Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Серёгин, О локальной регулярности подходящих
слабых решений уравнений Навье–Стокса, *УМН*, 2007,
том 62, выпуск 3, 149–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:18:33

УДК 517

О локальной регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса

Г. А. Серёгин

Обсуждается класс достаточных условий локальной регулярности подходящих слабых решений нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса. Соответствующие результаты формулируются в терминах функционалов, инвариантных относительно масштабного преобразования уравнений Навье–Стокса. Хорошо известное условие Каффарелли–Кона–Ниренберга содержится в этом классе как частный случай.

Библиография: 14 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение и основной результат	149
§ 2. Оценки подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса	153
§ 3. Доказательство теоремы 1.4	154
§ 4. Дополнение	161
Список литературы	168

§ 1. Введение и основной результат

В представленной работе изучается гладкость некоторого класса слабых решений нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v - \Delta v = -\nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (1.1)$$

В нашей постановке они рассматриваются в единичном пространственно-временном цилиндре $Q = B \times]-1, 0[$, где B – единичный шар в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат. Как обычно, через v и p обозначены поле скоростей и поле давления соответственно. Задается следующий вопрос. Каковы минимальные условия, обеспечивающие регулярность поля скоростей v в центре $z = (x, t) = (0, 0) = 0$ пространственно-временных координат? По определению поле v регулярно в точке $z = 0$, если существует число $r \in]0, 1]$ такое, что функция v непрерывна по Гёльдеру в замыкании пространственно-временного цилиндра $Q(r) = B(r) \times]-r^2, 0[$. Здесь $B(r)$ – шар радиуса r с центром в начале координат, так что $B = B(1)$. Принятое определение было введено

Работа выполнена при поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00941-а).

О. А. Ладыженской и автором, см. [1], и немного отличается от наиболее популярного определения, данного Л. Каффарелли, Р.-В. Коном и Л. Ниренбергом в их знаменитой статье [2].

Наш интерес к упомянутой выше проблеме связан с важным наблюдением Жана Лерэ, сделанным в его замечательной работе [3]. Ж. Лерэ доказал единственность гладких решений в классе турбулентных решений, которые также называются слабыми решениями Лерэ–Хопфа. Точные определения можно найти в статьях [3] и, например, [1], [4]. Отметим лишь, что непрерывность по Гёльдеру и линейная теория обеспечивают регулярность турбулентных решений, гарантирующую их единственность в классе слабых решений начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса.

Мы ограничимся анализом так называемых подходящих слабых решений, также введенных в [2]. В представленной работе определение подходящих слабых решений дается в редакции Ф.-Х. Лина (см. [5], а также [1] в связи с обсуждением других определений).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Скажем, что пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q , если выполнены следующие требования:

$$v \in L_{2,\infty}(Q) \cap W_2^{1,0}(Q), \quad p \in L_{\frac{3}{2}}(Q); \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} &\text{уравнения Навье–Стокса удовлетворяются в } Q \\ &\text{в смысле распределений;} \end{aligned} \quad (1.3)$$

для п.в. $t \in]-1, 0[$ локальное энергетическое неравенство

$$\begin{aligned} &\int_B \varphi(x, t) |v(x, t)|^2 dx + 2 \int_{-1}^t \int_B \varphi |\nabla v|^2 dx dt' \\ &\leq \int_{-1}^t \int_B (|v|^2 (\Delta \varphi + \partial_t \varphi) + v \cdot \varphi (|v|^2 + 2p)) dx dt' \end{aligned} \quad (1.4)$$

верно для всех неотрицательных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности параболической границы $\partial'Q$ цилиндра Q .

При формулировке определения 1.1 были использованы следующие обозначения:

$$L_{m,n}(Q) = L_n(-1, 0; L_m(B)), \quad W_2^{1,0}(Q) = L_2(-1, 0; W_2^1(B)),$$

где $L_m(B)$ и $W_m^1(B)$ – обычные пространства Лебега и Соболева соответственно.

Коротко прокомментируем определение 1.1. Его существенной частью является локальное энергетическое неравенство (1.4). К сожалению, неизвестно, всякое ли слабое решение Лерэ–Хопфа начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса удовлетворяет локальному энергетическому неравенству, но по крайней мере одно из них этим свойством обладает. Более того, в случае локальной (по времени) сильной разрешимости начально-краевой задачи ее решение принадлежит классу подходящих слабых решений по крайней мере вплоть до момента появления первой сингулярности. Условие (1.2) на давление p мотивировано линейной теорией. В этом смысле оно верно для любого слабого решения Лерэ–Хопфа, если данные начально-краевой задачи не слишком плохие. Более того, класс для поля давления можно менять. Пространство $L_{\frac{3}{2}}$ кажется наиболее удобным в исследованиях. Более детальное обсуждение определения подходящих слабых решений имеется в статье [1].

Известно, что система (1.1) инвариантна по отношению к масштабному преобразованию

$$v^\lambda(x, t) = \lambda v(\lambda x, \lambda^2 t), \quad p^\lambda(x, t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Назовем его масштабным преобразованием уравнений Навье–Стокса или просто натуральным масштабным преобразованием.

В теории локальной регулярности функционалы, инвариантные по отношению к натуральному масштабному преобразованию, играют очень важную роль. Ниже приводится список некоторых из них:

$$\begin{aligned} A(r) &= \operatorname{ess\,sup}_{-r^2 < t < 0} \frac{1}{r} \int_{B(r)} |v(x, t)|^2 dx, & E(r) &= \frac{1}{r} \int_{Q(r)} |\nabla v|^2 dz, \\ C(r) &= \frac{1}{r^2} \int_{Q(r)} |v|^3 dz, & H(r) &= \frac{1}{r^3} \int_{Q(r)} |v|^2 dz, \\ D_0(r) &= \frac{1}{r^2} \int_{Q(r)} |p - [p]_{B(r)}|^{\frac{3}{2}} dz, \end{aligned}$$

где

$$[p]_{B(r)}(t) = \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(r)} p(x, t) dx.$$

Поясним, в каком смысле понимается инвариантность, например, функционала E :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_{Q(r)} |\nabla_y v(y, s)|^2 dy ds &= \frac{1}{r/\lambda} \int_{Q(r/\lambda)} |\nabla_x v^\lambda(x, t)|^2 dx dt, \\ y &= \lambda x, \quad s = \lambda^2 t. \end{aligned}$$

Список инвариантных функционалов может быть продолжен. Например, норма $M_{s,l}(r) = \|v\|_{L_{s,l}(Q(r))}$ инвариантна по отношению к натуральному масштабному преобразованию, если $3/s + 2/l = 1$.

