Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Солонников, Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 123–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:01:48

УДК 517.9

Посвящается О. А. Ладыженской по случаю ее юбилея

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С. Л. СОБОЛЕВА И ОБ ОЦЕНКАХ РЕЗОЛВЕНТЫ ОПЕРАТОРА СТОКСА

В. А. Солонников

В работе, которая в значительной степени носит обзорный характер, приведено доказательство коэрцитивной оценки в пространствах Соболева со смешанной нормой для решения нестационарной задачи Стокса (с ненулевой дивергенцией) в ограниченных и внешних областях, а также вытекающей из нее оценки резольвенты оператора Стокса. В доказательстве используется явное представление решения задачи в полупространстве через матрицу Грина, для элементов которой выводятся точечные оценки.

Библиография: 26 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	123
§ 2. Задача Стокса в полупространстве	128
2.1. Матрица Грина	128
2.2. $L_{q,r}$ -оценки	131
2.3. Оценки матрицы Грина	136
§ 3. Доказательство теорем 1.1, 1.2	140
3.1. Случай $\vec{v}_0 = 0$	140
3.2. Задача для системы Стокса с ненулевой дивергенцией	145
§ 4. Оценка резольвенты оператора Стокса	151
Список литературы	155

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена нестационарной задаче Стокса

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \nabla p &= \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T), \\ \vec{v}|_{t=0} &= \vec{v}_0(x), \quad \vec{v}|_{x \in S} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

в ограниченной или внешней области $\Omega_{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 2$, с C^2 -гладкой компактной границей S . Задача (1.1) часто записывается в виде операторного уравнения

$$v_t + Av = f, \quad v|_{t=0} = v_0$$

в подходящем банаховом пространстве соленоидальных векторных полей. Здесь $A = -\nu Q\Delta$, Q – проектор на подпространство векторных полей, удовлетворяющих (чаще всего в слабом смысле) условиям

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0, \quad \vec{f} \cdot \vec{n}|_S = 0, \quad (1.2)$$

где $\vec{n}(x)$ – единичная нормаль к S . Оператор A называется оператором Стокса.

В работе излагаются оценки решения задачи (1.1) в пространствах Соболева $W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $Q^T = \Omega \times (0, T]$, $q, r > 1$, и их приложение к оценкам решения стационарной задачи

$$\lambda \vec{v} - \nu \Delta \vec{v} + \nabla p = \vec{f}(x), \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

$$\vec{v}|_S = 0$$

(т.е. уравнения $\lambda v + Av = f$), которые позволяют заключить, что оператор Стокса порождает аналитическую полугруппу в $L_q(\Omega)$. В случае $q = r$ такие оценки были получены в 60-х–70-х годах в лаборатории математической физики ЛОМИ, возглавляемой профессором О. А. Ладыженской (см. [1]–[4]). Они нашли свое обобщение, усиление и применение в многочисленных последующих работах, выполняемых вплоть до настоящего времени (см., например, [5]–[15]).

Напомним, что под $W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$ понимается пространство

$$L_r(0, T; W_q^2(\Omega)) \cap W_r^1(0, T; L_q(\Omega))$$

с нормой

$$\|u\|_{W_{q,r}^{2,1}(Q^T)} = \left(\int_0^T \|u\|_{W_q^2(\Omega)}^r dt \right)^{1/r} + \|u_t\|_{L_{q,r}(Q^T)},$$

$$\|u\|_{L_{q,r}(Q^T)} = \left(\int_0^T \|u\|_{L_q(\Omega)}^r dt \right)^{1/r} = \left(\int_0^T dt \left(\int_\Omega |u(x)|^q dx \right)^{r/q} \right)^{1/r}.$$

Для главной части нормы будем использовать обозначение

$$\|u\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} = \|u_t\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \sum_{|j|=2} \|D_x^j u\|_{L_{q,r}(Q^T)}.$$

Пространства векторных полей будем обозначать теми же символами, что и пространства функций.

