и $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ содержит все резонансные (т.е. не зависящие от Ωt) члены в (2.17).

Очевидно,

$$\mathbf{B}_n(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{l, k+m=n} \exp(i\Omega t D_l(k, m, n)) \mathbf{Q}_{kmn,l}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B}_n^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{\substack{l, k+m=n, \\ \text{нерезонансные}}} \exp(i\Omega t D_l(k, m, n)) \mathbf{Q}_{kmn,l}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m), \quad (2.20)$$

где в (2.19) суммирование ведется по всем волновым числам и в (2.20) суммирование включает только нерезонансные члены с $D_l(k, m, n) \equiv \pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n \neq 0$ ($l = 1, \dots, 8$). Здесь l описывает выбор знака $\pm$, $Q_{kmn,l}$ – билинейная форма от $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m \in \mathbb{C}^3$.

Резонансные нелинейные взаимодействия волн Пуанкаре с $\mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ имеют место, когда частоты Пуанкаре удовлетворяют соотношениям $\pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n = 0$, $k + m = n$; соответствующее множество K волновых векторов k, m, n называется резонансным множеством:

$$K = \left\{ \pm \frac{\check{k}_3}{|\check{k}|} \pm \frac{\check{m}_3}{|\check{m}|} \pm \frac{\check{n}_3}{|\check{n}|} = 0, n = k + m \right\}. \quad (2.21)$$

Для не зависящих от времени $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m$, поскольку $D_l(k, m, n) \equiv \pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n$ ($l = 1, \dots, 8$) из экспоненциального фазового множителя в (2.19) соответствует счетному множеству частот, оператор в (2.19) является почти периодической функцией переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\mathbf{H}_1^s(\mathbf{T})$. Согласно теории почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве [11], [17] оператор $\tilde{\mathbf{B}}$ определяется формулой

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}(\Omega s, \mathbf{v}, \mathbf{v}) ds = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{B}(\Omega s, \mathbf{v}, \mathbf{v}) ds, \quad (2.22)$$

где аргументы $\mathbf{v}$ – не зависящие от s функции; см. подробности в лемме 3.5. Нелинейное условие резонанса (2.21) порождает нестандартную задачу о малых знаменателях в оценках сильной сходимости предела при $\Omega \rightarrow +\infty$ в (2.22).

Имеем

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w})_n = \sum_{n=k+m, K} \mathbf{Q}_{kmn}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_m), \quad (2.23)$$

где $\mathbf{Q}_{kmn}$ – билинейные предельные операторы, полученные из (2.17) и (2.22), причем

$$|\mathbf{Q}_{kmn}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_m)| \leq |\check{m}| |\mathbf{w}_k| |\mathbf{w}_m|.$$

Для “медленных” переменных Пуанкаре $\mathbf{w}$, усредняя в (2.18), получим из (2.15) следующие предельные уравнения [4], [6]:

$$\partial_t \mathbf{w} + \nu \operatorname{curl}^2 \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \quad (2.24)$$

$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}(0) = \mathbf{U}(0). \quad (2.25)$$

Явное выражение для резонансного оператора $\tilde{\mathbf{B}}$ было дано в [4], [6]. Пусть

$$\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}^\perp = \Pi \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp, \quad (2.26)$$

где $\overline{\mathbf{w}} = \Pi \mathbf{w}$ – вертикальные усреднения $\mathbf{w}$ (проекция на ядро $\ker \mathbf{PJP}$) и $\overline{\mathbf{w}}^\perp = 0$. Из уравнений (2.8), (2.15), (2.24) следует, что резонансные взаимодействия в $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w})_n$, записанном в представлении Фурье, присутствуют при $(k, m, n) \in K$. Таким образом, взаимодействия в (2.24) ограничены на резонансное множество волновых чисел K . Уравнения (2.24) называются трехмерными предельными резонансными уравнениями Навье–Стокса. Как энергия, так и спиральность сохраняются при $\nu = 0$ (определение спиральности дано в [3]). Эти уравнения полностью трехмерные, так как они включают все трехмерные моды с волновыми числами взаимодействий в $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w})$, ограниченными на K . Классические двумерные уравнения Навье–Стокса содержатся в них

как инвариантная подсистема. Эта двумерная подсистема соответствует взаимодействиям с $k_3 = m_3 = n_3 = 0$ в (2.21).

В [6] было показано, что оператор $\tilde{\mathbf{B}}$ коммутирует с операцией вертикального усреднения:

$$\overline{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w})} = \tilde{\mathbf{B}}(\overline{\mathbf{w}}, \overline{\mathbf{w}}) \Leftrightarrow \Pi \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{B}}(\Pi \mathbf{w}, \Pi \mathbf{w}), \quad (2.27)$$

откуда

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp) + \mathbf{B}_{\text{II}}(\overline{\mathbf{w}}, \mathbf{w}^\perp) + \mathbf{B}_{2D}(\overline{\mathbf{w}}, \overline{\mathbf{w}}), \quad (2.28)$$

где $\mathbf{B}_{2D}$ соответствует чисто двумерным взаимодействиям ($k_3 = m_3 = n_3 = 0$), $\mathbf{B}_{\text{II}}$ – каталитический оператор ($k_3 m_3 = 0$, $n_3 \neq 0$). Из вышеприведенных рассуждений следует, что $k_3 m_3 n_3 \neq 0$ для взаимодействий, заданных $\mathbf{B}_{\text{III}}$. Такие взаимодействия соответствуют $\xi_k \xi_m \xi_n \neq 0$ и называются строго трехволновыми резонансами. Обозначим через K^* множество строго трехволновых резонансных волновых чисел (подмножество K):

$$K^* = \left\{ \pm \frac{\check{k}_3}{|\check{k}|} \pm \frac{\check{m}_3}{|\check{m}|} \pm \frac{\check{n}_3}{|\check{n}|} = 0, k_3 m_3 n_3 \neq 0, n = k + m \right\}. \quad (2.29)$$

Имеем

$$\mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp) = \sum_{n=k+m, K^*} \mathbf{Q}_{kmn}(\mathbf{w}_k^\perp, \mathbf{w}_m^\perp), \quad (2.30)$$

где $\mathbf{Q}_{kmn}$ такие же, как и в (2.23), хотя суженные на K^* . Множество $K^* = K^*(\theta_2, \theta_3)$ зависит от вида коэффициентов a_2, a_3 , так как $\theta_2 = (a_1/a_2)^2$ и $\theta_3 = (a_1/a_3)^2$. Это множество обладает следующим свойством: $K^*(\theta_2, \theta_3) \cap K^*(\theta_2, \theta'_3) = \emptyset$, если $\theta'_3 \neq \theta_3$ (подробнее про это свойство и алгебраическую геометрию резонансных кривых Пуанкаре см. в [6]–[8]).

Так как $\Pi \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{B}}(\Pi \mathbf{w}, \Pi \mathbf{w})$, решения предельных резонансных уравнений Навье–Стокса (2.24) $\mathbf{w}(t, x_1, x_2, x_3) = (w_1, w_2, w_3)$ – распадаются на $\overline{\mathbf{w}}(t, x_1, x_2)$ – решение несвязанного уравнения и $\mathbf{w}^\perp(t, x_1, x_2, x_3)$ – решение уравнения с коэффициентами, зависящими от $\overline{\mathbf{w}}$. Поле $\overline{\mathbf{w}}(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет двумерным трехкомпонентным уравнениям Навье–Стокса (три компоненты вектора и зависимость от двух переменных x_1, x_2). Точнее,

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\mathbf{w}} + (\overline{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \overline{\mathbf{w}} - \nu \Delta_h \overline{\mathbf{w}} &= -\nabla_h \overline{q}, \quad \nabla_h \cdot \overline{\mathbf{w}} = 0, \\ \overline{\mathbf{w}}|_{t=0} &= \overline{\mathbf{w}}(0) = \overline{\mathbf{U}}(0), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где ∇_h обозначает градиент по горизонтальным переменным; третья компонента $\overline{w}_3(t, x_1, x_2)$ вектора $\overline{\mathbf{w}}$ удовлетворяет скалярному уравнению относительно горизонтального поля $\overline{\mathbf{w}}_h = (\overline{w}_1, \overline{w}_2)$:

$$\partial_t \overline{w}_3 + (\overline{\mathbf{w}}_h \cdot \nabla_h) \overline{w}_3 - \nu \Delta_h \overline{w}_3 = 0. \quad (2.32)$$

Заметим, что $\Pi \mathbf{W} = \Pi \mathbf{E}(-\Omega t) \mathbf{w} = \Pi \mathbf{w}$. Медленная переменная Пуанкаре $\mathbf{w}^\perp(t, x_1, x_2, x_3)$ (ортогональная к $\overline{\mathbf{w}}$, что означает – с нулевым вертикальным усреднением) удовлетворяет предельным уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w}^\perp + \nu \text{curl}^2 \mathbf{w}^\perp &= \mathbf{B}_{\text{II}}(\overline{\mathbf{w}}(t), \mathbf{w}^\perp) + \mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp), \\ \mathbf{w}^\perp|_{t=0} &= \mathbf{w}^\perp(0) = \mathbf{U}^\perp(0). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Алгебраическая структура $\mathbf{B}_{II}$ и $\mathbf{B}_{III}$ была уже явно дана в [4], [6] и [7]. В изображениях Фурье уравнения (2.33) принимают вид

$$\partial_t \mathbf{w}_n^\perp = \mathbf{B}_{II}(\bar{\mathbf{w}}(t), \mathbf{w}^\perp)_n + \mathbf{B}_{III}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp)_n - \nu |\tilde{n}|^2 \mathbf{w}_n^\perp. \quad (2.34)$$

Множество суммирования для нелинейного оператора $(\mathbf{B}_{III})_n$ в (2.34) – строго трехволновое резонансное множество K^* . Подмножество K , в котором $n_3 \neq 0$ (нет вертикального усреднения), но $k_3 m_3 = 0$, – множество суммирования для каталитического линейного оператора $(\mathbf{B}_{II})_n$. Оператор $\mathbf{B}_{II}(\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{w}^\perp)$ был подробно исследован в п. 5 работы [6]. Коэффициенты оператора $(\mathbf{B}_{II})_n$ в этой системе определяются через решения $\bar{\mathbf{w}}(t)$ двумерных трехкомпонентных уравнений Навье–Стокса (2.31), следовательно, термин “каталитический” предложен физиками.