Большинство результатов в теории локальной регулярности формулируются при помощи упомянутых выше функционалов и имеют вид условий так называемой ε -регулярности. Типичное условие ε -регулярности гласит: если какой-либо функционал, инвариантный относительно натурального масштабного преобразования, достаточно мал, то пространственно-временное начало координат есть регулярная точка поля скоростей v . Оно не является абсолютно строгим утверждением, но очень хорошо отражает смысл теории ε -регулярности. Например, знаменитое условие Каффарелли–Кона–Ниренберга может быть сформулировано следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Существует универсальная постоянная ε_0 такая, что если

$$\sup_{0 < r \leq 1} E(r) < \varepsilon_0, \tag{1.5}$$

то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

Еще одним важным примером является локальная версия условия Ладыженской–Проди–Серрина (ЛПС-условия), доказанная Дж. Серрином и М. Струвэ в статьях [6] и [7]. В нашем случае она формулируется так:

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Предположим, что числа s и l удовлетворяют условиям

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{l} = 1, \quad 3 \leq s \leq +\infty, \quad 2 \leq l \leq +\infty.$$

Существует положительная постоянная $\bar{\varepsilon}_0$, зависящая только от s и l и такая, что если

$$M_{s,l}(1) = \sup_{0 < r \leq 1} M_{s,l}(r) < \bar{\varepsilon}_0,$$

то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

Другие примеры можно найти, например, в статье [4].

Если мы верим в гладкость подходящих слабых решений, то было бы естественно попытаться освободиться от условия малости инвариантных функционалов и показать, что для регулярности достаточно их ограниченности. В ряде случаев это очевидно. Например, в случае ЛПС-условия, если $s > 3$, ограниченность нормы $M_{s,l}(1)$, вместе с абсолютной непрерывностью интеграла Лебега и натуральным масштабным преобразованием, позволяет свести общий случай к частному, в котором функционал $M_{s,l}(1)$ достаточно мал. В предельном случае $s = 3$ и $l = +\infty$ упомянутая выше редукция намного деликатней и основана на результатах по единственности назад для оператора теплопроводности с переменными младшими членами, см. [8] и [9]. Для функционалов $A(r)$, $C(r)$ и $E(r)$ эта проблема открыта, т.е. неизвестно, влечет их ограниченность регулярность или нет.

Введем дополнительные обозначения

$$G = \min \left\{ \limsup_{r \rightarrow 0} E(r), \limsup_{r \rightarrow 0} C(r), \limsup_{r \rightarrow 0} A(r) \right\},$$

$$g = \min \left\{ \liminf_{r \rightarrow 0} E(r), \liminf_{r \rightarrow 0} C(r), \liminf_{r \rightarrow 0} A(r), \liminf_{r \rightarrow 0} H(r), \liminf_{r \rightarrow 0} D_0(r) \right\}.$$

Основной результат статьи заключается в следующем.

ТЕОРЕМА 1.4. Допустим, что пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Для любого $M > 0$ найдется положительное число $\varepsilon(M)$ со следующим свойством: если $G < M$ и $g < \varepsilon(M)$, то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

Обсудим некоторые простые следствия теоремы 1.4. Например, имеет место следующее обобщение теоремы 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Допустим, что пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . По заданному числу $M > 0$ определим число $\varepsilon(M)$ из теоремы 1.4. Если для некоторого числа $M > 0$ выполнены два условия $\limsup_{r \rightarrow 0} E(r) < M$ и $\liminf_{r \rightarrow 0} E(r) < \varepsilon(M)$, то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

Для того чтобы вывести теорему 1.2 из следствия 1.5, достаточно положить $M = 1$ и $\varepsilon_0 = \min\{1, \varepsilon(1)\}$. Еще одно прямое следствие теоремы 1.4 может быть сформулировано так:

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Допустим, что пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Если $G < +\infty$ и $g = 0$, то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

Конечно, имеются и другие версии теоремы 1.4. Например, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.7. *Допустим, что пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Для всякого $M > 0$ существует положительное число $\hat{\varepsilon}(M)$, обладающее следующим свойством. Пусть $G < M$ и*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} E_3(r) < \hat{\varepsilon}(M),$$

где

$$E_3(r) = \frac{1}{r} \int_{Q(r)} |v_{,3}|^2 dz, \quad v_{,3} = \frac{\partial v}{\partial x_3}.$$

Тогда $z = 0$ есть регулярная точка для v .

§ 2. Оценки подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса

В этом параграфе будет представлен список основных оценок подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса в Q . Первая из них есть следствие мультипликативных неравенств и имеет вид

$$C(r) \leq c \left[\left(\frac{\varrho}{r} \right)^3 A^{\frac{3}{4}}(\varrho) E^{\frac{3}{4}}(\varrho) + \left(\frac{r}{\varrho} \right)^3 A^{\frac{3}{2}}(\varrho) \right] \quad (2.1)$$

для всех $0 < r \leq \varrho \leq 1$. Здесь и далее через c обозначаются все положительные абсолютные постоянные. Доказательство (2.1) имеется, например, в [1].

Верны два следствия локального энергетического неравенства:

$$A(R/2) + E(R/2) \leq c [C^{\frac{2}{3}}(R) + C(R) + C^{\frac{1}{3}}(R) D_0^{\frac{2}{3}}(R)] \quad (2.2)$$

и

$$A(R/2) + E(R/2) \leq c [C^{\frac{2}{3}}(R) + C^{\frac{1}{3}}(R) D_0^{\frac{2}{3}}(R) + A^{\frac{1}{2}}(R) C^{\frac{2}{3}}(R) E^{\frac{1}{2}}(R)] \quad (2.3)$$

для всех $0 < R \leq 1$. Соотношение (2.2) непосредственно следует из локального энергетического неравенства, а доказательство (2.3) можно найти в [1].

Известны также три версии оценки убывания для давления:

$$D_0(r) \leq c \left[\left(\frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(\varrho) + \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 C(\varrho) \right], \quad (2.4)$$

или

$$D_0(r) \leq c \left[\left(\frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(\varrho) + \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 A^{\frac{1}{2}}(\varrho) E(\varrho) \right], \quad (2.5)$$

или

$$D_0(r) \leq c \left[\left(\frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(\varrho) + \left(\frac{\varrho}{r} \right)^3 A^{\frac{3}{4}}(\varrho) E^{\frac{3}{4}}(\varrho) \right]. \quad (2.6)$$

Неравенства (2.4)–(2.6) выполнены для всех $0 < r \leq \varrho \leq 1$. Оценка (2.4) доказана в [10], а неравенства (2.5) и (2.6) обсуждены в [11].

Следующая лемма показывает, что если одна из величин $\sup_{0 < r \leq 1} E(r)$, $\sup_{0 < r \leq 1} C(r)$ или $\sup_{0 < r \leq 1} A(r)$ ограничена, то и все остальные величины будут ограниченными.

ЛЕММА 2.1. *Предположим, что пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Верны следующие утверждения.*

а) Пусть

$$\sup_{0 < r \leq 1} E(r) = E_0 < +\infty. \quad (2.7)$$

Тогда найдется положительная постоянная d , зависящая только от E_0 и такая, что

$$A^{\frac{3}{2}}(r) + C(r) + D_0^2(r) \leq d(E_0)(r^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{3}{2}}(1) + D_0^2(1)) + 1) \quad (2.8)$$

для всех $0 < r \leq 1/4$.