Известно (см., например, [16]), что если $u \in W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, то при любом $t_0 \in [0, T]$ функция $u(\cdot, t_0)$ принадлежит пространству О. В. Бесова $B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$. При любых $l \in (0, 2)$ норму в $B_{q,r}^l(\Omega)$ можно определить равенством

$$\|u\|_{B_{q,r}^l(\Omega)} = \|u\|_{\dot{B}_{q,r}^l(\Omega)} + \|u\|_{L_q(\Omega)},$$

$$\|u\|_{\dot{B}_{q,r}^l(\Omega)}^r = \int_{|z|<1} |z|^{-n-rl} dz \left(\int_{\Omega(z)} |u(x+2z) - 2u(x+z) + u(x)|^q dx \right)^{r/q},$$

где $\Omega(z) = \{x \in \Omega : x + tz \in \Omega, t \in [0, 1]\}$. Имеется много других эквивалентных определений этой нормы.

Будем говорить, что функция $\varphi \in B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$ согласована с нулем на границе, если существует такая функция $u \in W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, что $u|_{t=0} = \varphi$, $u|_{x \in S} = 0$ и

$$\|u\|_{W_{q,r}^{2,1}(Q^T)} \leq c \|\varphi\|_{B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)}.$$

При $2 - 2/r > 1/q$ это эквивалентно тому, что $\varphi|_{x \in S} = 0$, а при $2 - 2/r = 1/q$ множество функций, согласованных с нулем, — это множество с конечной нормой

$$\|\varphi^{(0)}\|_{B_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)},$$

где $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x)$ при $x \in \Omega$, $\varphi^{(0)}(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. При $2 - 2/r < 1/q$ все функции $\varphi \in B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$ согласованы с нулем на границе.

Положим

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{q,r}^{(2-2/r)} &= \|\varphi\|_{B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)}, & \text{если } 2 - 2/r \neq 1/q, \\ \|\varphi\|_{q,r}^{(2-2/r)} &= \|\varphi^{(0)}\|_{B_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}, & \text{если } 2 - 2/r = 1/q. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В работе приведено доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что область Ω ограничена, $\vec{f} \in L_{q,r}(Q^T)$, $\vec{v}_0 \in B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$, вектор $\vec{v}_0$ согласован с нулем на границе и удовлетворяет условиям $\nabla \cdot \vec{v}_0 = 0$, $\vec{v}_0 \cdot \vec{n}|_S = 0$ (при $2 - 2/r < 1/q$ — в слабом смысле). Тогда задача (1.1) имеет единственное решение $\vec{v} \in W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(Q^T)$, и выполняется неравенство*

$$\|u\|_{W_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(Q^T)} \leq c(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \|\vec{v}_0\|_{q,\Omega}^{(2-2/r)}). \quad (1.5)$$

Постоянная c от T не зависит.

В случае внешней области Ω мы получаем решение в классе функций, которые не обязаны быть элементами $L_{q,r}(Q^T)$ во всей области Q^T . Мы вводим следующие пространства:

$\widetilde{W}_q^k(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$: пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_{\widetilde{W}_q^k(\Omega)} &= \|u\|_{\dot{W}_q^k(\Omega)} + \|u\|_{L_q(\Omega_1)}, \\ \|u\|_{\dot{W}_q^k(\Omega)}^q &= \sum_{|j|=k} \|D^j u\|_{L_q(\Omega)}^q, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$: пространство функций $u(x, t)$, $(x, t) \in Q^T$, с нормой

$$\|u\|_{\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} = \|u\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|u\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0, T))}. \quad (1.7)$$

Здесь Ω_1 — ограниченная подобласть Ω такая, что $(\Omega \setminus \overline{\Omega}_1) \cap S = \emptyset$, например, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |x - x_0| < R\}$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. При изменении Ω_1 пространства $\widetilde{W}_q^k(\Omega)$ и $\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$ не изменяются, а нормы (1.6), (1.7) переходят в эквивалентные.

Определим теперь пространство следов функций $u \in \widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$ на плоскости $t = t_0 \in [0, T]$. Воспользуемся конечным разбиением единицы в Ω . Пусть $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_M$ — гладкие функции, заданные в $\mathbb{R}^n$ и обладающие следующими свойствами.

- 1) $\text{supp } \zeta_k \subset \omega_k = \{|x - x_k| < d\}$, $x_k \in S$, $k = 1, \dots, M$,
- 2) $\sum_{j=1}^M \zeta_j(x) = 1$ при $x \in \Omega_{d/2} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, S) < d/2\}$.

Тогда $\zeta_0(x) = 1 - \sum_{j=1}^M \zeta_j(x) = 0$ при $x \in \Omega_{d/2}$.