Доказательства регулярности для трехмерных предельных уравнений Навье–Стокса основываются на исследовании условия резонанса для взаимодействий, порождаемых квадратичной нелинейностью в пределе при $\Omega \rightarrow +\infty$, имеющего при $\theta_j = 1/a_j^2$ ($j = 1, 2, 3$) следующий вид (см. (2.21) и [6]):

$$\pm \frac{k_3}{\sqrt{\theta_1 k_1^2 + \theta_2 k_2^2 + \theta_3 k_3^2}} \pm \frac{m_3}{\sqrt{\theta_1 m_1^2 + \theta_2 m_2^2 + \theta_3 m_3^2}} \pm \frac{n_3}{\sqrt{\theta_1 n_1^2 + \theta_2 n_2^2 + \theta_3 n_3^2}} = 0, \quad (2.35)$$

с условием свертки $n = k + m$. При $k_3 = m_3 = n_3 = 0$, что соответствует чисто двумерным взаимодействиям (зависимость от x_1 и x_2 и нет зависимости от x_3 в физическом пространстве), уравнения (2.35) тривиально удовлетворяются. Случай $k_3 m_3 n_3 = 0$, $k_3^2 + m_3^2 + n_3^2 \neq 0$ соответствует двухволновым резонансам и порождает оператор $\mathbf{B}_{II}$. При $k_3 m_3 n_3 \neq 0$ (случай строго трехволновых резонансов, порождающих оператор $\mathbf{B}_{III}$) уравнение (2.35) можно свести к уравнению для многочлена, однородного относительно переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, и, не ограничивая общности, мы можем взять $\theta_1 = 1$. Тогда, для фиксированных целочисленных векторов k, m, n , уравнение (2.35) определяет алгебраические кривые на плоскости (θ_2, θ_3) (резонансные кривые Пуанкаре). Эти кривые несут информацию о зависимости предельных уравнений от параметров области. Ясно, что существует счетное множество кривых в положительном квадранте (θ_2, θ_3) и, следовательно, мера Лебега параметров области (θ_2, θ_3) , для которых есть строго трехволновые резонансы ($\mathbf{B}_{III} \neq 0$), равна нулю.

С другой стороны, при фиксированных (θ_2, θ_3) , $\theta_1 = 1$ (параметры области фиксированы) уравнение (2.35) определяет множество $K = K(\theta_2, \theta_3)$ взаимодействий между модами Фурье для трехмерных предельных резонансных уравнений Навье–Стокса ($\Omega \rightarrow \infty$). Ограничение (2.35) на волновые числа взаимодействий показывает, что взаимодействия для предельных резонансных трехмерных уравнений Навье–Стокса слабее, чем для исходной трехмерной системы Навье–Стокса, но сильнее, чем для двумерных уравнений Навье–Стокса; вопрос о регулярности решений предельных уравнений нетривиален [14]. Оценка всех нелинейных трехмерных взаимодействий с ограничением (2.35) получена с помощью леммы 3.3 (об ограниченных свертках), которая основывается на технике Литтлвуда–Пэли [40]. Это позволяет нам доказать глобальную регулярность решений предельных резонансных трехмерных уравнений Навье–Стокса.

Уравнение (2.35) определяет счетное множество кривых $\Gamma(k, m, n)$ в первой четверти координатной плоскости (θ_2, θ_3) ($\theta_1 = 1$), параметризованных целочисленными

векторами k, m, n . Каждая точка (θ_2, θ_3) на плоскости представляет отношение сторон периодической решетки. Наши исследования показывают, что существуют два вида резонансных кривых $\Gamma(k, m, n)$: прямые линии и несводимые кривые. Каждая точка на резонансной кривой $\Gamma(k, m, n)$ – точка разрыва для оператора $\mathbf{B}_{\text{III}}$, рассматриваемого как функция от (θ_2, θ_3) (см. подробности в лемме 3.2 в [6], а также лемму 4.1 в [7]). Простейшая классификация точек (θ_2, θ_3) основывается на подсчете кривых, проходящих через точку (θ_2, θ_3) . Обозначим через $N_{ir}(\theta_2, \theta_3)$ число несводимых кривых, проходящих через (θ_2, θ_3) , через $N_r(\theta_2, \theta_3)$ – число сводимых кривых (прямых линий). Можно показать, что множество точек (θ_2, θ_3) , в которых $N_r(\theta_2, \theta_3) = +\infty$, плотно в квадранте $\theta_2, \theta_3 > 0$. С другой стороны, если $N_r(\theta_2, \theta_3) = 0$, $N_{ir}(\theta_2, \theta_3) = 1$, то трехмерное предельное резонансное уравнение (2.33) распадается на счетную последовательность несвязанных конечномерных нелинейных динамических систем, инвариантных относительно предельного полупотока Навье–Стокса на $(\ker(\mathbf{PJP}))^\perp$. Подробности см. в [7] и [8].

§ 3. Глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье–Стокса при больших конечных Ω

В этом параграфе сначала приводятся свойства операторов $\mathbf{B}_{\text{II}}$ и $\mathbf{B}_{\text{III}}$ из уравнений (2.33)–(2.34) – трехмерных резонансных предельных уравнений Навье–Стокса для $\mathbf{w}^\perp = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}$, затем намечается в общих чертах доказательство глобальной разрешимости для этих уравнений, без каких-либо ограничений на величину начальных данных. Вспомним определение пространств $\mathbf{H}^s(\mathbf{T})$, см. (1.31).

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^2(\mathbf{T})$. Предельный резонансный оператор $\tilde{\mathbf{B}}$ удовлетворяет следующим тождествам:

$$(\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \mathbf{w}) = 0, \quad (3.1)$$

$$(\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \text{curl}^2 \mathbf{w}) = -(\tilde{\mathbf{B}}(\text{curl} \mathbf{w}, \mathbf{w}), \text{curl} \mathbf{w}). \quad (3.2)$$

Для каталитического оператора $\mathbf{B}_{\text{II}}$, введенного в (2.28), имеем новые тождества (двумерный оператор $\mathbf{B}_{2D}$ им не удовлетворяет):

ЛЕММА 3.2. Для каждого $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^0(\mathbf{T})$ и $\mathbf{v}^\perp \in \mathbf{H}^{s+1}(\mathbf{T})$, $s \geq 0$, имеем:

$$(\mathbf{B}_{\text{II}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^\perp), \text{curl}^{2s} \mathbf{v}^\perp) = 0, \quad (\mathbf{B}_{\text{II}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^\perp), \partial_3^s \mathbf{v}^\perp) = 0. \quad (3.3)$$

Для исследования резонансного оператора $\mathbf{B}_{\text{III}}$, порожденного строго трехволновым резонансным множеством K^* (см. (2.29)–(2.30)), требуется новая техника, основанная на гармоническом анализе и разложениях Литтлвуда–Пэли. Из леммы 3.3 об ограниченных свертках получим следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathbf{w}^\perp(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{H}^2(\mathbf{T})$ (пространство Соболева соленидальных периодических векторных полей с нулевыми средними). Тогда выполняется следующая оценка:

$$|(\mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp), \text{curl}^2 \mathbf{w}^\perp)| \leq C \|\mathbf{w}^\perp\|_1 \|\mathbf{w}^\perp\|_{3/2}^2 \leq C_{\text{III}} \|\mathbf{w}^\perp\|_2 \|\mathbf{w}^\perp\|_1^2. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оценка (3.4) того же типа, что и классическая оценка О. А. Ладженской [27], [28], [31] в двумерном случае при краевом условии Дирихле. Хорошо известно, что для периодических краевых условий в двумерном случае аналог левой части в (3.4) тождественно равен нулю. Конечно, в (3.4) векторное поле $\mathbf{w}^\perp$ с нулевой дивергенцией и пространства Соболева $\mathbf{H}^s$ полностью трехмерны относительно пространственных переменных x_1, x_2 и x_3 .

Доказательство оценки (3.4) основывается на лемме об ограниченных свертках [7]. Здесь, не ограничивая общности, мы положим $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1$.

ЛЕММА 3.3 (лемма об ограниченных свертках, [7]). Пусть $\chi(k, m, n)$ – характеристическая функция некоторого множества K^* в $(\mathbb{Z}^3)^3$ такая, что $\chi(k, m, n) = \chi(m, k, n) = \chi(k, n, m)$, – является симметричной. Пусть $\alpha \geq 0$, β фиксированы и

$$\sup_n \sum_{k: k+m+n=0, k \in \Sigma_i} \chi(k, m, n) |k|^{-\alpha} \leq C_0 2^{i\beta} \quad (3.5)$$

при каждом $i = 0, 1, 2, \dots$, где

$$\Sigma_i = \{k = (k_1, k_2, k_3) \mid 2^i \leq |k| < 2^{i+1}, |k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\}. \quad (3.6)$$

Тогда для любой последовательности u_n с $u_{(0,0,0)} = 0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k+m+n=0} |u_k| |u_m| |u_n| \chi(k, m, n) \\ & \leq C \left(\sum_n |n|^\beta |u_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k |k|^\alpha |u_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_m |u_m|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $C = 6\sqrt{2C_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Из леммы 3.1 получаем следующее неравенство:

$$|(\mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp), \text{curl}^2 \mathbf{w}^\perp)| \leq c' \sum_{k+m+n=0} |\check{k}| |\mathbf{w}_k^\perp| |\check{m}| |\mathbf{w}_m^\perp| |\check{n}| |\mathbf{w}_n^\perp| \chi(k, m, n). \quad (3.8)$$