б) Пусть

$$\sup_{0 < r \leq 1} C(r) = C_0 < +\infty. \quad (2.9)$$

Тогда

$$A(r) + D_0(r) + E(r) \leq c(r^2 D_0(1) + C_0 + C_0^{\frac{2}{3}}) \quad (2.10)$$

для всех $0 < r \leq 1/2$.

с) Пусть

$$\sup_{0 < r \leq 1} A(r) = A_0 < +\infty. \quad (2.11)$$

Тогда найдется положительная постоянная e , зависящая только от A_0 и такая, что

$$C^{\frac{4}{3}}(r) + D_0(r) + E(r) \leq e(A_0)(r^2(D_0(1) + E(1)) + 1) \quad (2.12)$$

для всех $0 < r \leq 1/2$.

Доказательство леммы 2.1 базируется на оценках (2.1)–(2.6) и приведено в [11], см. также [12].

§ 3. Доказательство теоремы 1.4

Ключевой частью доказательства теоремы 1.4 является следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Для любого $M > 0$ существует положительное число $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{10}(M)$ со следующим свойством. Если*

$$\sup_{0 < r \leq 1} E(r) = E_0 \leq M \quad (3.1)$$

и

$$g_{r_*} = \min\{E(r_*), A(r_*), C(r_*), H(r_*), D_0(r_*)\} < \varepsilon_{10}(M) \quad (3.2)$$

для некоторого числа $r_* \in]0, \min\{1/4, (A^{\frac{3}{2}}(1) + D_0^2(1))^{-2}\}[$, то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение предложения ложно. Тогда найдутся положительное число M и последовательность подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса в Q такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие два неравенства:

$$E(v^n, r) = \frac{1}{r} \int_{Q(r)} |\nabla v^n|^2 dz \leq M \quad (3.3)$$

для всех $0 < r \leq 1$ и

$$g_{r_n}(v^n, p^n) = \min\{E(v^n, r_n), A(v^n, r_n), C(v^n, r_n), H(v^n, r_n), D_0(p^n, r_n)\} \leq \frac{1}{n} \quad (3.4)$$

для некоторого

$$r_n \in]0, \min\{1/4, (A^{\frac{3}{2}}(v^n, 1) + D_0^2(p^n, 1))^{-2}\}[, \quad (3.5)$$

но $z = 0$ есть сингулярная точка для v^n . Здесь были использованы дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} A(v^n, r) &= \operatorname{ess\,sup}_{-r^2 < t < 0} \frac{1}{r} \int_{B(r)} |v^n(x, t)|^2 dx, & C(v^n, r) &= \frac{1}{r^2} \int_{Q(r)} |v^n|^3 dz, \\ H(v^n, r) &= \frac{1}{r^3} \int_{Q(r)} |v^n|^2 dz, & D_0(p^n, r) &= \frac{1}{r^2} \int_{Q(r)} |p^n - [p^n]_{B(r)}|^{\frac{3}{2}} dz. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $z = 0$ есть сингулярная точка для v^n , существует абсолютная положительная постоянная ε такая, что

$$C(v^n, r) + D_0(p^n, r) \geq \varepsilon > 0 \quad (3.6)$$

для всех $0 < r \leq 1$, см., например, [1]. Подчеркнем, что (3.6) выполняется для любого натурального числа n .

Из леммы 2.1 и из (3.5) выводим оценку

$$\begin{aligned} &A^{\frac{3}{2}}(v^n, r) + C(v^n, r) + D_0^2(p^n, r) \\ &\leq d(M) \left[\left(\frac{r}{r_n} \right)^{\frac{1}{2}} r_n^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{3}{2}}(v^n, 1) + D_0^2(p^n, 1)) + 1 \right] \leq d_0(M), \end{aligned} \quad (3.7)$$

верную для всех $r \in]0, r_n[$.

Сделаем теперь масштабное преобразование функций v^n и p^n так, чтобы

$$u^n(y, s) = r_n v^n(r_n y, r_n^2 s), \quad q^n(y, s) = r_n^2 p^n(r_n y, r_n^2 s)$$

для $(y, s) \in Q$. В силу инвариантности функционалов и уравнений по отношению к натуральному масштабному преобразованию можно утверждать, что:

$$\begin{aligned} &\text{пара } u^n \text{ и } q^n \text{ есть подходящее слабое решение} \\ &\text{уравнений Навье–Стокса в } Q \end{aligned} \quad (3.8)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$;

$$E(u^n, r) \leq M \quad (3.9)$$

для всех $0 < r \leq 1$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$;

$$g_{r_n}(v^n, p^n) = g_1(u^n, q^n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty; \quad (3.10)$$

$$C(u^n, r) + D_0(q^n, r) \geq \varepsilon > 0 \quad (3.11)$$

для всех $0 < r \leq 1$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$;

$$A^{\frac{3}{2}}(u^n, r) + C(u^n, r) + D_0^2(q^n, r) \leq d_0(M) \quad (3.12)$$

для всех $0 < r \leq 1$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь n стремится к $+\infty$. Для того чтобы перейти к пределу в нелинейных членах, нужно доказать сильную компактность. С этой целью оценим слабую производную v по t , используя уравнения Навье–Стокса, стандартным образом. В результате будем иметь оценку

$$\begin{aligned} \int_Q \partial_t u^n \cdot w \, dz &= \int_Q (u^n \otimes u^n : \nabla w - \nabla u^n : \nabla w + (q^n - [q^n]_B) \operatorname{div} w) \, dz \\ &\leq \left(\int_Q |u^n|^3 \, dz \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_Q |\nabla w|^3 \, dz \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\int_Q |\nabla u^n|^2 \, dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |\nabla w|^2 \, dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_Q |q^n - [q^n]_B|^{\frac{3}{2}} \, dz \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_Q |\operatorname{div} w|^3 \, dz \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq c(C^{\frac{2}{3}}(u^n, 1) + D_0^{\frac{2}{3}}(q^n, 1) + E^{\frac{1}{2}}(u^n, 1)) \left(\int_Q |\nabla w|^3 \, dz \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq d_1(M) \left(\int_Q |\nabla w|^3 \, dz \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

верную для любых $w \in C_0^\infty(Q)$. По плотности она распространяется на любые поля $w \in L_3(-1, 0; \overset{\circ}{W}_3^1(B))$. Итак, справедливо соотношение

$$\|\partial_t u^n\|_{L_{3/2}(-1, 0; W_{3/2}^{-1}(B))} \leq d_1(M). \quad (3.13)$$

Еще одна оценка выводится из известного мультипликативного неравенства и имеет вид

$$\int_Q |u^n|^{\frac{10}{3}} \, dz \leq d_2(M). \quad (3.14)$$

Далее, используя известные аргументы компактности и выбирая, если необходимо, подпоследовательность, получаем

$$\begin{aligned} u^n &\overset{*}{\rightharpoonup} u && \text{в } L_{2,\infty}(Q), \\ \nabla u^n &\rightharpoonup \nabla u && \text{в } L_2(Q), \\ u^n &\rightarrow u && \text{в } L_3(Q), \\ q^n - [q^n]_B &\rightarrow q && \text{в } L_{\frac{3}{2}}(Q). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Более того, пара предельных функций u и q есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q и

$$A^{\frac{3}{2}}(u, r) + C(u, r) + D_0^2(q, r) \leq d_0(M) \quad (3.16)$$

для всех $0 < r \leq 1$.