3) Каждое ω_k , $k = 1, \dots, M$, может быть отображено в подмножество полупространства $(\vec{x} - \vec{x}_k) \cdot \vec{n}(x_k) > 0$ с помощью гладкой замены переменных $z = T_k x$; при этом поверхность $\partial\omega_k \cap S$ переходит в подмножество касательной плоскости R_k : $(\vec{x} - \vec{x}_k) \cdot \vec{n}(x_k) = 0$, а точка x_k остается инвариантной.

Пусть $\zeta_j \varphi \equiv \varphi_j$, $j = 0, 1, \dots, M$, и $\tilde{\varphi}_j(z) = \varphi_j(T_j x)$, $\varphi_j^{(-)}(z)$ — нечетное относительно касательной плоскости продолжение $\tilde{\varphi}_j(z)$ во все пространство $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$ пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{\tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)} = \sum_{k=1}^M \|\varphi_k^{(-)}\|_{\tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_0\|_{\tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi\|_{L_q(\Omega_1)}, \quad (1.8)$$

где

$$\|\psi\|_{\tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}^r = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{|z|^{n+2r-2}} \left(\int |\psi(x+z) - 2\psi(x) + \psi(x-z)|^q dz \right)^{r/q}. \quad (1.9)$$

Это пространство состоит из функций, согласованных с нулем на S , что вытекает из конечности норм функций $\varphi_j^{(-)}$ в (1.8). Можно показать, что норма (1.8) эквивалентна норме, использованной в [10; (1.3), (1.3')]. Заменяя Ω_1 на Ω в (1.8), получим норму, эквивалентную норме $B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$. Для внешних областей доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть Ω — внешняя область, $\vec{f} \in L_{q,r}(Q^T)$, $\vec{v}_0 \in \tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$, $\nabla \cdot \vec{v}_0 = 0$, $\vec{v}_0 \cdot \vec{n}|_S = 0$. Тогда задача (1.1) имеет единственное решение $\vec{v} \in \widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(Q^T)$, и выполняется неравенство

$$\|\vec{v}\|_{\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(Q^T)} \leq c(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \|\vec{v}_0\|_{\tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)}). \quad (1.10)$$

При $n \geq 3$, $q < n/2$ постоянная c от T не зависит.

Если $\vec{v}_0 \in B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$, то $\vec{v} \in W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$.

В работе [4] была доказана теорема 1.1, а также теорема 1.2 с некоторой зависящей от T постоянной c в неравенстве (1.10) в случае $q = r$. И. Гига и Г. Зор [7] доказали оценки (1.5), (1.10) при произвольных $q, r > 1$ и показали, что постоянная c в (1.10) может быть выбрана не зависящей от T , если $n \geq 3$, $q < n/2$, а при $q \geq n/2$ получили неравенство

$$\|\vec{v}_t\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \|-\nu \nabla \vec{v} + \nabla p\|_{L_{q,r}(Q^T)} \leq c(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \|\vec{v}_0\|_{\tilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)})$$

также с не зависящей от T постоянной (следует отметить, что пространство начальных данных $\vec{v}_0$ определено в [7] иным образом). Другое доказательство этих результатов было дано в [11]. Как показано в [17], оценка (1.10) с $q = 2$ имеет место и при $n = 2$. Теоремы 1.1 и 1.2 доказываются ниже в несколько более общей форме, чем указано выше, а именно для системы с уравнением $\operatorname{div} \vec{v} = g$ вместо $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Задача (1.1) для системы такого вида была рассмотрена в [18].

Переходим к оценкам резольвенты оператора Стокса. В работе [4] было показано, что решение задачи (1.3) подчиняется неравенству

$$|\lambda| \|\vec{v}\|_{L_q(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,2}^2(\Omega)} + \|\nabla p\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)} \quad (1.11)$$

с постоянной, не зависящей от λ , для всех $\lambda \in \Sigma_{\rho,\omega} = \{|\arg \lambda| < \pi/2 + \omega, |\lambda| > \rho\}$ с некоторыми положительными ω и ρ . Это неравенство было выведено из полученной в той же работе оценки решения нестационарной задачи (1.1) (с $\vec{v}_0 = 0$)

$$\|\vec{v}\|_{W_{q,q}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p\|_{L_q(Q^T)} \leq c_1 \|\vec{f}\|_{L_q(Q^T)} + c_2 \|\vec{v}\|_{L_q(Q^T)} \quad (1.12)$$