Здесь $\chi(k, m, -n)$ – характеристическая функция резонансного множества K^* строго трехволновых резонансов: $\pm \frac{\check{k}_3}{|\check{k}|} \pm \frac{\check{m}_3}{|\check{m}|} \pm \frac{\check{n}_3}{|\check{n}|} = 0, n+k+m=0, k_3 m_3 n_3 \neq 0$ (т.е. $\chi = 1$, если выполнено условие резонанса, и $\chi = 0$ в противном случае). Это множество является подмножеством множества решений уравнения $P(k, m, n) = 0$, где многочлен $P(k, m, n)$ задается формулой

$$P(k, m, n) = (k_3^2 |\check{m}|^2 |\check{n}|^2 + m_3^2 |\check{k}|^2 |\check{n}|^2 - n_3^2 |\check{k}|^2 |\check{m}|^2)^2 - 4k_3^2 m_3^2 |\check{k}|^2 |\check{m}|^2 |\check{n}|^4. \quad (3.9)$$

Напомним, что $|\check{k}|^2 = \theta_1 k_1^2 + \theta_2 k_2^2 + \theta_3 k_3^2$ и аналогично для $\check{m}, \check{n}$. Мы рассматриваем P как многочлен от k, m и n с фиксированными $\theta_j, j = 1, 2, 3$, положим для краткости $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1$. Очевидно, P – многочлен 12-й степени от k, m и n . Следовательно, $P(k, -n-k, n)$ – многочлен восьмой степени от k_3 и коэффициент при k_3^8 не равен нулю

при $n_3 \neq 0$; главная степень k_3^8 получается в слагаемом $-3k_3^4(-n_3 - k_3)^4n_3^4$. Пусть $k = (k_1, k_2, k_3)$. Тогда для фиксированных k_1, k_2 и n существует не более чем восемь значений k_3 , удовлетворяющих уравнению $P(k, -k - n, n) = 0$. Оценим теперь сумму в (3.5) с $\alpha = 1$ следующим образом:

$$\sum_{2^i \leq |k| < 2^{i+1}} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{-1/2} \chi(k, -k - n, n) \leq 8 + 8 \sum_{0 < |k'| < 2^{i+1}} (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2} \leq C_0 2^i,$$

здесь C_0 – абсолютная постоянная. Следовательно, неравенство (3.5) выполняется с $\alpha = \beta = 1$. Пусть $v_k = |k| |\mathbf{w}_k^\perp|$ и аналогично для m и n . Так как $\|v\|_{1/2} = \|\mathbf{w}^\perp\|_{3/2}$, $\|v\|_0 = \|\mathbf{w}^\perp\|_1$, из (3.7), (3.8) следует

$$\begin{aligned} |(\mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp), \text{curl}^2 \mathbf{w}^\perp)| &\leq c' \sum_{k+m+n=0} |v_k| |v_m| |v_n| \chi(k, m, n) \\ &\leq c' C \|v\|_{1/2}^2 \|v\|_0 = c' C \|\mathbf{w}^\perp\|_1 \|\mathbf{w}^\perp\|_{3/2}^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

С помощью лемм 3.1, 3.2 и теоремы 3.1, следуя классическим методам О. А. Ладженской [27], [28], [31], получим глобальную регулярность решений трехмерных предельных резонансных уравнений Навье–Стокса на неограниченном интервале времени:

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\nu > 0$, $\|\mathbf{w}(0)\|_\alpha \leq M_\alpha$, $\alpha > 1/2$ (M_α произвольно велико). Тогда существует единственное регулярное решение $\mathbf{w}(t)$ предельных трехмерных резонансных уравнений Навье–Стокса (2.24), причем

$$\|\mathbf{w}(t)\|_\alpha \leq M'_1(\nu, M_\alpha, a_1, a_2, a_3) \quad \text{при всех } t \geq 0.$$

Теперь продолжим оценивать ошибку – разницу между решениями $\mathbf{u}(t)$ уравнений (2.15) с большим конечным Ω

$$\partial_t \mathbf{u} + \nu \text{curl}^2 \mathbf{u} = \mathbf{B}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{E}(\Omega t) \mathbf{B}(\mathbf{E}(-\Omega t) \mathbf{u}, \mathbf{E}(-\Omega t) \mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (3.12)$$

и решениями $\mathbf{w}(t)$ предельных трехмерных резонансных уравнений Навье–Стокса

$$\partial_t \mathbf{w} + \nu \text{curl}^2 \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}(0) = \mathbf{U}(0) = \mathbf{u}(0). \quad (3.14)$$

Пусть

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{r}(0) = 0. \quad (3.15)$$

Напомним, что $\mathbf{E}(\Omega t)$ – изометрия на всех пространствах Соболева. Следовательно, оценки для норм $\mathbf{r}(t)$ дают оценки норм ошибки

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{E}(-\Omega t)(\mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t)) = \mathbf{U}(t) - \mathbf{E}(-\Omega t) \mathbf{w}(t). \quad (3.16)$$

Уравнение для ошибки $\mathbf{r}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{r}(t) + \nu \int_0^t \text{curl}^2 \mathbf{r}(s) ds = \int_0^t \left(\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \mathbf{w}) + \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega s, \mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s)) \right) ds, \quad (3.17)$$

где

$$\mathbf{B}_n^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) = \sum_{\substack{l, k+m=n \\ \text{нерезонансные}}} \exp(i\Omega t D_l(k, m, n)) \mathbf{Q}_{kmn,l}(\mathbf{u}_k(t), \mathbf{u}_m(t)). \quad (3.18)$$

Имеем:

ЛЕММА 3.4. Пусть $T_\sigma(M_{\sigma 0}, \nu, a_1, a_2, a_3)$ – малый промежуток времени, на котором локально существует решение $\mathbf{U}(t)$ уравнения (2.2) с начальным условием $\|\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}^\sigma} \leq M_{\sigma 0}$. Тогда, при условиях $\alpha > 1/2$, $\sigma - \alpha > 4$, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{H}^\alpha} &\leq \delta(\Omega), \quad \forall t \in [0, T_\sigma], \\ \nu \int_0^T \|\mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{H}^{\alpha+1}}^2 dt &\leq (\delta(\Omega))^2, \quad \forall T \in [0, T_\sigma], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\delta(\Omega) \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow +\infty$; T_σ не зависит от $M_{\sigma 0}$, T_σ , ν , α , σ , a_1 , a_2 , a_3 .

Напомним, что $\mathbf{RJP}$ кососимметричен относительно скалярного произведения в каждом соболевском пространстве $\mathbf{H}^\sigma(\mathbf{T})$ и, следовательно, малый интервал времени локального существования для (2.2) не зависит от Ω .

Для того чтобы доказать эту лемму о локальной сходимости, заметим, что первые два слагаемые в подынтегральном выражении в правой части (3.17) линейны по $\mathbf{r}$ и нам надо только показать, что вклад от $\mathbf{B}^{\text{osc}}$ можно сделать произвольно малым при $\varepsilon = 1/\Omega \rightarrow 0$. Из (3.18) видим что $\mathbf{B}_n^{\text{osc}}(\tau/\varepsilon, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))$ является почти периодической функцией переменной τ со значениями в $L^\infty(t; \mathbf{H}^\alpha)$, так как множество $D_l(k, m, n) = \pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n$ счетно. Нам потребуется следующая лемма о почти периодических функциях со значениями в банаховых пространствах [10], [11], [17], [35].

ЛЕММА 3.5 [10]. Пусть $f(t, \tau) \in AP(\mathbb{R}; C_0(t; \mathbf{E}))$ – почти периодические функции переменной τ со значениями в $C_0(t; \mathbf{E})$, $t \in [0, T_0]$, $\mathbf{E}$ – гильбертово пространство. Пусть

$$f(t, \tau) \sim \sum_{j \in J} f_j(t) \exp(i\omega_j \tau) \quad (3.20)$$

в смысле почти периодических функций от τ со значениями в банаховом пространстве, $f_j(t) \in C_0(t; \mathbf{E})$; суммирование ведется по счетному множеству частот J . Если

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \|f(t, \tau)\|_{\mathbf{E}} \leq M_f \quad \text{и если} \quad |\omega_j| \geq \eta > 0 \quad \text{на } J, \quad (3.21)$$

то

$$\mathbf{E}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T f(t, t/\varepsilon) dt = 0; \quad (3.22)$$

сходимость равномерная на $0 \leq T \leq T_0$ при условии, что $\|f(t_2, \tau) - f(t_1, \tau)\|_{\mathbf{E}} \leq c|t_2 - t_1|$ равномерно на $[0, T_0]$.

Для того чтобы применить лемму 3.5 к $\mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))$, надо, чтобы $|\omega_j| = |\xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n| > \eta$ равномерно по k, m, n . Для этого определим $\pi_R \mathbf{u}$ (аналогично $\pi_R \mathbf{w}$) – проекцию $\mathbf{u}$ на моды Фурье с $|\dot{k}|, |\dot{m}|, |\dot{n}| \leq R$ такую, что

$$\|\mathbf{u} - \pi_R \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^\alpha} \leq M_\sigma R^{\alpha-\sigma}, \quad \sigma > \alpha. \quad (3.23)$$

Тогда $|\pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n| > \eta(R)$. $\mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))$ раскладывается следующим образом:

$$\mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \pi_R \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \pi_R \mathbf{u}, \pi_R \mathbf{u}) + \pi_R \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}, (I - \pi_R) \mathbf{u}) \quad (3.24)$$

$$+ \pi_R \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, (I - \pi_R) \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (I - \pi_R) \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega t, \mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (3.25)$$

Наконец, применим лемму 3.5 с $\mathbf{E} = \mathbf{H}^\alpha$ к интегралу

$$\int_0^t \pi_R \mathbf{B}^{\text{osc}}(\Omega s, \pi_R \mathbf{u}(s), \pi_R \mathbf{u}(s)) ds \quad (3.26)$$

и воспользуемся (3.23), для того чтобы оценить члены ошибок, включающие $(I - \pi_R)$. Это завершает доказательство леммы 3.4 о локальной сходимости.

Из теоремы 3.2 о глобальной регулярности решений трехмерных резонансных уравнений Навье–Стокса и леммы 3.4 выводится глобальная регулярность для уравнений (1.8)–(1.9) при большом, но конечном Ω .