Теперь посмотрим, что вытекает из (3.10). Нетрудно заметить, что существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что либо

$$E(u^{n_k}, 1) \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

либо

$$C(u^{n_k}, 1) \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

либо

$$A(u^{n_k}, 1) \rightarrow 0, \quad (3.19)$$

либо

$$H(u^{n_k}, 1) \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

либо

$$D_0(q^{n_k}, 1) \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

при $k \rightarrow +\infty$.

Обсудим каждый случай отдельно, начиная с (3.17). Согласно (3.17), имеем

$$\nabla u^{n_k} \rightarrow 0 \quad \text{в } L_2(Q) \quad (3.22)$$

и $\nabla u = 0$ в Q . Следовательно, $E(u, r) = 0$ для всех $r \in]0, 1]$, а, в силу теоремы 1.2, $z = 0$ есть регулярная точка для u , и, в частности, найдется число $0 < r_1 \leq 1$ такое, что

$$\sup_{z \in \overline{Q}(r_1)} |u(z)| \leq d_3(M). \quad (3.23)$$

Переходя к пределу в (3.11), приходим к неравенству

$$C(u, r) + \limsup_{k \rightarrow \infty} D_0(q^{n_k}, r) \geq \varepsilon \quad (3.24)$$

для всех $0 < r \leq 1$. Благодаря (3.23) из (3.24) следует, что

$$cd_3^3(M)r^3 + \limsup_{k \rightarrow \infty} D_0(q^{n_k}, r) \geq \varepsilon \quad (3.25)$$

для всех $0 < r \leq r_1$.

Функции u^{n_k} и q^{n_k} удовлетворяют оценке убывания (2.5). Тогда, согласно (3.12), имеем

$$\begin{aligned} D_0(q^{n_k}, r) &\leq c \left[\left(\frac{r}{1} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(q^{n_k}, 1) + \left(\frac{1}{r} \right)^2 A^{\frac{1}{2}}(u^{n_k}, 1) E(u^{n_k}, 1) \right] \\ &\leq d_4(M) \left[r^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{1}{r} \right)^2 E(u^{n_k}, 1) \right] \end{aligned}$$

для всех $0 < r \leq 1$. Остается перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ и, в силу (3.22), получить неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} D_0(q^{n_k}, r) \leq d_4(M)r^{\frac{5}{2}},$$

справедливое для всех $0 < r \leq 1$. Последняя оценка вместе с (3.25) дает нам соотношение

$$cd_3^3(M)r^3 + d_4(M)r^{\frac{5}{2}} \geq \varepsilon$$

для всех $0 < r \leq r_1$, которое неверно для достаточно малых r . Итак, случай (3.17) невозможен.

Теперь допустим, что реализуется случай (3.18). Здесь мы воспользуемся неравенством (3.12) и оценкой убывания (2.4), которые приводят к соотношению

$$D_0(q^{n_k}, r) \leq c \left[r^{\frac{5}{2}} D_0(q^{n_k}, 1) + \frac{1}{r^2} C(u^{n_k}, 1) \right] \leq d_5(M) \left[r^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{r^2} C(u^{n_k}, 1) \right], \quad (3.26)$$

верному для всех $0 < r \leq 1$. Но из (3.11) следует, что

$$\varepsilon \leq d_5(M) \left[r^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{r^2} C(u^{n_k}, 1) \right] + C(u^{n_k}, r), \quad r \in]0, 1]. \quad (3.27)$$

Принимая во внимание (3.18) и переходя в (3.27) к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получаем неравенство

$$\varepsilon \leq d_5(M) r^{\frac{5}{2}}, \quad r \in]0, 1],$$

которое нарушается для достаточно малых r . Итак, случай (3.18) также исключен.

Случаи (3.19) и (3.20) могут быть сведены к предыдущему. В самом деле, для них предельное поле скоростей тривиально: $u = 0$. Итак, $C(u^{n_k}, r) \rightarrow C(u, r) = 0$ при $k \rightarrow +\infty$ для всех $0 < r \leq 1$. Повторяя оценки (3.26) и (3.27), заключаем, что случаи (3.19) и (3.20) также невозможны.

Остается рассмотреть случай (3.21), в котором $q^{n_k} - [q^{n_k}] \rightarrow 0$ в $L_{\frac{3}{2}}(Q)$ при $k \rightarrow +\infty$. Поскольку

$$0 \leq D_0(q^{n_k}, r) \leq \frac{c}{r^2} D_0(q^{n_k}, 1) \rightarrow 0,$$

находим, что

$$C(u, r) \geq \varepsilon > 0 \quad (3.28)$$

для всех $0 < r \leq 1$. Опишем свойства предельной функции u :

- (а) $u \in L_{2,\infty}(Q) \cap W_2^{1,0}(Q)$;
- (б) функция u удовлетворяет системе уравнений

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad (3.29)$$

в Q в смысле распределений;

- (с) для п.в. $t \in]-1, 0[$ функция u удовлетворяет локальному энергетическому неравенству

$$\begin{aligned} & \int_B \varphi(x, t) |u(x, t)|^2 dx + 2 \int_{-1}^t \int_B \varphi |\nabla u|^2 dx dt' \\ & \leq \int_{-1}^t \int_B (|u|^2 (\Delta \varphi + \partial_t \varphi) + |u|^2 u \cdot \nabla \varphi) dx dt' \end{aligned} \quad (3.30)$$

для всех неотрицательных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности параболической границы цилиндра Q .

Как показано в дополнении (§ 4), функция u , имеющая свойства (а)–(с), оказывается на самом деле более гладкой. Точнее, u непрерывна по Гёльдеру, скажем, в $\bar{Q}(1/4)$ и, в частности,

$$\sup_{z \in \bar{Q}(1/4)} |u(z)| \leq d_6(M),$$

а тогда из (3.28) следует, что

$$cd_6^3(M) r^3 \geq \varepsilon$$

для всех $0 < r \leq 1/4$, и это также неверно. Итак, случай (3.21) исключен. Так как наши наблюдения противоречат (3.10), заключаем, что утверждение предложения 3.1 верно. Предложение 3.1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Если

$$\limsup_{r \rightarrow 0} E(r) < \frac{1}{2}m = M \quad (3.31)$$

и

$$g < \frac{1}{2}\varepsilon_{10}(m) = \varepsilon_1(M), \quad (3.32)$$

то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (3.31) можно найти число $r_1 \in]0, 1]$ такое, что

$$\sup_{0 < r \leq r_1} E(r) \leq m,$$

и масштабировать v и p так, чтобы

$$u(x, t) = r_1 v(r_1 x, r_1^2 t), \quad q(x, t) = r_1^2 p(r_1 x, r_1^2 t), \quad |x| < 1, \quad -1 < t < 0.$$