с постоянными c_1 и c_2 , не зависящими от T . В случае ограниченной области этот результат, дополненный несложным анализом задачи (1.3) при конечных $|\lambda|$, позволяет заключить, что (1.11) выполняется в области $\Sigma_{\rho,0} \cup \{\mathbb{R}\lambda > -b\}$, где $-b$ – первое собственное число оператора Стокса. В случае внешней области это не имеет места и, ввиду важности оценки резольвенты оператора Стокса для изучения нестационарной задачи, результаты работы [4] подверглись обобщению и усилению. И. Гига [5] получил неравенство

$$|\lambda| \|\vec{v}\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)}, \quad \lambda \in \Sigma_{\omega,\rho}, \quad (1.13)$$

для произвольных $\omega, \rho > 0$. Это было сделано с помощью сведения задачи (1.3) к задаче для однородной системы с неоднородным краевым условием, которая была изучена методами теории потенциала и теории псевдодифференциальных операторов. М. Мак-Крекен [19] доказала оценку (1.11) при $\lambda \in \Sigma_{\omega,\rho}, \forall \omega > 0$, для случаев $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. Доказательство основано на теореме о мультипликаторах в интегралах Фурье и на представлении решения краевой задачи в $\mathbb{R}_+^n$ в виде потенциалов. Опираясь на эти результаты, В. Борхерс и Г. Зор [8] доказали оценку (1.13) при $\lambda \in \Sigma_{\omega,0}, \forall \omega > 0$, для внешней области. Это позволило, в частности, установить равномерную ограниченность в $L_q(\Omega)$ полугруппы, порождаемой оператором Стокса, для любых $t \geq 0$ (из результатов работы [4] следовала ограниченность на любом конечном интервале $t \in [0, T]$). Другой метод доказательства этой же оценки при $\lambda \in \Sigma_{\omega,0}$ с некоторым $\omega > 0$, основанный на изучении нестационарной задачи, содержится в работе [11]. При $n = 2$ оценка (1.13) получена методами теории потенциала в [9]. Некоторые результаты работы [8] воспроизводятся ниже в §4.

Коэрцитивные оценки вида (1.5) широко применяются для изучения нелинейной задачи, они позволили установить тот хорошо известный факт, что слабое решение задачи принадлежит $W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$ при $n/q + 2/r = n + 1$. Их применение к изучению локальных свойств решения нелинейной задачи можно найти в [14], [15].

§ 2. Задача Стокса в полупространстве

2.1. Матрица Грина. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \nabla p &= \vec{f}(x, t), \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n = \{x_n > 0\}, \quad t \in [0, T], \quad T \leq \infty, \\ \vec{v}|_{t=0} &= 0, \quad \vec{v}|_{x_n=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

считая векторное поле $\vec{f}(x, t)$ гладким и достаточно быстро убывающим при $|x| \rightarrow \infty$. В работе [4] показано (для случая $n = 3$, но общий случай рассматривается буквально так же), что если $\vec{f}$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0, \quad f_n|_{x_n=0} = 0, \quad (2.2)$$

то решение задачи (2.1) выражается в виде

$$\vec{v}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathcal{G}(x, y, t - \tau) \vec{f}(y, \tau) dy d\tau, \quad (2.3)$$

$$p(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^n} \vec{\mathcal{P}}(x, y, t - \tau) \cdot \vec{f}(y, \tau) dy d\tau. \quad (2.4)$$

Элементы матрицы $\mathcal{G} = (G_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ и компоненты вектора $\vec{\mathcal{P}} = (P_i)_{i=1,\dots,n}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, y, t) &= \delta_{ij}(\Gamma(x - y, t) - \Gamma(x - y^*, t)) \\ &\quad + 4(1 - \delta_{jn}) \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial E(x - z)}{\partial x_i} \Gamma(z - y^*, t) dz, \\ P_j(x, y, t) &= 4\nu(1 - \delta_{jn}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial E(x' - z', x_n)}{\partial x_n} \Gamma(z' - y', y_n, t) dz' \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(x' - z', x_n) \frac{\partial \Gamma(z' - y', y_n, t)}{\partial y_n} dz' \right], \end{aligned}$$