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть параметры области a_1, a_2, a_3 произвольны, но фиксированы. Пусть $\nu > 0$, $\alpha > 1/2$. Пусть*

$$\|\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{T}^x)} \leq M_\alpha$$

и Ω велико: $\Omega \geq \Omega_1(M_\alpha, \nu, a_1, a_2, a_3)$. Тогда решения трехмерной системы Навье–Стокса (1.8)–(1.9) на $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$ регулярны при всех $t \geq 0$ и

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{H}^\alpha(\mathbf{T}^x)} \leq M'_\alpha \quad \text{при всех } t \geq 0.$$

Все технические детали можно найти в §§ 6 и 8 работы [6] и § 5 в [7]. Из теоремы 3.3 выводится теорема 1.3 о регуляризации слабых решений на решетке $\mathbf{T}_{a_1 a_2 a_3}^x$ и теорема 1.2 для решений $\mathbf{V}(t, y)$ исходной начальной задачи (1.1)–(1.2) в $\mathbb{R}^3$ в весовых пространствах Соболева.

§ 4. Волновой оператор Пуанкаре–Соболева и трехмерные резонансные уравнения Навье–Стокса в цилиндрических областях

В этом параграфе рассматриваются уравнения (1.1)–(1.2) в цилиндрических областях с высотой h и радиусом R , с краевыми условиями (1.5). Определим боковые граничные компоненты ∂Cyl ; пусть

$$\Gamma = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y_3 < h, y_1^2 + y_2^2 = R^2\}. \quad (4.1)$$

Не ограничивая общности, можно перейти от задачи с граничными условиями (1.5) к задаче с граничными условиями по y_3 с периодом $2h$ и следующими граничными условиями на Γ :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad \text{curl } \tilde{\mathbf{V}} \times \mathbf{N} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{N}$ – нормальный вектор к Γ . Это следует из инвариантности трехмерных уравнений Эйлера и Навье–Стокса относительно симметрии $y_1 \rightarrow y_1, y_2 \rightarrow y_2, y_3 \rightarrow -y_3, V_1 \rightarrow V_1, V_2 \rightarrow V_2, V_3 \rightarrow -V_3$. Заметим, что краевые условия в вертикальном направлении дают равенство нулю потока на горизонтальных границах ($V_3=0$ на крышке и на дне цилиндра) и нулевое напряжение на горизонтальных границах $\left(\frac{\partial V_1}{\partial y_3} = \frac{\partial V_2}{\partial y_3} = 0 \right)$ на крышке и на дне цилиндра) и надо только ограничиться рассмотрением векторных полей с V_1, V_2 , четными по переменной y_3 , и V_3 , нечетной по y_3 .

В цилиндрических областях с краевыми условиями (1.16) структура $\mathbf{PJP}$ и $\mathbf{E}(-\Omega t)$ гораздо более сложная, так как оператор curl не коммутирует с оператором $\mathbf{PJP}$ (но коммутирует с оператором $\mathbf{P}$), поскольку операторы ∇ и $-\Delta$ не коммутируют с $\mathbf{P}$. Проекция Гельмгольца $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{PU}$ такова, что (i) $\text{div } \mathbf{PU} = 0$ и (ii) $\mathbf{PU} \cdot \mathbf{N} = 0$ на ∂Cyl . Теорема Вейля–Гельмгольца о разложении для $\mathbf{L}_2(D)$, где D – ограниченная область, теперь включает гармонические распределения:

ТЕОРЕМА 4.1. *Каждое векторное поле $\mathbf{U} \in \mathbf{L}_2(D)$ допускает единственное разложение:*

$$\mathbf{U} = \mathbf{PU} + \nabla \pi_H + \nabla \pi_0, \quad (4.3)$$

где $\nabla \pi_H$ и $\nabla \pi_0 \in \mathbf{L}_2(D)$ и

$$\Delta \pi_0 = \text{div } \mathbf{U}, \quad \pi_0 = 0 \quad \text{на } \partial D, \quad (4.4)$$

$$\Delta \pi_H = 0, \quad \frac{\partial \pi_H}{\partial N} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} - \frac{\partial \pi_0}{\partial N} \quad \text{на } \partial D, \quad \text{в } \mathbf{H}^{-1/2}(\partial D). \quad (4.5)$$

Отметим, что множество гармонических распределений таких, что $\frac{\partial \pi_H}{\partial N} = 0$ на ∂D , сводится к $\{0\}$, следовательно, $\mathbf{PU}$ единственно.

Для того чтобы построить собственные функции и собственные значения $\mathbf{PJP}$ и $\mathbf{E}(-\Omega t)$, нам надо обратить curl^2 в уравнении (2.5) Пуанкаре–Соболева, подчиненном краевому условию (1.16). Здесь существенно требуются результаты теории потенциала для оператора curl^{-1} с граничными условиями, полученные О. А. Ладыженской в соавторстве с Э. Б. Быховским, Н. В. Смирновым и В. А. Солонниковым [29], [12], [13], [32]. В. А. Солонников в работе [39] показал, что при ограниченной геометрии оператор curl – переопределенная эллиптическая система на соленоидальных полях и допускает максимальное самосопряженное расширение. Для curl могут быть построены два различных обратных оператора с различными областями определения и множествами значений.

Напомним классическую лемму об интегрировании по частям для оператора curl .

ЛЕММА 4.1. *Для $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{H}^1(D)$*

$$\int_D \text{curl } \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \, dx = \int_D \mathbf{U} \cdot \text{curl } \mathbf{V} \, dx + \int_{\partial D} (\mathbf{N} \times \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) \, dS, \quad (4.6)$$

где определитель в граничном интеграле понимается в смысле $\mathbf{N} \times \mathbf{U}$ и $\mathbf{N} \times \mathbf{V} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial D)$; $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial D)$ [12], [18].

Для того чтобы сделать краткий обзор результатов работ [29], [32], [12], [13], мы введем обозначения О. А. Ладыженской, здесь D – ограниченная область с границей ∂D :

$$\mathbf{J} = \text{Clos}\{\mathbf{U} \in C^\infty(\overline{D}), \text{div } \mathbf{U} = 0\} \text{ в } \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2}, \quad \mathbf{J} \equiv \mathbf{H}_\sigma^0; \quad (4.7)$$

$$\mathbf{J}_1 = \{\mathbf{U} \in \mathbf{H}^1(D), \text{div } \mathbf{U} = 0\} \equiv \mathbf{H}_\sigma^1(D); \quad (4.8)$$

$$\mathbf{J}^0 = \text{Clos}\{\mathbf{U} \in C^\infty(\overline{D}), \text{div } \mathbf{U} = 0, \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0 \text{ на } \partial D\} \text{ в } \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2}; \quad (4.9)$$

$$\mathbf{J}_{1,\tau}^0 = \text{Clos}\{\mathbf{U} \in C^\infty(\overline{D}), \text{div } \mathbf{U} = 0, \mathbf{U} \times \mathbf{N} = 0 \text{ на } \partial D\} \text{ в } \|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(D)}. \quad (4.10)$$

ТЕОРЕМА 4.2. $\mathbf{J}_{1,\tau}^0(D)$ плотно в $\mathbf{J}(D)$.

ТЕОРЕМА 4.3. Для каждого $\mathbf{V} \in \mathbf{J}^0(D)$ существует единственное $\Psi \in \mathbf{J}_{1,\tau}^0(D)$ такое, что $\mathbf{V} = \operatorname{curl} \Psi$ и

$$C_1 \|\mathbf{V}\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|\Psi\|_{\mathbf{H}^1} \leq C_2 \|\mathbf{V}\|_{\mathbf{L}_2} \quad (4.11)$$

с некоторыми $C_1, C_2 > 0$.

ТЕОРЕМА 4.4. Для каждого $\mathbf{W} \in \mathbf{J}(D)$ существует единственное $\Phi \in \mathbf{J}^0(D) \cap \mathbf{H}^1(D)$ такое, что $\mathbf{W} = \operatorname{curl} \Phi$ и

$$C_3 \|\mathbf{W}\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|\Phi\|_{\mathbf{H}^1} \leq C_4 \|\mathbf{W}\|_{\mathbf{L}_2} \quad (4.12)$$

с некоторыми $C_3, C_4 > 0$.

Из теоремы 4.3 вытекает существование ограниченного оператора curl^{-1} с областью определения $\mathbf{J}^0$ и множеством значений $\mathbf{J}_{1,\tau}^0$. Аналогично, теорема 4.4 определяет curl^{-1} с областью определения $\mathbf{J}$ и множеством значений $\mathbf{J}^0 \cap \mathbf{H}^1$. Отметим, что из теоремы 4.4 следует неравенство Пуанкаре: $\|\Phi\|_{\mathbf{L}_2} \leq C_4 \|\mathbf{W}\|_{\mathbf{L}_2}$. К. Бардош [18] переделал теорему 4.4, используя непотенциальные теоретические методы К. Фридрихса [20].

Из теорем 4.3, 4.4 и 4.2 о плотности выводится следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Существует ограниченный линейный оператор $\Theta = \operatorname{curl}^{-1} \circ \operatorname{curl}^{-1}$, действующий из $\mathbf{J}^0(D)$ в $\mathbf{J}^0 \cap \mathbf{H}^1$, определяемый формулой $\Theta \mathbf{V} = \mathbf{U}$, где

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_\tau \rightarrow \mathbf{U}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{V}_\tau = \operatorname{curl}^{-1} \mathbf{V}, \mathbf{U} = \operatorname{curl}^{-1} \mathbf{V}_\tau, \quad (4.14)$$

здесь первый оператор curl^{-1} понимается в смысле теоремы 4.3, второй – в смысле теоремы 4.4.

Имеем $\mathbf{V}_\tau \in \mathbf{J}_{1,\tau}^0$ и $\mathbf{U} \in \mathbf{J}^0 \cap \mathbf{H}^1$. Оператор Θ является самосопряженным, положительно определенным и компактным как оператор, действующий из $\mathbf{J}^0$ в $\mathbf{J}^0$.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $\mathbf{A} = \Theta^{-1}$. Тогда его область определения $\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{U} \in \mathbf{J}^0, \operatorname{curl} \mathbf{U} \in \mathbf{J}_{1,\tau}^0\}$. Оператор $\mathbf{A}$ инъективен на $\mathbf{J}^0(D)$. Это эллиптический, самосопряженный, положительно определенный оператор. На области $\mathcal{D}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{U}, \quad (4.15)$$

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}_\sigma^2} \leq C_5 (\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{L}_2} + \|\mathbf{A} \mathbf{U}\|_{\mathbf{L}_2}), \quad (4.16)$$

где $\mathbf{H}_\sigma^m$ – обычное пространство $\mathbf{H}^m(D)$, ограниченное на соленоидальные векторные поля.