Пара u и q также будет подходящим слабым решением уравнений Навье–Стокса в Q , и для нее имеют место два неравенства:

$$\sup_{0 < r \leq 1} E(u, r) \leq m$$

и

$$g(u, q) < \frac{1}{2}\varepsilon_{10}(m). \quad (3.33)$$

Согласно неравенству (3.33) среди величин $\liminf_{r \rightarrow 0} E(u, r)$, $\liminf_{r \rightarrow 0} A(u, r)$, $\liminf_{r \rightarrow 0} C(u, r)$, $\liminf_{r \rightarrow 0} H(u, r)$ и $\liminf_{r \rightarrow 0} D_0(q, r)$ должна быть по крайней мере одна величина, которая меньше $(1/2)\varepsilon_{10}(m)$. Пусть, например, это будет $\liminf_{r \rightarrow 0} E(u, r)$. Затем мы можем найти число $r_0 \in]0, \min\{1/4, (A^{\frac{3}{2}}(u, 1) + D_0^2(u, 1))^{-2}\}]$ такое, что

$$E(u, r_0) < \frac{3}{4}\varepsilon_{10}(m)$$

и, таким образом,

$$g_{r_0}(u, q) < \varepsilon_{10}(m).$$

По предложению 3.1 точка $z = 0$ есть регулярная точка для u и, следовательно, она является регулярной точкой для v . Предложение 3.2 доказано.

Совершенно аналогично могут быть доказаны следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q .

Для любого $M > 0$ найдется положительное число $\varepsilon_2(M)$ такое, что если

$$\limsup_{r \rightarrow 0} A(r) < M$$

и

$$g < \varepsilon_2(M),$$

то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Для любого $M > 0$ найдется положительное число $\varepsilon_3(M)$ такое, что если

$$\limsup_{r \rightarrow 0} C(r) < M$$

и

$$g < \varepsilon_3(M),$$

то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Утверждение теоремы есть прямое следствие предложений 3.2–3.4. Теорема 1.4 доказана.

Прокомментируем доказательство теоремы 1.7. Его главной частью является аналог предложения 3.1, который может быть сформулирован следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Для любого $M > 0$ найдется положительное число $\hat{\varepsilon}_{10} = \hat{\varepsilon}_{10}(M)$, обладающее следующим свойством. Если

$$\sup_{0 < r \leq 1} E(r) = E_0 \leq M$$

и

$$E_3(r_*) < \hat{\varepsilon}_{10}(M)$$

для некоторого $r_* \in]0, \min\{1/4, (A^{\frac{3}{2}}(1) + D_0^2(1))^{-2}\}[$, то $z = 0$ есть регулярная точка для v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяем доказательство предложения 3.1 со следующими модификациями. Вместо (3.4) имеем

$$E_3(v^n, r_n) = \frac{1}{r_n} \int_{Q(r_n)} |v_{,3}^n|^2 dz \leq \frac{1}{n}.$$

Затем (3.10) заменяется на

$$E_3(u^{n_k}, 1) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Последнее влечет

$$u_{,3}^{n_k} \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L_2(Q),$$

и, таким образом, $u_{,3} = 0$ в Q , что дает возможность ввести новую функцию $U(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$, удовлетворяющую неравенствам

$$\begin{aligned} E(u, r) &\geq \frac{1}{r} \int_{-r^2}^0 dt \int_{-r/\sqrt{2}}^{r/\sqrt{2}} dx_3 \int_{x_1^2 + x_2^2 < r^2/2} |\nabla_2 U|^2 dx_1 dx_2 \\ &= \sqrt{2} \int_{-r^2}^0 \int_{x_1^2 + x_2^2 < r^2/2} |\nabla_2 U|^2 dx_1 dx_2 dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} E(u, r/\sqrt{2}) \end{aligned}$$

для любого $0 < r \leq 1$. Здесь ∇_2 есть двумерный градиент.

Итак, можно утверждать, что

$$\int_{-1}^0 \int_{x_1^2 + x_2^2 < 1/2} |\nabla_2 U|^2 dx_1 dx_2 dt \leq E(u, 1) < +\infty$$

и, таким образом,

$$\int_{-r^2}^0 \int_{x_1^2+x_2^2 < r^2/2} |\nabla_2 U|^2 dx_1 dx_2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Это означает, что $E(u, r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, и, по теореме 1.2, $z = 0$ есть регулярная точка для u . Итак, мы показали справедливость соотношений (3.23) и (3.25).

Далее действуем следующим образом. В силу (2.4) имеем

$$D_0(q^{n_k}, r) \leq c \left[\left(\frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(q^{n_k}, \varrho) + \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 C(u^{n_k}, \rho) \right]$$

для всех $0 < r < \varrho \leq 1$. Благодаря (3.12) предыдущее неравенство может быть записано в новом виде

$$D_0(q^{n_k}, r) \leq \tilde{cd}_0(M) \left[\left(\frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 C(u^{n_k}, \rho) \right]$$

для всех $0 < r < \varrho \leq 1$. Переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получаем из (3.15) оценку

$$\limsup_{k \rightarrow 0} D_0(q^{n_k}, r) \leq \tilde{cd}_0(M) \left[\left(\frac{r}{\varrho} \right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 C(u, \rho) \right]$$

для всех $0 < r < \varrho \leq 1$. Полагая $\varrho = \gamma r \leq r_1$, выводим из (3.23) неравенство

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow 0} D_0(q^{n_k}, r) &\leq \tilde{cd}_0(M) [\gamma^{-\frac{5}{2}} + c\gamma^2 d_3^3(M) \gamma^3 r^3] \\ &\leq \tilde{cd}_4(M) [\gamma^{-\frac{5}{2}} + \gamma^5 r^3], \end{aligned}$$

которое верно для любых $\gamma > 1$ и для любых $r > 0$, связанных соотношением $\gamma r \leq r_1$. Итак, имеем (см. (3.25))

$$cd_3^3(M)r^3 + \tilde{cd}_4(M)\gamma^{-\frac{5}{2}} + \tilde{cd}_4(M)\gamma^5 r^3 \geq \varepsilon$$

для тех же γ и r , что и в предыдущем неравенстве. Выберем $\gamma_0(\varepsilon, M) > 1$ так, чтобы

$$\tilde{cd}_4(M)\gamma_0^{-\frac{5}{2}}(\varepsilon, M) \leq \varepsilon/4,$$

и зафиксируем его. Тогда

$$cd_3^3(M)r^3 + \tilde{cd}_4(M)\gamma_0^5(\varepsilon, M)r^3 \geq 3\varepsilon/4$$

для всех $0 < r \leq r_1/\gamma_0(\varepsilon, M)$. Последнее неравенство не выполняется для достаточно малых r . Предложение 3.5 доказано.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 1.7 такая же, как и в случае теоремы 1.4.