в которых $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x^* = (x', -x_n)$ — точка, симметричная точке x относительно плоскости $x_n = 0$, а $E(x)$ и $\Gamma(x, t)$ — фундаментальные решения уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{если } n = 2, \\ E(x) &= -\frac{1}{(n-2)|S_1||x|^{n-2}}, & \text{если } n > 2, \\ |S_1| &= 2\pi^{n/2} \Gamma(n/2) - \text{площадь поверхности единичной сферы в } \mathbb{R}^n, \\ \Gamma(x, t) &= (4\pi\nu t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\nu t}\right) & \text{при } t > 0, \\ \Gamma(x, t) &= 0 & \text{при } t < 0. \end{aligned}$$

Если условия (2.2) не выполнены, то

$$\vec{v}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathcal{G}(x, y, t - \tau) \vec{f}'(y, \tau) dy d\tau, \quad (2.5)$$

$$p(x, t) = \varphi(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^n} \vec{\mathcal{P}}(x, y, t - \tau) \cdot \vec{f}'(y, \tau) dy d\tau, \quad (2.6)$$

где $\vec{f}'$ – проекция $\vec{f}$ на пространство векторных полей, удовлетворяющих (2.2). Известно, что произвольное поле $\vec{f}$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \nabla \varphi + \vec{f}', \\ \varphi(x, t) &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla_y (E(x - y) + E(x - y^*)) \cdot \vec{f}'(y, t) dy, \end{aligned} \quad (2.7)$$

так что $\vec{f}'$ связано с $\vec{f}$ соотношением

$$\vec{f}'(x, t) = \vec{f}(x, t) + \nabla \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla_y (E(x - y) + E(x - y^*)) \cdot \vec{f}(y, t) dy.$$

Формулы (2.3), (2.4) были выведены в [4] с помощью преобразования Фурье задачи (2.1) и решения получившейся задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в явном виде. Вместо этого мы проверим, что функции (2.3), (2.4) действительно являются решением задачи (2.1), если выполнены условия (2.2). Запишем компоненты вектора (2.3) в виде

$$v_i(x, t) = u_i(x, t) + 4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial E(x - z)}{\partial x_i} U_j^*(z, t) dz, \quad (2.8)$$

где

$$U_j^*(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma(x - y^*, t - \tau) f_j(y, \tau) dy d\tau, \quad (2.9)$$

а

$$u_i(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^n} (\Gamma(x - y, t - \tau) - \Gamma(x - y^*, t - \tau)) f_i(y, \tau) dy d\tau$$

– решение параболической начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i = f_i, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad u_i|_{x_n=0} = 0.$$

Ясно, что функции (2.8) удовлетворяют нулевым начальным и краевым условиям.

Далее, из легко доказываемого соотношения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial E(x - z)}{\partial x_i} h(z) dz = \frac{1}{2} h(x)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \operatorname{div} \vec{u} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial U_j^*}{\partial x_j} \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} (\Gamma(x-y, t-\tau) + \Gamma(x-y^*, t-\tau)) f_i(y, \tau) dy d\tau = 0, \end{aligned}$$

вследствие условий (2.2). Наконец, вынося производную $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в (2.8) из-под знака интеграла, получаем

$$\begin{aligned} v_i(x, t) &= u_i(x, t) + 4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(x-z) U_j^*(z, t) dz \\ &\quad - 4\delta_{in} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(y', 0) U_j^*(x' - y', x_n, t) dy' \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) v_i = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

где

$$\begin{aligned} p(x, t) &= -4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(y) U_j^*(x-y, t) dy \\ &= 4\nu \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(y', x_n) U_j^*(x' - y', 0, t) dy' \\ &\quad + 4\nu \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(y', x_n) \frac{\partial U_j^*(x' - y', r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} dy' \\ &= 4\nu \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial E(x' - z', x_n)}{\partial x_j} dz' \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \Gamma(z' - y', y_n, t-\tau)}{\partial y_n} f_j(y, \tau) dy d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial E(x' - z', x_n)}{\partial x_n} dz' \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \Gamma(z' - y', y_n, t-\tau)}{\partial z_j} f_j(y, \tau) dy d\tau \right), \end{aligned}$$

что совпадает с (2.4).

При невыполнении условий (2.2) мы представляем $\vec{f}$ в виде (2.7) и присоединяем φ к давлению p , что приводит к (2.5), (2.6).

