Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Ваананен, В. В. Зудилин, О линейной независимости значений рядов Чакалова, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 1, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:36:21

О линейной независимости значений рядов Чакалова

К. Ваананен, В. В. Зудилин

В настоящей заметке исследуются арифметические свойства значений функции Чакалова $T_q(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{-\nu(\nu+1)/2} z^{\nu}$, $|q| > 1$. Одной из открытых проблем является доказательство линейной независимости значений $T_q(z)$ с различными q ; единственный результат в этом направлении [1] имеет сильные ограничения. Мы отсылаем заинтересованного читателя к обзору [2] известных результатов о линейной и алгебраической независимости значений функции Чакалова и других q -рядов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть t_1 и t_2 – два различных положительных целых, а числа $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ и $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ мультипликативно независимы¹. Тогда числа 1 , $T_{q^{t_1}}(\alpha)$ и $T_{q^{t_2}}(\alpha)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Отметим, что функция $f_t(z) = T_{q^t}(\alpha z^t)$, $t \in \mathbb{N}$, удовлетворяет функциональному уравнению $\alpha z^t f_t(z) = f_t(qz) - 1$. Для доказательства теоремы 1 мы по существу используем метод из [3] применительно к функциям $g_i(z) = f_{t_i}(z^{m_i})$, $i = 1, 2$, $m_i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющим $\alpha_i z^{s_i} g_i(z) = g_i(qz) - q_i(z)$, где $q_i(z) = \sum_{l=0}^{m_i-1} \alpha^l q^{t_i} \left\{ \binom{m_i}{2} - \binom{m_i-l}{2} \right\} z^{t_i m_i l}$, $\alpha_i = \alpha^{m_i} q^{t_i m_i (m_i-1)/2}$ и $s_i = t_i m_i^2$. Масштабирование $z \mapsto z^{m_i}$ является новым и ключевым моментом нашей конструкции. Существует бесконечное число пар $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$, для которых

$$|s_1 - s_2| = |t_1 m_1^2 - t_2 m_2^2| \leq c_0 \quad (1)$$

с фиксированной постоянной $c_0 > 0$ (если $\tau = \sqrt{t_1/t_2}$ рационально, то мы даже можем выбрать $c_0 = 0$, в то время как в случае иррационального τ указанные пары возникают, например, из подходящих дробей непрерывной дроби для τ). После выбора пары (m_1, m_2) , удовлетворяющей (1), занулируем функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ таким образом, что $s_1 \leq s_2 \leq s_1 + c_0$.

С помощью принципа Дирихле строятся совместные рациональные приближения к функциям $g_1(z)$ и $g_2(z)$.

ЛЕММА 1. Для заданных ε , $0 < \varepsilon < 1/2$, и положительного целого n существуют ненулевой многочлен $P(z) = \sum_{j=0}^n p_j z^j \in \mathbb{Z}[z]$ и многочлены $Q_i(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $\deg Q_i \leq n$, $i = 1, 2$, такие, что выполняются следующие условия:

- (i) $|p_j| \leq |q|^{\lambda n^2/M+O(n)}$, где $\lambda = \lambda(\varepsilon) = (1 - 2\varepsilon)(3 - 2\varepsilon)^2/(8\varepsilon)$ и $M = 2s_1$;
- (ii) после домножения на $q^{n^2/M+O(n)}$ коэффициенты многочленов $Q_i(z)$ становятся целыми;
- (iii) если определить $R_i(z) = P(z)g_i(z) - Q_i(z)$, $i = 1, 2$, то $\text{ord}_{z=0} R_i(z) \geq \frac{3}{2}n - \varepsilon n$ и $|R_i(z)| \leq |q|^{\lambda n^2/M+O(n)} |z|^{\frac{3}{2}n - \varepsilon n}$ при условии $|z| \ll 1$.

Применяя функциональное уравнение для $g_i(z)$, строим дальнейшие приближения на основе леммы 1. Именно, начиная с $R_{i0}(z) = P_0(z)g_i(z) - Q_{i0}(z) = P(z)g_i(z) - Q_i(z)$, $i = 1, 2$, определим для $k = 1, 2$ $R_{ik}(z) = \alpha_i^{-1} z^{s_2 - s_i} R_{i,k-1}(qz) = P_k(z)g_i(z) - Q_{ik}(z)$, $i = 1, 2$. По аналогии с [1; лемма 2] в случае $s_1 < s_2$ или с [3; лемма 3] в случае $s_1 = s_2$ имеет место следующая лемма о необращении в нуль.

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070. Начало работы было положено во время пребывания второго автора на факультете математических наук Университета Оулу в декабре 2006 г. Автор благодарит сотрудников факультета за гостеприимство.

¹Это означает, что единственный набор целых i, j , удовлетворяющих равенству $\alpha^i q^j = 1$, тривиален: $i = j = 0$.