Хотя предложение 4.1 и теорема 4.5 являются прямыми следствиями результатов работ [29], [32], [12], [13] и [39], мы не смогли найти их явно в литературе. Нам потребуются следующие новые результаты о свойствах $\mathbf{PJP}$ и $\mathbf{E}(-\Omega t)$ в цилиндрических областях.

ТЕОРЕМА 4.6 [10]. *Операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{PJP}$ коммутируют на области определения оператора $\mathbf{A}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Оператор $\mathbf{A} = \text{curl curl}$ на $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ заменяет оператор Стокса. Он имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n^2\}$, $\lambda_n^2 > 0$, $\lambda_n^2 \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, и множество собственных функций $\{\Phi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, $\mathbf{A}\Phi_n = \lambda_n^2 \Phi_n$, $\Phi_n \in \mathbf{J}^0 \cap \mathbf{H}^2$. Эти собственные функции полны в $\mathbf{J}(D)$ (соленоидальные векторы в $\mathbf{L}_2(D)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если $\mathbf{U} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$, $\text{curl } \mathbf{U} \times \mathbf{N} = 0$ на ∂D , то $(\mathbf{U}, \mathbf{A}\mathbf{U}) = (\text{curl } \mathbf{U}, \text{curl } \mathbf{U})_{\mathbf{L}_2}$ определяет форму Дирихле оператора $\mathbf{A}$. Следовательно, собственные функции оператора $\mathbf{A}$ полны в линейном подпространстве пространства $\mathbf{J}^0 \cap \mathbf{H}^1(D)$, на котором $\text{curl } \mathbf{U} \times \mathbf{N} = 0$ на ∂D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. $\mathbf{H}_\tau^1(D) = \{\mathbf{U} \in \mathbf{H}^1(D) : \text{div } \mathbf{U} = 0, \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0 \text{ на } \partial D \text{ и } \text{curl } \mathbf{U} \times \mathbf{N} = 0 \text{ на } \partial D\}$. Заметим, что в $\mathbf{H}_\tau^1(D)$ $\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C_2 \|\text{curl } \mathbf{U}\|_{\mathbf{L}_2}$ с постоянной C_2 из теоремы 4.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Если $\text{curl } \mathbf{U} \in \mathbf{L}_2(D)$, то $\text{curl } \mathbf{U} \times \mathbf{N}$ принадлежит пространству $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial D)$ [18]. А также если $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_\tau^1(D) \cap \mathbf{H}^2(D) \equiv \mathcal{D}(\mathbf{A})$, то $\text{curl curl } \mathbf{U} \in \mathbf{J}^0(D)$.

Из уравнений (2.4)–(2.5), теорем 4.5 и 4.6 вытекает следующий результат (здесь $\tilde{n}_3 = n_3/h$ обозначает вертикальное волновое число Фурье по x_3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. (i) *На $[-i, 0) \cup (0, +i]$ спектр оператора $\mathbf{PJP}$ состоит из плотного, но счетного множества собственных значений $\pm i\xi_n$, каждому собственному значению соответствует конечномерное собственное подпространство.*

(ii) *Каждая собственная функция оператора $\mathbf{PJP}$ является собственной функцией оператора $\mathbf{A}$. Соответствующие собственные значения $\pm i\xi_n$ и λ_n^2 отображаются друг на друга по формуле $\xi_n^2 = \frac{\tilde{n}_3}{\lambda_n^2}$.*

(iii) $\ker \mathbf{PJP} = \{\mathbf{U} \in \mathbf{J}(\text{Cyl}) : \mathbf{U} \equiv \overline{\mathbf{U}}(x_1, x_2) = (U_1(x_1, x_2), U_2(x_1, x_2), U_3(x_1, x_2))\}$.

(iv) *На $(\ker \mathbf{PJP})^\perp$ $\mathbf{E}(-\Omega t) = \exp(-\mathbf{PJP}\Omega t)$ диагонализирована в базисе собственных векторов $\mathbf{A}$, соответствующих собственным значениям $\exp(\pm i\Omega \xi_n t) = \exp(\pm i\Omega \frac{\tilde{n}_3}{\lambda_n^2} t)$.*

Собственные функции Φ_n формируют базис для curl . Для того чтобы прояснить это, воспользуемся разложением в ряд Фурье только по x_3

$$\mathbf{U} = \sum_{n_3 \in \mathbf{Z}} \mathbf{U}_{n_3}(x_1, x_2) \exp(i\tilde{n}_3 x_3), \quad (4.17)$$

где $\frac{\partial}{\partial x_3}$ действует как скалярный множитель $i\tilde{n}_3$, и перейдем к варианту предложения 4.2 для периодических областей, аналогичному приведенным в §2. Пусть для каждой собственной функции Φ_n оператора $\mathbf{A}$

$$\Phi_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pm n_3} \widehat{\Psi}_{n_3}^{(n)}(r, \theta) \exp(i\tilde{n}_3 x_3), \quad (4.18)$$

где r и θ – обычные полярные координаты, и $\Psi_{n_3}^* = \Psi_{-n_3}$. Суммирование в (4.18) проводится по конечному множеству. Определим:

$$\phi_n = \widehat{\Psi}_{n_3}^{(n)}(r, \theta) \exp(i\tilde{n}_3 x_3). \quad (4.19)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Каждое комплексное собственное пространство $\{\phi_n\}$ оператора $\mathbf{A}$, соответствующее собственному значению λ_n^2 , распадается на два линейных ортогональных подпространства $\{\phi_n^+\}$ и $\{\phi_n^-\}$ таких, что:

$$\operatorname{curl} \phi_n^+ = +\lambda_n \phi_n^+, \quad \operatorname{curl} \phi_n^- = -\lambda_n \phi_n^-, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{PJP} \phi_n^+ = -\frac{in_3}{\lambda_n} \phi_n^+, \quad \mathbf{PJP} \phi_n^- = +\frac{in_3}{\lambda_n} \phi_n^-, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{E}(\Omega t) \phi_n^+ = \exp\left(\frac{-in_3}{\lambda_n} \Omega t\right) \phi_n^+, \quad \mathbf{E}(\Omega t) \phi_n^- = \exp\left(\frac{+in_3}{\lambda_n} \Omega t\right) \phi_n^-. \quad (4.22)$$

В заключение отметим, что мы полностью диагонализировали унитарный оператор Пуанкаре–Соболева $\mathbf{E}(-\Omega t)$ с помощью собственных функций самосопряженного, положительно определенного эллиптического оператора $\mathbf{A} = \operatorname{curl} \operatorname{curl}$ с краевыми условиями, где $\mathbf{A}^{-1} = \Theta = \operatorname{curl}^{-1} \circ \operatorname{curl}^{-1}$. Оператор $\mathbf{A}$ естественным образом заменяет оператор Стокса, это выводится из глубоких функциональных свойств векторных потенциалов оператора curl , установленных в школе О. А. Ладыженской при исследовании уравнений магнитогидродинамики.

Так же, как и в § 2, перейдем к преобразованию ван дер Пола $\mathbf{U}(t) = \mathbf{E}(-\Omega t) \mathbf{u}(t)$; “баротропная” проекция Π на ядро оператора $\ker \mathbf{PJP}$ определяется так же, как в (2.11), a_3 заменяется на h , $\mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}} + \mathbf{U}^\perp$, $\Pi \mathbf{E}(-\Omega t) = \mathbf{I}$, $\Pi \mathbf{U} = \Pi \mathbf{u}$. Уравнение (2.15) для переменной Пуанкаре $\mathbf{u}$ выполнено в цилиндре. Вместо того чтобы применять разложение в ряд Фурье, мы теперь разложим $\mathbf{u}$ по собственным функциям ϕ_n оператора $\mathbf{A}$, выписанным в (4.19):

$$\mathbf{u} = \sum_n u_n \phi_n = \sum_n (u_n^+ \phi_n^+ + u_n^- \phi_n^-), \quad (4.23)$$

здесь ϕ_n^+ , ϕ_n^- – базисные векторные поля, u_n^+ , u_n^- – скалярные коэффициенты. Из свойств диагонализации $\exp(+i\Omega \xi_n t) u_n^+ = U_n^+$, $\exp(-i\Omega \xi_n t) u_n^- = U_n^-$. Диагонализация $\mathbf{E}(-\Omega t)$ и оператора curl дает:

$$\partial_t u_n + \nu \lambda_n^2 u_n = \sum_{k, m, k_3 + m_3 = n_3} \mathbf{B}_n^{k, m}(\Omega t, u_k, u_m), \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B}_n^{k, m}(\Omega t, u_k, u_m) = \pm \lambda_m \exp\left(i\left(\pm \frac{\check{k}_3}{\lambda_k} \pm \frac{\check{m}_3}{\lambda_m} \pm \frac{\check{n}_3}{\lambda_n}\right) \Omega t\right) (\phi_k \times \phi_m, \phi_n)_{\mathbf{L}_2} u_k u_m, \quad (4.25)$$

где k, m, n теперь нумеруют собственные функции и собственные значения оператора curl .

Нелинейные резонансные взаимодействия волн Пуанкаре из $\mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ присутствуют, когда частоты Пуанкаре удовлетворяют соотношению $\pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n = 0$, $k_3 + m_3 = n_3$, с резонансным множеством K , определенным теперь в терминах вертикальных волновых чисел k_3, m_3, n_3 и собственных значений $\pm \lambda_k, \pm \lambda_m, \pm \lambda_n$ оператора curl :

$$K = \left\{ \pm \frac{k_3}{\lambda_k} \pm \frac{m_3}{\lambda_m} \pm \frac{n_3}{\lambda_n} = 0, \quad n_3 = k_3 + m_3 \right\}. \quad (4.26)$$

Таким образом, $\mathbf{A}$ имеет счетное множество собственных значений, т.е. $D_l(k, m, n) = \pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n$, где k, m, n теперь индексируют собственные функции и собственные значения оператора $\mathbf{A}$ (и curl). При зависящих от времени $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{u}_m$ оператор усреднения в (2.22) действует на почти периодические функции от t со значениями в гильбертовых пространствах $\mathbf{J}^0, \mathbf{J}_{1,\tau}^0, \mathbf{H}_\tau^1$ (и других гильбертовых пространствах, базирующихся на нормах curl , определенных в § 5).