Легко также видеть, что решение задачи

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \nabla p &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ \vec{v}|_{t=0} &= \vec{v}_0(x), \quad \vec{v}|_{x_n=0} = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

с любым гладким убывающим на бесконечности соленоидальным $\vec{v}_0$, удовлетворяющим условию $v_{0n}|_{x_n=0} = 0$, выражается по формулам

$$\vec{v}(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathcal{G}(x, y, t) \vec{v}_0(y) dy, \quad (2.11_1)$$

$$p(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \vec{\mathcal{P}}(x, y, t) \cdot \vec{v}_0(y) dy. \quad (2.11_2)$$

2.2. $L_{q,r}$ -оценки. Докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Решение задачи (2.1), определяемое формулами (2.3), (2.4), подчиняется неравенству*

$$\|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)}, \quad (2.12)$$

где $\Pi_+^T = \mathbb{R}_+^n \times (0, T)$, c – постоянная, не зависящая от T , и $\|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)}$ – главная часть нормы $\|\vec{v}\|_{W_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)}$:

$$\|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)} = \|\vec{v}_t\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} + \sum_{|j|=2} \|D_x^j \vec{v}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)}.$$

Кроме того,

$$\|\vec{v}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \leq cT \|\vec{f}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)}. \quad (2.12')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основную роль в доказательстве неравенства (2.12) играют теорема Кальдерона–Зигмунда и оценка

$$\|u\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi^T)} \leq c \|f\|_{L_{q,r}(\Pi^T)}, \quad \Pi^T = \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad (2.13)$$

теплового объемного потенциала

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - \tau) f(y, \tau) dy d\tau$$

(см., например, [20]). Оценим производные $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ с помощью формулы (2.8), которую запишем в виде

$$v_i(x, t) = u_i(x, t) + 4 \sum_{j=1}^{n-1} S_{ij} U_j^* + \frac{2}{n} (1 - \delta_{in}) U_i^*(x, t), \quad (2.14)$$

где S_{ij} – сингулярный интегральный оператор с разрывным ядром

$$K_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x_i \partial x_j}, & \text{если } x_n > 0, \\ 0, & \text{если } x_n < 0, \end{cases}$$

U_j^* задается формулой (2.9) при $x_n > 0$ и $U_j^* = 0$ при $x_n < 0$. Дифференцируя (2.14) по t и применяя (2.13) и теорему Кальдерона–Зигмунда [21], получаем

$$\|\vec{v}_t\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \leq \|\vec{u}_t\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} + c\|\vec{U}_t^*\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \leq c\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)}. \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь $\vec{v}, p$ как решение стационарной задачи

$$-\nu\Delta\vec{v} + \nabla p = \vec{f} - \vec{v}_t, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad \vec{v}|_{x_n=0} = 0$$

при любом $t \in (0, T)$. Известная коэрцитивная оценка норм $L_q(\mathbb{R}_+^n)$ производных $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_i \partial x_j}$ и ∇p и неравенство (2.15) влекут за собой (2.12).

Неравенство (2.12') легко получается из оценки

$$\|\vec{v}(\cdot t)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^n)} \leq \int_0^t \|\vec{v}_\tau(\cdot \tau)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^n)} d\tau,$$

откуда следует

$$\|\vec{v}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \leq T\|\vec{v}_t\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \leq cT\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)},$$

что и требовалось.

Для доказательства (1.5), (1.10) нам нужно рассмотреть более общую задачу

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu\Delta\vec{v} + \nabla p &= \vec{f}(x, t), \\ \operatorname{div} \vec{v} &= g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t \in [0, T], \\ \vec{v}|_{t=0} &= \vec{v}_0(x), \quad \vec{v}|_{x_n=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Будем считать, что $\vec{f}, g, \vec{v}_0$ — гладкие функции, стремящиеся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и удовлетворяющие условиям согласования

$$\operatorname{div} \vec{v}_0(x, 0) = g(x, 0), \quad \vec{v}_0|_{x_n=0} = 0.$$

Кроме того, предположим, что функция $g(x, t)$ дифференцируема по t и $g_t \in L_r(0, T; \dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n))$, т.е.