ЛЕММА 2. *Определитель*

$$\Delta(z) := \begin{vmatrix} P_0(z) & Q_{10}(z) & Q_{20}(z) \\ P_1(z) & Q_{11}(z) & Q_{21}(z) \\ P_2(z) & Q_{12}(z) & Q_{22}(z) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сравнивая степень и порядок нуля многочлена $\Delta(z)$ в нуле, заключаем, что для любого $\rho \geq 0$ найдется целое ν такое, что $\rho n \leq \nu \leq \rho n + 2\varepsilon n + 3s_2$ и $\Delta(q^{-\nu}) \neq 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < \min\{1/2, 1/(6c_0)\}$, и выберем пару $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$, удовлетворяющую (1) и неравенству $(1 + \lambda)/M < (1 - 6c_0\varepsilon)(1 - 2\varepsilon)/(32c_0)$. Воспользуемся приведенной выше конструкцией с этой парой и с $\rho = (1 - 6c_0\varepsilon)/(4c_0)$. Для каждого n получаем линейные формы $r_{ik}(\nu) = \alpha_i^\nu q^{(s_2 - s_i)\nu(\nu+1)/2} R_{ik}(q^{-\nu}) = p_k(\nu)g_i(1) - q_{ik}(\nu)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$, причем рациональные коэффициенты $p_k(\nu)$ и $q_{ik}(\nu)$ после домножения на $D_\nu \leq |q|^{n^2/M + n\nu + O(n+\nu)}$ становятся целыми. Предполагая, что теорема 1 неверна, т.е. числа 1 и $g_i(1) = f_{t_i}(1) = T_{q^{t_i}}(\alpha)$, $i = 1, 2$, линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, имеем линейное соотношение $L = h_0 + h_1g_1(1) + h_2g_2(1) = 0$ с некоторыми целыми h_0, h_1, h_2 , не равными одновременно нулю. Тогда

$$0 = D_\nu p_k(\nu)L = D_\nu(h_0p_k(\nu) + h_1q_{1k}(\nu) + h_2q_{2k}(\nu)) + D_\nu(h_1r_{1k}(\nu) + h_2r_{2k}(\nu)) \quad (2)$$

и обращение в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} p_0(\nu) & q_{10}(\nu) & q_{20}(\nu) \\ p_1(\nu) & q_{11}(\nu) & q_{21}(\nu) \\ p_2(\nu) & q_{12}(\nu) & q_{22}(\nu) \end{vmatrix} = (\alpha_1\alpha_2)^\nu q^{(2s_2 - s_1)\nu(\nu+1)/2} \Delta(q^{-\nu})$$

влечет существование $k \in \{0, 1, 2\}$ такого, что слагаемое $D_\nu(h_0p_k(\nu) + h_1q_{1k}(\nu) + h_2q_{2k}(\nu))$ в (2) отлично от нуля. С другой стороны, это число является целым, так что $D_\nu|h_1r_{1k}(\nu) + h_2r_{2k}(\nu)| \geq 1$ в соответствии с (2). Мы приходим к противоречию с тем, что $D_\nu(h_1r_{1k}(\nu) + h_2r_{2k}(\nu)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ согласно лемме 1 и нашему выбору параметров. Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 1 остается верной при замене $\mathbb{Q}$ на произвольное мнимое квадратичное поле $\mathbb{I}$, а $\mathbb{Z}$ на кольцо $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ целых поля $\mathbb{I}$. Метод из [3] и небольшая модификация доказательства теоремы 1 приводит к следующему общему результату (ср. с [1]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $|q| > 1$. Предположим, что $t_1, \dots, t_l$ – различные положительные целые и ненулевое число $\alpha \in \mathbb{I}$ мультипликативно независимо с q . Тогда $l + 1$ чисел 1 и $T_{q^{t_k}}(\alpha)$, $k = 1, \dots, l$, линейно независимы над $\mathbb{I}$. Кроме того, если q и $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ из $\mathbb{I} \setminus \{0\}$ мультипликативно независимы, то числа 1 и $T_{q^{t_k}}(\alpha_k)$, $k = 1, \dots, l$, линейно независимы над $\mathbb{I}$.

В доказательстве этой теоремы условие (1) заменяется неравенством, вытекающим из теоремы Кронекера о совместных приближениях.

Подчеркнем, что ввиду количественного характера метода, применяемого в наших доказательствах, можно оценить снизу линейные формы с целыми коэффициентами от рассматриваемых чисел.

Список литературы

- [1] М. Амоу, К. Väänänen, *Monatsh. Math.*, **144**:1 (2005), 1–11. [2] P. Bundschuh, *Sūrikaiseikenkyūsho Kōkyūroku*, **1219** (2001), 110–121. [3] К. Väänänen, *Math. Ann.*, **325**:1 (2003), 123–136.

К. Ваананен (K. Väänänen)

Department of Mathematical Sciences,

University of Oulu, Finland

E-mail: kvaanane@sun3.oulu.fi

Представлено А. Г. Сергеевым

Принято редколлегией

18.01.2007

В. В. Зудилин (W. Zudilin)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: wadim@mi.ras.ru