§ 4. Дополнение

Рассмотрим начально-краевую задачу для следующей системы линейных уравнений:

$$\partial_t v + u \cdot \nabla v - \Delta v = f \quad \text{в } Q. \quad (4.1)$$

Допустим, что неизвестная векторнозначная функция $v: Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ удовлетворяет однородным условиям на параболической границе $\partial'Q$, т.е.

$$v|_{\partial'Q} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь $u: Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ – заданные функции, подчиненные следующим условиям:

$$u \in L_2(Q), \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } Q \quad (4.3)$$

и

$$f \in L_{\frac{5}{3}}(Q). \quad (4.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функцию v называют слабым решением начально-краевой задачи (4.1), (4.2), если она удовлетворяет условиям:

$$v \in L_{2,\infty}(Q) \cap L_2(-1, 0; \overset{\circ}{W}_2^1(B)); \quad (4.5)$$

$$t \rightarrow \int_B v(x, t) \cdot w(x) dx \quad \text{непрерывна на } [-1, 0] \quad \text{для всех } w \in L_2(B); \quad (4.6)$$

$$\int_Q (-v \cdot \partial_t w - v \otimes u : \nabla w + \nabla v : \nabla w) dz = \int_Q f \cdot w dz \quad (4.7)$$

для любых $w \in C_0^\infty(Q)$;

$$\|v(\cdot, t)\|_{L_2(B)} \rightarrow 0 \quad (4.8)$$

при $t \rightarrow -1 + 0$;

$$\frac{1}{2} \int_B |v(x, t)|^2 dx + \int_{-1}^t \int_B |\nabla v|^2 dx dt' \leq \int_{-1}^t \int_B f \cdot v dx dt' \quad (4.9)$$

для всех $t \in [-1, 0]$.

ТЕОРЕМА 4.2. Допустим, что выполнены условия (4.3) и (4.4). Существует по крайней мере одно слабое решение v начально-краевой задачи (4.1), (4.2). Это решение имеет следующие дифференциальные свойства:

$$v \in L_{3,\infty}(Q) \cap L_5(Q). \quad (4.10)$$

Более того, если

$$u \in L_{\frac{10}{3}}(Q), \quad (4.11)$$

то задача (4.1), (4.2) имеет единственное слабое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с доказательства существования слабого решения. Нетрудно найти гладкие функции u^δ и f^δ со следующими свойствами:

$$\operatorname{div} u^\delta = 0, \quad u^\delta \rightarrow u \quad \text{в } L_2(Q) \quad (4.12)$$

и

$$f^\delta \rightarrow f \quad \text{в } L_{\frac{5}{3}}(Q) \quad (4.13)$$

при $\delta \rightarrow 0$. Как показано в [13] (см. также [14]), существует единственное гладкое решение v^δ начально-краевой задачи

$$\partial_t v^\delta + u^\delta \cdot \nabla v^\delta - \Delta v^\delta = f^\delta \quad \text{в } Q \quad (4.14)$$

и

$$v^\delta|_{\partial'Q} = 0. \quad (4.15)$$

ЛЕММА 4.3. Допустим, что нам даны три достаточно гладкие функции v , u и f , удовлетворяющие (4.1) и (4.2). Тогда для всех $t \in]-1, 0[$ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \partial_t \int_B |v|^2 dx + \int_B |\nabla v|^2 dx \leq c \left[\left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx + \int_B |\operatorname{div} u|^{\frac{5}{2}} dx \right) \int_B |v|^2 dx \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

и

$$\begin{aligned} \partial_t \int_B |w|^2 dx + \int_B |\nabla w|^2 dx \leq c \left[\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \left(\int_B |w|^2 dx \right)^{\frac{4}{9}} \right. \\ \left. + \int_B |\operatorname{div} u|^{\frac{5}{2}} dx \int_B |w|^2 dx \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $w = |v|^{\frac{3}{2}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая тождество (4.1) на v и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_B |v|^2 dx + \int_B |\nabla v|^2 dx = \int_B f \cdot v dx + \frac{1}{2} \int_B |v|^2 \operatorname{div} u dx = I_1 + I_2. \quad (4.18)$$

Будем теперь оценивать I_1 и I_2 . Для I_1 воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$I_1 \leq \left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{3}{5}} \left(\int_B |v|^{\frac{5}{2}} dx \right)^{\frac{2}{5}}.$$

Второй множитель в правой части последнего соотношения может быть оценен при помощи мультипликативного неравенства:

$$I_1 \leq c \left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{3}{5}} \left(\int_B |v|^2 dx \right)^{\frac{7}{20}} \left(\int_B |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{3}{20}}.$$

Далее, в силу неравенства Янга имеем

$$I_1 \leq \frac{1}{4} \int_B |\nabla v|^2 dx + c \left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{12}{17}} \left(\int_B |v|^2 dx \right)^{\frac{7}{17}}.$$

Так как $5/17 + 7/17 = 12/17$, можно применить неравенство Янга еще раз и получить

$$I_1 \leq \frac{1}{4} \int_B |\nabla v|^2 dx + c \int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \int_B |v|^2 dx + c \left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

Перейдем к оценке I_2 . Неравенство Гёльдера влечет

$$I_2 \leq \frac{1}{2} \left(\int_B |v|^{\frac{10}{3}} dx \right)^{\frac{3}{5}} \left(\int_B |\operatorname{div} u|^{\frac{5}{2}} dx \right)^{\frac{2}{5}}.$$

Далее воспользуемся мультипликативным неравенством

$$I_2 \leq c \left(\int_B |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{3}{5}} \left(\int_B |v|^2 dx \right)^{\frac{2}{5}} \left(\int_B |\operatorname{div} u|^{\frac{5}{2}} dx \right)^{\frac{2}{5}}.$$

Наконец, в силу неравенства Янга имеем

$$I_2 \leq \frac{1}{4} \int_B |\nabla v|^2 dx + c \int_B |\operatorname{div} u|^{\frac{5}{2}} dx \int_B |v|^2 dx. \quad (4.20)$$

Теперь (4.16) следует из (4.18)–(4.20).

Для того чтобы доказать вторую оценку, будем действовать следующим образом. Сначала умножаем равенство (4.1) на $|v|v$, а затем интегрируем по частям. В результате будем иметь тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \partial_t \int_B |v|^3 dx + \int_B |v|(|\nabla v|^2 + |\nabla |v||^2) dx \\ &= \int_B |v|f \cdot v dx + \frac{1}{3} \int_B |v|^3 \operatorname{div} u dx, \end{aligned}$$

которое в свою очередь влечет неравенство

$$\frac{1}{3} \partial_t \int_B |w|^2 dx + \frac{4}{9} \int_B |\nabla w|^2 dx \leq J_1 + J_2, \quad (4.21)$$

где

$$J_1 = \left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{3}{5}} \left(\int_B |w|^{\frac{10}{3}} dx \right)^{\frac{2}{5}}, \quad J_2 = \frac{1}{3} \int_B |w|^2 \operatorname{div} u dx.$$

Слагаемое J_2 оценивается так же, как и I_2 . Итак,

$$J_2 \leq \frac{1}{18} \int_B |\nabla w|^2 dx + c \int_B |\operatorname{div} u|^{\frac{5}{2}} dx \int_B |w|^2 dx. \quad (4.22)$$

При оценке J_1 можно воспользоваться мультипликативным неравенством и неравенством Янга и в результате получить

$$\begin{aligned} J_1 &\leq c \left(\int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{3}{5}} \left(\int_B |w|^2 dx \right)^{\frac{4}{15}} \left(\int_B |\nabla w|^2 dx \right)^{\frac{2}{5}} \\ &\leq \frac{1}{18} \int_B |\nabla w|^2 dx + \int_B |f|^{\frac{5}{3}} dx \left(\int_B |w|^2 dx \right)^{\frac{4}{9}}. \end{aligned}$$

Комбинируя последнюю оценку с (4.21) и (4.22), завершаем доказательство неравенства (4.17). Лемма 4.3 доказана.