Так же, как лемма 3.5 в §§ 2, 3, это позволяет дать точное определение резонансного линейного оператора $\tilde{\mathbf{B}}$ при помощи формул усреднения [11], [17]. Основываясь на свойствах резонансного множества K (4.26) и воспользовавшись кососимметричностью $(\phi_k \times \phi_m, \phi_n)_{\mathbf{L}_2}$, получим, что расщепление оператора выполняется и в цилиндрическом случае:

$$\Pi \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{B}}(\Pi \mathbf{w}, \Pi \mathbf{w}), \quad (4.27)$$

разложение оператора $\tilde{\mathbf{B}}$ (2.28) остается верным, в нем $\mathbf{B}_{2D}$ соответствует чисто двумерным взаимодействиям ($k_3 = m_3 = n_3 = 0$), $\mathbf{B}_{II}$ – каталитический оператор ($k_3 = 0, m_3 n_3 \neq 0$). Из вышеперечисленного следует, что $k_3 m_3 n_3 \neq 0$ для взаимодействий, задаваемых $\mathbf{B}_{III}$. Такие взаимодействия соответствуют $\xi_k \xi_m \xi_n \neq 0$ и называются строго трехволновыми резонансами. Обозначим через K^* множество строго трехволновых резонансных волновых чисел (подмножество K):

$$K^* = \left\{ \pm \frac{\check{k}_3}{\lambda_k} \pm \frac{\check{m}_3}{\lambda_m} \pm \frac{\check{n}_3}{\lambda_n} = 0, k_3 m_3 n_3 \neq 0, n_3 = k_3 + m_3 \right\}. \quad (4.28)$$

Решения $\mathbf{w}(t, x_1, x_2, x_3) = (w_1, w_2, w_3)$ предельных резонансных уравнений Навье–Стокса (2.24) расщепляются на $\bar{\mathbf{w}}(t, x_1, x_2)$ – решение несвязанного уравнения и на $\mathbf{w}^\perp(t, x_1, x_2, x_3)$ – решение уравнения с коэффициентами, зависящими от $\bar{\mathbf{w}}$. Поле $\bar{\mathbf{w}}(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет двумерным трехкомпонентным уравнениям Навье–Стокса (три компоненты, но зависимость от двух переменных x_1, x_2 , см. уравнения (2.31)–(2.32)). Краевые условия теперь становятся условиями равенства нулю потока в каждом вертикальном сечении для горизонтальной компоненты $\bar{\mathbf{w}}_h = (w_1, w_2)$. Медленная переменная Пуанкаре $\mathbf{w}^\perp(t, x_1, x_2, x_3)$ (ортогональная к $\bar{\mathbf{w}}$, т.е. с нулевым вертикальным усреднением) удовлетворяет предельным уравнениям (2.33) в цилиндре. Отметим, что строго трехволновые резонансы, определяемые (4.28), теперь даются в терминах трансцендентного уравнения, параметризованного через h/R . Тем не менее, мы показываем, что для всех значений h/R , за исключением счетного множества, резонансные множества лежат в $\{k_3 m_3 n_3 = 0\}$. Это общий случай нестрогих трехмерных резонансов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Множество параметров h/R , для которых могут появляться строго трехволновые резонансы, – счетное множество $\mathcal{K}^*$.*

§ 5. Глобальная регулярность трехмерных уравнений Навье–Стокса при больших конечных Ω в цилиндрических областях

Два главных препятствия к тому, чтобы обобщить методы быстро осциллирующих сингулярных пределов, описанные в § 2 и 3, со случая периодической решетки на случай цилиндра (а также на другие осесимметричные области), таковы: (i) $\mathbf{PJP}$ не является кососимметричным относительно скалярного произведения в классических

пространствах Соболева $\mathbf{H}_\sigma^s(\text{Cyl})$, $s \geq 1$; (ii) $\mathbf{E}(\Omega t)$ не является изометрией на этих пространствах (∇ не коммутирует с $\mathbf{PJP}$ и $\mathbf{E}(\Omega t)$). Из-за п. (i) априорные оценки решений уравнений (1.8)–(1.9) в соболевских пространствах зависят от $1/\varepsilon = \Omega$; из-за п. (ii) оценки медленной переменной Пуанкаре $\mathbf{u}(t, x)$ (преобразования ван дер Пола от $\mathbf{U}(t, x)$, (2.12)) не инвариантны относительно физической переменной $\mathbf{U}(t, x)$. Такая инвариантность существенно используется при доказательствах сходимости в § 3 (периодический случай). Для решения этих проблем требуется ввести гильбертовы пространства с метрикой, базирующейся на нормах операторов $\mathbf{A}$ и curl , с нормами, эквивалентными нормам $\mathbf{H}_\sigma^s(\text{Cyl})$, где $s \geq 1$ – целое. На основании предложения 4.1 и теорем 4.2–4.5 рекуррентно определим области $\mathcal{D}(\mathbf{A}^p)$:

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}^2) = \{\mathbf{U} \in \mathcal{D}(\mathbf{A}) : \mathbf{A}\mathbf{U} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})\} \quad (5.1)$$

и

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}^p) = \{\mathbf{U} \in \mathcal{D}(\mathbf{A}^{p-1}) : \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{U} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})\}, \quad p \geq 2. \quad (5.2)$$

Заметим, что если $\mathbf{U} \in \mathcal{D}(\mathbf{A}^p)$, то

$$(\mathbf{A}^j \mathbf{U}) \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (\text{curl } \mathbf{A}^j \mathbf{U}) \times \mathbf{N} = 0 \quad \text{на } \partial \text{Cyl}, \quad 0 \leq j \leq p. \quad (5.3)$$

ЛЕММА 5.1. На $\mathcal{D}(\mathbf{A}^p)$ имеем

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}^{2p}(\text{Cyl})} \leq C_{2p} \|\mathbf{A}^p \mathbf{U}\|_{\mathbf{L}_2}. \quad (5.4)$$

Эта оценка получается при повторном применении неравенств (4.11), (4.12) и (4.16). Отметим, что выполняются неравенства типа неравенств Пуанкаре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Гильбертово пространство $\mathcal{A}^p$ является замыканием $\mathcal{D}(\mathbf{A}^p)$ в $\mathbf{H}_\sigma^{2p}(\text{Cyl})$ по норме $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2} + \|\mathbf{A}^p \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2}$. Для $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{A}^p$ определим:

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{A}^p} = \|\mathbf{A}^p \mathbf{U}\|_{\mathbf{L}_2}, \quad \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathcal{A}^p} = (\mathbf{A}^p \mathbf{U}, \mathbf{A}^p \mathbf{V})_{\mathbf{L}_2}, \quad (5.5)$$

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{A}^p} \leq \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}^{2p}(\text{Cyl})} \leq C_{2p} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{A}^p}. \quad (5.6)$$

ЛЕММА 5.2. При $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{A}^p$, $p \geq 0$:

$$\langle \mathbf{PJP} \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathcal{A}^p} = -\langle \mathbf{U}, \mathbf{PJP} \mathbf{V} \rangle_{\mathcal{A}^p}, \quad (5.7)$$

$$(\mathbf{PJP} \mathbf{U}, \mathbf{A} \mathbf{U})_{\mathbf{L}_2} = 0. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наметим доказательство для $\mathbf{U} = \mathbf{V}$:

$$\langle \mathbf{A}^p \mathbf{PJP} \mathbf{U}, \mathbf{A}^p \mathbf{U} \rangle = \langle (-\Delta)^p (e_3 \times \mathbf{U} + \nabla \pi), \mathbf{A}^p \mathbf{U} \rangle \quad (5.9)$$

$$= \langle e_3 \times (-\Delta)^p \mathbf{U}, (-\Delta)^p \mathbf{U} \rangle + \langle \nabla (-\Delta)^p \pi, \mathbf{A}^p \mathbf{U} \rangle = 0, \quad (5.10)$$

здесь мы учли, что $\text{curl curl } \mathbf{U} = -\Delta \mathbf{U}$ в декартовых координатах на соленоидальных векторных полях, и воспользовались равенствами $\text{div } \mathbf{A}^p \mathbf{U} = 0$, $(\mathbf{A}^p \mathbf{U}) \cdot \mathbf{N} = 0$ на ∂Cyl . Доказательство тождества (5.8) проводится по такой же схеме; (5.8) дает возможность доказать равномерность по Ω интервала локального существования решения уравнений (2.2) в $\mathbf{H}_\tau^1$.

ТЕОРЕМА 5.1. $\mathbf{E}(\Omega t)$ – изометрия на гильбертовом пространстве $\mathcal{A}^p$, $p \geq 0$.

Следующие свойства используются при выведении глобальной регулярности трехмерных предельных резонансных уравнений Навье–Стокса, а также локального существования и регулярности для уравнений (1.8)–(1.9) в пространствах $\mathcal{A}^p$.

ЛЕММА 5.3. Пусть $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{A}^p$ и $\mathbf{W} \in \mathcal{A}^{p+1}$ при $p \geq 1$. Тогда

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{W})\|_{\mathcal{A}^p} \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{A}^p} \|\mathbf{W}\|_{\mathcal{A}^{p+1}}, \quad (5.11)$$

$$|\langle \mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{V}), \mathbf{V} \rangle_{\mathcal{A}^p}| \leq \tilde{C} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{A}^p} \|\mathbf{V}\|_{\mathcal{A}^p}^2, \quad (5.12)$$

и аналогично для трехмерного предельного резонансного оператора $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w})$.