Продолжая доказательство теоремы, заметим, что из леммы 4.3 и леммы Гронуолла следует, что некоторые нормы от v^δ и $w^\delta = |v^\delta|^{\frac{3}{2}}$ ограничены равномерно по δ :

$$\|v^\delta\|_{L_{3,\infty}(Q)} + \|w^\delta\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|\nabla v^\delta\|_{L_2(Q)} + \|\nabla w^\delta\|_{L_2(Q)} \leq c < +\infty. \quad (4.23)$$

Более того, согласно мультипликативному неравенству и (4.23),

$$\|v^\delta\|_{L_5(Q)} \leq c < +\infty, \quad (4.24)$$

и, таким образом,

$$\| |v^\delta| |u^\delta| \|_{L_{10/7}(Q)} \leq c < +\infty. \quad (4.25)$$

Последнее вместе с равенством (4.7) позволяет утверждать, что

$$\|\partial_t v^\delta\|_{L_{10/7}(-1,0;W_{10/7}^{-1}(B))} \leq c < +\infty. \quad (4.26)$$

Существование по крайней мере одного слабого решения начально-краевой задачи (4.1), (4.2) может быть выведено из оценок (4.23)–(4.26) более или менее стандартным методом.

Перейдем к доказательству единственности слабых решений начально-краевой задачи (4.1), (4.2) в классе слабых решений в смысле определения 4.1. Начнем с простого замечания

$$\mathring{W}_2^1(Q) \cap L_5(Q) = [C_0^\infty(Q)]_{W_2^1(Q) \cap L_5(Q)}. \quad (4.27)$$

Допустим, что v^1 – еще одно решение начально-краевой задачи (4.1), (4.2). В силу (4.11)

$$u \cdot \nabla v^1 \in L_{\frac{5}{4}}(Q). \quad (4.28)$$

Принимая во внимание (4.27) и (4.28), преобразуем тождество (4.7) к виду

$$\int_Q (-v^1 \cdot \partial_t w + (u \cdot \nabla v^1) \cdot w + \nabla v : \nabla w) dz = \int_Q f \cdot w dz \quad (4.29)$$

для любой $w \in \mathring{W}_2^1(Q) \cap L_5(Q)$.

С другой стороны, согласно первой части теоремы, имеем

$$|v| |u| \in L_2(Q) \quad (4.30)$$

и, таким образом,

$$\int_Q (-v \cdot \partial_t w - v \otimes u : \nabla w + \nabla v : \nabla w) dz = \int_Q f \cdot w dz \quad (4.31)$$

для любой $w \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in]0, 1/4[$ и выберем гладкую неотрицательную срезающую функцию χ , имеющую носитель в $] -1 + \varepsilon/2, -\varepsilon/2[$. Пусть ω_ϱ – стандартное сглаживающее ядро, и пусть

$$v_\varrho(x, t) = \int_{-1}^0 \omega_\varrho(t-s) v(x, s) ds.$$

Введем две пробные функции:

$$w = (\chi v_\varrho)_\varrho, \quad w^1 = (\chi v_\varrho^1)_\varrho.$$

Для достаточно малых ϱ они будут принадлежать следующим классам:

$$w \in \mathring{W}_2^1(Q) \cap L_5(Q), \quad w^1 \in \mathring{W}_2^1(Q). \quad (4.32)$$

Далее используем первую пробную функцию в (4.30), а затем обе в (4.31). Принимая во внимание хорошо известные свойства сглаживающего ядра, можно написать три равенства:

$$\int_Q (-v_\varrho^1 \cdot \partial_t (\chi v_\varrho) + (u \cdot \nabla v_\varrho^1)_\varrho \cdot \chi v_\varrho + \nabla v_\varrho^1 : \chi \nabla v_\varrho) dz = \int_Q f_\varrho \cdot v_\varrho dz, \quad (4.33)$$

$$\int_Q (-v_\varrho \cdot \partial_t (\chi v_\varrho^1) - (v \otimes u)_\varrho : \chi \nabla v_\varrho^1 + \nabla v_\varrho : \chi \nabla v_\varrho^1) dz = \int_Q f_\varrho \cdot v_\varrho^1 dz \quad (4.34)$$

и

$$\int_Q (-v_\varrho \cdot \partial_t(\chi v_\varrho) - (v \otimes u)_\varrho : \chi \nabla v_\varrho + \nabla v_\varrho : \chi \nabla v_\varrho) dz = \int_Q f_\varrho \cdot v_\varrho dz. \quad (4.35)$$

Складывая (4.33) и (4.34) и интегрируя сумму по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_Q (-v_\varrho \cdot v_\varrho^1 \partial_t \chi + (u \cdot \nabla v^1)_\varrho \cdot \chi v_\varrho - (v \otimes u)_\varrho : \chi \nabla v_\varrho^1 + 2\chi \nabla v_\varrho : \nabla v_\varrho^1) dz \\ = \int_Q f_\varrho \cdot (v_\varrho + v_\varrho^1) dz. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varrho \rightarrow 0$, приходим к тождеству

$$\int_Q (-v \cdot v^1 \partial_t \chi + 2\chi \nabla v : \nabla v^1) dz = \int_Q f \cdot (v + v^1) dz. \quad (4.36)$$

Рассуждаем теперь следующим образом. Принимая во внимание два свойства слабых решений (4.6) и (4.8) и выбирая подходящую срезающую функцию χ , утверждаем, что

$$\int_B v(x, t) \cdot v^1(x, t) dx + 2 \int_{-1}^t \int_B \nabla v : \nabla v^1 dx dt' = \int_{-1}^t \int_B f \cdot (v + v^1) dx dt' \quad (4.37)$$

для п.в. $t \in]-1, 0[$. Продолжая в том же духе, выводим из (4.35) еще одно равенство

$$\frac{1}{2} \int_B |v(x, t)|^2 dx + \int_{-1}^t \int_B |\nabla v|^2 dx dt' = \int_{-1}^t \int_B f \cdot v dx dt' \quad (4.38)$$

для п.в. $t \in]-1, 0[$. Но v^1 есть слабое решение и, следовательно, должно удовлетворять глобальному энергетическому неравенству (4.9)

$$\frac{1}{2} \int_B |v^1(x, t)|^2 dx + \int_{-1}^t \int_B |\nabla v^1|^2 dx dt' \leq \int_{-1}^t \int_B f \cdot v^1 dx dt' \quad (4.39)$$

для всех $t \in [-1, 0]$. Из (4.37)–(4.39) нетрудно вывести оценку

$$\frac{1}{2} \int_B |v^1(x, t) - v(x, t)|^2 dx + \int_{-1}^t \int_B |\nabla(v^1 - v)|^2 dx dt' \leq 0$$

для п.в. $t \in]-1, 0[$, которая означает, что $v^1 = v$. Теорема 4.2 доказана.

Рассмотрим сейчас пару v и p , являющуюся подходящим слабым решением уравнений Навье–Стокса в Q , см. определение 1.1. Наша цель – доказать следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Предположим, что пара v и p есть подходящее слабое решение уравнений Навье–Стокса в Q . Допустим, что p не зависит от пространственных переменных x . Тогда функция v непрерывна по Гёльдеру в $\overline{Q}(3/8)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем гладкую срезающую функцию ψ , обращающуюся в нуль в окрестности $\partial'Q$ и равную единице в $\overline{Q}(3/4)$. Пусть

$$\bar{v} = \psi v, \quad f = v \partial_t \psi - 2 \nabla v \nabla \psi - v \Delta \psi + v \cdot \nabla \psi v, \quad u = v.$$

Согласно теории мультипликативных неравенств,

$$u \in L_{\frac{10}{3}}(Q), \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (4.40)$$

Более того,

$$\bar{v} \in L_{2,\infty}(Q) \cap L_2(-1, 0; \overset{\circ}{W}_2^1(B)) \quad (4.41)$$

и

$$\int_Q (-\bar{v} \cdot \partial_t w - \bar{v} \otimes u : \nabla w + \nabla \bar{v} : \nabla w) dz = \int_Q f \cdot w dz \quad (4.42)$$

для любой $w \in C_0^\infty(Q)$.

Докажем сейчас, что $\bar{v}$ есть слабое решение начально-краевой задачи (4.1), (4.2). В силу (4.41) и (4.42) для этого необходимо проверить, что $\bar{v}$ удовлетворяет требованиям (4.6) и (4.9). Очевидно, (4.8) выполняется, поскольку $\bar{v}$ тождественно равна нулю в окрестности $t = -1$.

При проверке (4.6) заметим, что

$$\bar{v} \otimes u \in L_{\frac{5}{3}}(Q).$$

Это вместе с (4.42) дает нам оценку

$$\|\partial_t \bar{v}\|_{L_{5/3}(-1, 0; W_{5/3}^{-1}(B))} < +\infty.$$

Но тогда (4.6) следует из (4.41).

Далее, интегрируя по частям, можно доказать следующее равенство:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_B |\bar{v}(x, t)|^2 dx + 2 \int_{-1}^t \int_B |\nabla \bar{v}|^2 dx dt' - 2 \int_{-1}^t \int_B f \cdot \bar{v} dx dt' \\ &= \int_B \psi^2(x, t) |v(x, t)|^2 dx + 2 \int_{-1}^t \int_B \psi^2 |\nabla v|^2 dx dt' \\ &\quad - \int_{-1}^t \int_B (|v|^2 (\Delta \psi^2 + \partial_t \psi^2) + v \cdot \nabla \psi^2 |v|^2) dx dt'. \end{aligned}$$

Согласно условиям предложения 4.4, $I(t) \leq 0$ для п.в. $t \in]-1, 0[$. Здесь мы воспользовались тождеством

$$\int_B v \cdot \nabla \psi^2 p dx = 0.$$

Однако (4.6) позволяет утверждать, что неравенство $I(t) \leq 0$ выполняется для всех $t \in [-1, 0]$. Итак, мы показали, что $\bar{v}$ есть слабое решение начально-краевой задачи (4.1), (4.2). Тогда, согласно теореме 4.2, заключаем, что

$$\bar{v} \in L_{3,\infty}(Q)$$

и, таким образом,

$$v \in L_{3,\infty}(Q(3/4)). \quad (4.43)$$

В этом случае имеем подходящее слабое решение v и p уравнений Навье–Стокса в $Q(3/4)$, которое удовлетворяет дополнительному условию (4.43). Используем масштабное преобразование и результаты работы [9] и убеждаемся, что v непрерывна по Гёльдеру в замыкании множества $Q(3/8)$. Предложение 4.4 доказано.

Список литературы

- [1] O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, “On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **1**:4 (1999), 356–387.
- [2] L. Caffarelli, R.-V. Kohn, L. Nirenberg, “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **35**:6 (1982), 771–831.
- [3] J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace”, *Acta Math.*, **63**:1 (1934), 193–248.
- [4] G. A. Seregin, “Local regularity theory of Navier–Stokes equations”, *Handbook of mathematical fluid dynamics*, vol. 4, eds. S. J. Friedlander, D. Serre, North-Holland, Amsterdam, 2007, 159–200.
- [5] F.-H. Lin, “A new proof of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg theorem”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **51**:3 (1998), 241–257.
- [6] J. Serrin, “On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **9**:1 (1962), 187–195.
- [7] M. Struwe, “On partial regularity results for the Navier–Stokes equations”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **41**:4 (1988), 437–458.
- [8] G. Seregin, V. Šverák, “The Navier–Stokes equations and backward uniqueness”, *Non-linear problems in mathematical physics*, II, In honor of Professor O. A. Ladyzhenskaya, Int. Math. Ser. (N. Y.), **2**, Kluwer, New York, 2002, 359–370.
- [9] Л. Искауриаза, Г. А. Серёгин, В. Шверак, “ $L_{3,\infty}$ -решения уравнений Навье–Стокса и обратная единственность”, *УМН*, **58**:2(350) (2003), 3–44; англ. пер.: L. Escauriaza, G. A. Seregin, V. Šverák, “ $L_{3,\infty}$ -solutions of the Navier–Stokes equations and backward uniqueness”, *Russian Math. Surveys*, **58**:2 (2003), 211–250.
- [10] G. A. Seregin, “On smoothness of $L_{3,\infty}$ -solutions to the Navier–Stokes equations up to boundary”, *Math. Ann.*, **332**:1 (2005), 219–238.
- [11] Г. А. Серёгин, “Оценки подходящих слабых решений в пространствах Морри с критическим показателем”, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **336** (2006), 199–210; англ. пер.: G. A. Seregin, “Estimates of suitable weak solutions to the Navier–Stokes equations in critical Morrey spaces”, *J. Math. Sci.*, **143**:2 (2007), 2961–2968.
- [12] H. L. Choe, J. L. Lewis, “On the singular set in the Navier–Stokes equations”, *J. Funct. Anal.*, **175**:2 (2000), 348–369.
- [13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квази-линейные уравнения параболического типа*, Физматлит, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural’tceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
- [14] А. А. Киселев, О. А. Ладыженская, “О существовании и единственности нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21** (1957), 655–680; англ. пер.: A. A. Kiselev, O. A. Ladyzhenskaya, “On the existence and uniqueness of solutions of the non-stationary problems for flows of non-compressible fluids”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **24** (1963), 79–106.

Г. А. Серёгин (G. A. Seregin)

С.-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: seregin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию

30.09.2006