Из этих оценок и спектральных свойств операторов curl и $\mathbf{A}$ (см. §4) следует, что лемма 3.1 про $\tilde{\mathbf{B}}$ распространяется на цилиндрические области, так же, как и лемма 3.2 про $\mathbf{B}_{\text{II}}$ с $\mathbf{v}^\perp$ из подходящего пространства $\mathcal{A}^p$. Для резонансного оператора $\mathbf{B}_{\text{III}}$ установим:

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathbf{w}^\perp(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}^1$. Тогда выполняется следующая оценка

$$|(\mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp), \text{curl}^2 \mathbf{w}^\perp)_{\mathbf{L}_2}| \leq C_{\text{III}} \|\mathbf{w}^\perp\|_{\mathcal{A}^1} \|\text{curl} \mathbf{w}^\perp\|_{\mathbf{L}_2}. \quad (5.13)$$

При доказательстве теоремы 5.2 требуется модифицировать лемму об ограниченных свертках. В дальнейшем разложение в ряд Фурье в лемме 3.3 заменяется на разложение по собственным функциям ϕ_n^+ , ϕ_n^- , соответствующим собственным значениям $\pm \lambda_n$ оператора curl (см. §4); диадические оболочки в (3.6) переопределяются следующим образом:

$$\Sigma_j = \{k \mid 2^j \leq |\lambda_k| < 2^{j+1}\}. \quad (5.14)$$

Нормы теперь берутся в пространствах $\mathcal{A}^s$. Доказательство модифицированной леммы об ограниченных свертках, а также ее применение при доказательстве теоремы 5.2 – технический момент, включающий специальную форму равномерных асимптотик для λ_n , ϕ_n^+ , ϕ_n^- в цилиндре при $n \rightarrow +\infty$ и точные выражения в терминах цилиндрических координат $(r, \theta, \check{n}_3)$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Положив

$$\phi_n = \Psi_{n_1 n_2 n_3}(\beta_n r) e^{in_2 \theta} e^{i\check{n}_3 x_3}, \quad \beta_{n_1 n_2 n_3}^2 = \lambda_{n_1 n_2 n_3}^2 - \check{n}_3^2, \quad (5.15)$$

где n теперь означает n_1, n_2, n_3 , можем выразить $\Psi_{n_1 n_2 n_3}(\beta_n r)$ через линейные комбинации функций Бесселя $J_{n_2}(\beta_n r)$, $J'_{n_2}(\beta_n r)$. Третья (вертикальная) компонента собственного вектора $\Psi_{n_1 n_2 n_3}(\beta_n r)$ должна являться решением задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения со специальным условием типа условия Робина при $r = 1$, индуцированным граничным условием равенства нулю потока для всего векторного поля. Собственные значения $\lambda_{n_1 n_2 n_3}$ – счетное множество решений уравнения (с нормализацией $R = 1$)

$$\beta_{n_1 n_2 n_3}^2 \left(\frac{J'_{n_2}(\beta_n)}{J_{n_2}(\beta_n)} \right)^2 = \frac{n_2^2}{\check{n}_3^2} (\beta_{n_1 n_2 n_3}^2 + \check{n}_3^2), \quad \lambda_{n_1 n_2 n_3}^2 = \beta_{n_1 n_2 n_3}^2 + \check{n}_3^2. \quad (5.16)$$

Здесь n_1 используется для нумерации решений уравнения (5.16) при фиксированном $\check{n}_3$ (вертикальные волновые числа) и фиксированном n_2 (азимутальное волновое число). При $|\lambda_{n_1 n_2 n_3}| \rightarrow +\infty$ устанавливаем равномерную асимптотику:

ЛЕММА 5.4.

$$\lambda_{n_1 n_2 n_3}^2 = \left(n_1 \pi + n_2 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \psi \right)^2 + \check{n}_3^2 + \eta_{n_1 n_2 n_3}, \quad (5.17)$$

где $\eta_{n_1 n_2 n_3} \rightarrow 0$ при $\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \rightarrow +\infty$ и где $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ равномерно по n_2, n_3 и независимо от n_1 . Аналогично показывается, что радиальные компоненты собственных функций (5.15) асимптотически эквивалентны тригонометрическим функциям.

В этом обзоре технические детали опущены. Устанавливается аналог теоремы 3.2 – глобальная регулярность решений предельных трехмерных резонансных уравнений Навье–Стокса в цилиндре, в терминах пространств $\mathbf{H}_\tau^1(\text{Cyl})$ и $\mathcal{A}^s(\text{Cyl})$, $s \geq 1$. Затем доказательство сходимости завершается так же, как и в §3, но в пространствах $\mathcal{A}^s$, нормы в которых эквивалентны нормам в $\mathbf{H}_\sigma^{2s}(\text{Cyl})$, см. определение 5.1. Так как множество $\pm \xi_k \pm \xi_m \pm \xi_n = \pm \frac{\check{k}_3}{\lambda_k} \pm \frac{\check{m}_3}{\lambda_m} \pm \frac{\check{n}_3}{\lambda_n}$ счетно, применяется лемма 3.5 для почти периодических функций. Изометрия $\mathbf{E}(\Omega t)$ на пространствах $\mathcal{A}^s$ (теорема 5.1) сохраняет оценки медленной переменной Пуанкаре $\mathbf{u}(t, x)$ для исходного быстро осциллирующего поля $\mathbf{U}(t, x)$. Распространение леммы 3.4 требует равномерности интервала локального существования решения $\mathbf{U}(t, x)$ уравнения (2.2) с начальным условием $\|\mathbf{U}(0)\|_{\mathcal{A}^s} \leq M_{s0}$, а именно равномерности по Ω . Это невозможно в терминах классических пространств Соболева $\mathbf{H}^s(\text{Cyl})$ и существенно требует, чтобы $\mathbf{RJP}$ был кососимметричным в гильбертовом пространстве вихрей $\text{curl } \mathcal{A}^p$, $p \geq 0$. Вспоминая определение 4.1 пространств $\mathbf{H}_\tau^1(\text{Cyl})$, приходим к заключению:

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть параметр области h/R произволен и $\nu > 0$. Рассмотрим трехмерные уравнения Навье–Стокса (1.8)–(1.9) с краевыми условиями (1.16). Пусть $\|\text{curl } \mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{L}_2(\text{Cyl})} \leq M_1$ и Ω велико: $\Omega \geq \Omega_1(M_1, \nu, h/R)$. Тогда решения трехмерных уравнений Навье–Стокса (1.8)–(1.9) регулярны при всех $t \geq 0$ и

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\text{Cyl})} \leq C_2 \|\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{H}_\tau^1(\text{Cyl})} \leq M'_1 \quad \text{при всех } t \geq 0. \quad (5.18)$$

Это завершает доказательство теоремы 1.1 для исходных уравнений (1.1)–(1.2) в цилиндре, если учесть, что каноническое преобразование (1.14)–(1.15) является изометрией на пространствах $\mathcal{A}^p$ (см. также замечание 1.3).

§ 6. Регулярность на большом промежутке времени для трехмерных уравнений Эйлера в цилиндрических областях с начальными данными, характеризующимися равномерно большой завихренностью

Методика, разработанная для трехмерных уравнений Навье–Стокса, дает и доказательство регулярности на большом промежутке времени для трехмерных уравнений Эйлера в цилиндрических областях [10]:

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{V}(t, y)|_{t=0} = \mathbf{V}(0) = \tilde{\mathbf{V}}_0(y) + \frac{\Omega}{2} e_3 \times y, \quad (6.2)$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{V}(t, y) = (V_1, V_2, V_3)$ – векторное поле скоростей и p – давление. Граничное условие:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \text{на } \partial \text{Cyl}, \quad (6.3)$$

где $\mathbf{N}$ – вектор нормали к ∂Cyl .

Не ограничивая общности, можно рассмотреть задачу с граничными условиями (6.3) как частный случай задачи с граничными условиями, периодическими по y_3 с периодом π/h , и со следующими граничными условиями на боковой поверхности Γ (см. (4.1)):

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}|_{\Gamma} = 0, \quad (6.4)$$

здесь $\mathbf{N}$ – вектор нормали к Γ . Это следует из инвариантности трехмерных уравнений Эйлера относительно симметричной замены $y_1 \rightarrow y_1, y_2 \rightarrow y_2, y_3 \rightarrow -y_3, V_1 \rightarrow V_1, V_2 \rightarrow V_2, V_3 \rightarrow -V_3$. Отметим, что краевые условия на горизонтальных границах – условия равенства нулю потока в вертикальном направлении ($V_3 = 0$ на крышке и на дне цилиндра), и нужно только ограничиться рассмотрением векторных полей с четными по y_3 компонентами V_1, V_2 и нечетной по y_3 компонентой V_3 . Мы рассматриваем Ω в уравнении (6.1) как большой параметр и, следовательно, начальный вихрь при $t = 0$, $\text{curl } \mathbf{V}(0, y) = \text{curl } \tilde{\mathbf{V}}_0 + \Omega e_3$, имеет большую компоненту в вертикальном направлении e_3 . Подчеркнем, что все предположения сделаны для начальных данных, только при $t = 0$, и никаких дополнительных предположений о свойствах решений не делается при $t > 0$.

Для любого фиксированного параметра Ω (не обязательно большого) каноническое преобразование (1.14)–(1.15) в лемме 1.1 отображает цилиндрическую область Cyl на себя и сохраняет краевые условия для векторных полей $\mathbf{V}(t, y)$ и $\mathbf{U}(t, x)$. При преобразовании (1.14)–(1.15) уравнения (6.1)–(6.2) переходят в уравнения (1.8)–(1.9) с $\nu = 0$. Трехмерные предельные резонансные уравнения Эйлера в пределе при $\Omega \rightarrow +\infty$ сводятся к уравнениям (2.24) с $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w} &= \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \\ \mathbf{w}|_{t=0} &= \mathbf{w}(0) = \mathbf{U}(0) = \tilde{\mathbf{V}}_0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Как и ранее, $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}^\perp$. Уравнения (6.5) сохраняют как энергию, так и спиральность; $\bar{\mathbf{w}}(t)$ удовлетворяет двумерным трехкомпонентным уравнениям Эйлера. Поле $\mathbf{w}^\perp(t, x_1, x_2, x_3)$ (ортогональное к $\bar{\mathbf{w}}$, что означает с нулевым вертикальным усреднением) удовлетворяет предельным уравнениям (уравнения (2.33) с $\nu = 0$):

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w}^\perp &= \mathbf{B}_{\text{II}}(\bar{\mathbf{w}}(t), \mathbf{w}^\perp) + \mathbf{B}_{\text{III}}(\mathbf{w}^\perp, \mathbf{w}^\perp), \\ \mathbf{w}^\perp|_{t=0} &= \mathbf{w}^\perp(0) = \mathbf{U}^\perp(0) = \mathbf{U}(0) - \bar{\mathbf{U}}(0). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для $\bar{\mathbf{w}}(t, x_1, x_2)$ мы имеем обычные законы сохранения и глобальные теоремы существования для двумерных уравнений Эйлера.

Для общего случая резонансов, не являющихся строго трехволновыми, что исключает множество K^* (4.28), $\mathbf{B}_{\text{III}} = 0$. В этом случае мы имеем глобальную регулярность предельных резонансных уравнений (6.5) и регулярность на большом промежутке времени для трехмерных уравнений Эйлера (6.1)–(6.2) при больших Ω . Множество

параметров h/R , при которых $\mathbf{B}_{\text{III}} = 0$, имеет полную меру Лебега, см. предложение 4.3. В таких случаях глобальная регулярность предельных резонансных уравнений и регулярность при больших значениях времени трехмерных уравнений Эйлера (6.1)–(6.2) доказывается с использованием новых трехмерных законов сохранения для $\mathbf{B}_{\text{II}}$. Точнее, $\mathbf{B}_{\text{III}} = 0$ везде, за исключением счетного дискретного множества $\mathcal{K}^*$ значений параметров h/R . Тогда уравнения (6.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w}^\perp &= \mathbf{B}_{\text{II}}(\bar{\mathbf{w}}(t), \mathbf{w}^\perp), \\ \mathbf{w}^\perp|_{t=0} &= \mathbf{w}^\perp(0) = \mathbf{U}^\perp(0) = \mathbf{U}(0) - \bar{\mathbf{U}}(0). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Уравнения (6.7) порождают новые трехмерные законы сохранения [6]:

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\bar{\mathbf{w}}(t)$ – решение двумерных трехкомпонентных уравнений Эйлера. Тогда для каждого решения $\mathbf{w}^\perp(t)$ уравнений (6.7) с начальными данными $\mathbf{w}^\perp(0)$ имеем:

$$\|\partial_3 \mathbf{w}^\perp(t)\|^2 = \|\partial_3 \mathbf{w}^\perp(0)\|^2 \quad (6.8)$$

и

$$\|\text{curl}^s \mathbf{w}^\perp(t)\|^2 = \|\text{curl}^s \mathbf{w}^\perp(0)\|^2, \quad (6.9)$$

где s – целое число, $s \geq 0$.

Вышеприведенные законы сохранения (6.8)–(6.9) гарантируют глобальную регулярность предельных уравнений Эйлера (6.7). Следуя методам §§ 2–4, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.2. Рассмотрим начальную задачу для трехмерных уравнений Эйлера (6.1)–(6.2) с $\text{curl} \mathbf{V}(0, y) = \Omega e_3 + \text{curl} \tilde{\mathbf{V}}_0(y)$ и $\tilde{\mathbf{V}}_0(y) \in \mathbf{H}_\sigma^s(\text{Cyl})$, $s \geq 4$. Пусть $\|\tilde{\mathbf{V}}_0\|_{\mathbf{H}_\sigma^s(\text{Cyl})} \leq M_s$. Пусть $h/R \notin \mathcal{K}^*$, где $\mathcal{K}^*$ – счетное множество. Пусть $T_1 > 0$ фиксировано, произвольно велико. Тогда существует $\Omega_1(h/R, M_s, T_1)$ такое, что при каждом фиксированном $\Omega \geq \Omega_1$ существует единственное регулярное решение уравнений (6.1)–(6.2) и при $0 \leq t < T_1$

$$\|\mathbf{V}(t, y)\|_{\mathbf{H}_\sigma^s(\text{Cyl})} \leq \tilde{M}(h/R, M_s, T_1). \quad (6.10)$$

Для фиксированного M_s $T_1 \rightarrow +\infty$ при $1/\Omega_1 \rightarrow 0$. Или наоборот, можно взять произвольно большие, но ограниченные множества начальных данных: $M_s \rightarrow +\infty$, если $1/\Omega_1 \rightarrow 0$, T_1 фиксировано.

Эта теорема дает класс подлинно трехмерных решений уравнений Эйлера, которые регулярны на больших интервалах времени, даже если начальная завихренность и растяжение завихренности велики [10].

Благодарности. Мы хотим поблагодарить профессоров В. И. Арнольда, О. А. Ладженскую, К. Моффата, Я. Г. Синая, В. А. Солонникова, С. Фояша и А. В. Фурсикова за очень полезные обсуждения. Работа поддержана Национальным Научным Фондом (США) и Математическим Институтом Исаака Ньютона, Кембриджский университет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Arnold. Small denominators. I: Mappings of the circumference onto itself // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1965. V. 46. P. 213–284.
- [2] В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
- [3] V. I. Arnold, B. A. Khesin. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer-Verlag, 1997. (Appl. Math. Sci. V. 125.)
- [4] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko. Long-time averaged Euler and Navier–Stokes equations for rotating fluids // Adv. Ser. Nonlinear Dynam. 1995. V. 7. P. 145–157.
- [5] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko. Global splitting, integrability and regularity of 3D Euler and Navier–Stokes equations for uniformly rotating fluids // European J. Mech. B Fluids. 1996. V. 15. №3. P. 291–300.
- [6] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko. Regularity and integrability of 3D Euler and Navier–Stokes equations for rotating fluids // Asymptot. Anal. 1997. V. 15. P. 103–150.
- [7] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko. Global regularity of 3D rotating Navier–Stokes equations for resonant domains // Indiana Univ. Math. J. 1999. V. 48. №3. P. 1133–1176.
- [8] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko. 3D Navier–Stokes and Euler equations with initial data characterized by uniformly large vorticity // Indiana Univ. Math. J. Special Issue. 2001. V. 50. P. 1–35.
- [9] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko. Fast singular oscillating limits of stably stratified 3D Euler and Navier–Stokes equations and ageostrophic wave fronts // Large-Scale Atmosphere–Ocean Dynamics. V. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. P. 126–201.
- [10] C. Bardos, F. Golse, A. Mahalov, B. Nicolaenko. Long-time regularity of 3D Euler equations with initial data characterized by uniformly large vorticity in cylindrical domains 2002 (to appear).
- [11] A. S. Besicovitch. Almost Periodic Functions. New York: Dover, 1955.
- [12] Э. Б. Быховский. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы // Вестник ЛГУ. 1957. Т. 13. С. 50–66.
- [13] Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // [29]. С. 5–36.
- [14] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. №6. P. 771–831.
- [15] E. Cartan. Sur les petites oscillations d’une masse fluid // Bull. Sci. Math. 1922. V. 46. P. 317–352; 356–369.
- [16] Y. Choquet-Bruhat. Ondes asymptotiques et approchées pour les systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires // J. Math. Pures Appl. (9). 1969. V. 48. P. 117–158.
- [17] C. Corduneanu. Almost Periodic Functions. New York: Wiley-Interscience, 1968.
- [18] G. Duvaut, J. L. Lions. The Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
- [19] C. Foiaş. Statistical study of the Navier–Stokes equations. I, II // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1972–1973. V. 48. P. 219–348; V. 49. P. 9–123.
- [20] K. Friedrichs. Differential forms on Riemannian manifolds // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. №2. P. 551–590.
- [21] J. K. Hunter, J. Keller. Weakly nonlinear high frequency waves // Comm. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. №5. P. 547–569.
- [22] J. L. Joly, G. Métivier, J. Rauch. Resonant one-dimensional nonlinear geometric optics // J. Funct. Anal. 1993. V. 114. №1. P. 106–231.
- [23] J. L. Joly, G. Métivier, J. Rauch. Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves // Duke Math. J. 1993. V. 70. №2. P. 373–404.
- [24] T. Kato. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$ // J. Funct. Anal. 1972. V. 9. P. 296–305.
- [25] А. А. Киселев, О. А. Ладыженская. О существовании и единственности решения для нестационарной задачи вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. №5. С. 665–680.

- [26] N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Basel: Birkhäuser, 2001. (Oper. Theory Adv. Appl. V. 128.)
- [27] О. А. Ладыженская. Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных // Докл. АН СССР 1958. Т. 123. №3. С. 427–429.
- [28] О. А. Ladyženskaya. Solution “in the large” of the non-stationary boundary value problem for the Navier–Stokes system with two space variable // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. №3. P. 427–433.
- [29] О. А. Ладыженская (ред.). Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. (Труды МИАН. Т. 59.)
- [30] О. А. Ладыженская. Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье–Стокса при наличии осевой симметрии // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 155–177.
- [31] О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
- [32] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // [29]. С. 115–173.
- [33] A. Mahalov, S. Leibovich, E. S. Titi. Invariant helical subspaces for the Navier–Stokes equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1990. V. 112. №3. P. 193–222.
- [34] H. Poincaré. Sur la précession des corps déformables // Bull. Astron. 1910. V. 27. P. 321–356.
- [35] S. Schochet. Resonant nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws // J. Differential Equations. 1994. V. 113. №2. P. 473–504.
- [36] S. Schochet. Fast singular limits of hyperbolic PDE's // J. Differential Equations. 1994. V. 114. №2. P. 476–512.
- [37] S. Smale. Mathematical problems for the next century // Math. Intelligencer. 1998. V. 20. №2. P. 7–15.
- [38] С. Л. Соболев. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. №1. С. 3–50.
- [39] В. А. Солонников. Переопределенные эллиптические краевые задачи // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1971. Т. 21. С. 112–158.
- [40] И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [41] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков. Трансляционно однородные статистические решения и индивидуальные решения с бесконечной энергией системы уравнений Навье–Стокса // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. №5. С. 1005–1031, 1213.
- [42] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980.