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+^n} g_t(x, t) \varphi(x) dx \right| \leq c \|g_t(\cdot t)\|_{\dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n)} \|\nabla \varphi\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+^n)},$$

$1/q' = 1 - 1/q$, и $\|g_t(\cdot t)\|_{\dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n)} \in L_r(0, T)$. Построим решение задачи (2.16) в виде суммы

$$\vec{v}(x, t) = \vec{v}_1(x, t) + \vec{v}_2(x, t) + \vec{v}_3(x, t), \quad (2.17)$$

$$p(x, t) = p_2(x, t) + p_3(x, t), \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{v}_1(x, t) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} (\Gamma(x - y, t) - \Gamma(x - y^*, t)) \vec{v}_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma(x - y, t) \vec{v}_0^{(-)}(y) dy,\end{aligned}\quad (2.19)$$

$\vec{v}_0^{(-)}(y)$ – нечетное по y_n продолжение $\vec{v}_0$ в область $y_n < 0$, а $(\vec{v}_2, p_2)$ и $(\vec{v}_3, p_3)$ – решения задач

$$\begin{aligned}-\nu \Delta \vec{v}_2 + \nabla p_2 &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{v}_2 &= g - \operatorname{div} \vec{v}_1 \equiv g_1(x, t), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \vec{v}|_{x_3=0} &= 0,\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{3t} - \nu \Delta \vec{v}_3 + \nabla p_3 &= \vec{f} - \vec{v}_{2t}, \\ \operatorname{div} \vec{v}_3 &= 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t \in (0, T), \\ \vec{v}_3|_{t=0} &= 0, \quad \vec{v}_3|_{x_n=0} = 0.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Ясно, что функции (2.17), (2.18) действительно являются решением задачи (2.16). Переходим к их оценке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Функция (2.19) удовлетворяет неравенству*

$$\|\vec{v}_1\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)} \leq c \|\vec{v}_0^{(-)}\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.22)$$

где

$$\|f\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{|z|^{n+2r-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - 2f(x) + f(x-z)|^q dx \right)^{r/q} \right)^{1/r}$$

– главная часть нормы $\|f\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}$, а для решения задачи (2.20) справедлива оценка

$$\|\vec{v}_2\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)} \leq c (\|\nabla g\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} + \|g_t\|_{L_r(0,T;\dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n))}). \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{v}_1'$ – любая из производных $\vec{v}_{1t}$, $\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial x_i \partial x_j}$. Так как соответствующая производная $\Gamma'(z, t)$ ядра Γ четна по z , то

$$\vec{v}_1'(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma'(z, t) \Delta^2(z) \vec{v}_0^{(-)}(x) dz,$$

где $\Delta^2(z) \vec{v}_0^{(-)}(x) = \vec{v}_0^{(-)}(x - z) - 2\vec{v}_0^{(-)}(x) + \vec{v}_0^{(-)}(x + z)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_1'(\cdot, t)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma'(z, t)| \|\Delta^2(z) \vec{v}_0^{(-)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} dz \\ &\leq \frac{c}{t^{1/r'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma'(z, t)| \|\Delta^2(z) \vec{v}_0^{(-)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^r dz \right)^{1/r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1'(\cdot t)\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)}^r &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \|\Delta^2(z) \vec{v}_0^{(-)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^r dz \int_0^T |\Gamma'(z, t)| \frac{dt}{t^{r-1}} \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \|\Delta^2(z) \vec{v}_0^{(-)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^r \frac{dz}{|z|^{n+2r-2}}, \end{aligned}$$

и неравенство (2.22) доказано.

Переходим к доказательству (2.23). Хорошо известно, что

$$\|\vec{v}_2(\cdot t)\|_{\dot{W}_q^2(\mathbb{R}_+^n)} + \|\nabla p_2(\cdot t)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^n)} \leq c \|\nabla g\|_{L_q(\mathbb{R}_+^n)}. \quad (2.24)$$

Для оценки $\vec{v}_{2t}$ рассмотрим вспомогательную задачу

$$-\nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi = \vec{\psi}, \quad \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad \vec{\varphi}|_{x_n=0} = 0,$$

где $\vec{\psi}$ — произвольное гладкое финитное векторное поле в $\mathbb{R}_+^n$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \vec{v}_{2t} \cdot \vec{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \vec{v}_{2t} \cdot (-\nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi) dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} g_t \pi dx$$

и, следовательно,

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+^n} \vec{v}_{2t} \cdot \vec{\psi} dx \right| \leq \|g_t(\cdot t)\|_{\dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n)} \|\nabla \pi\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+^n)} \leq c \|g_t(\cdot t)\|_{\dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n)} \|\vec{\psi}\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

В силу произвольности $\vec{\psi}$ это неравенство влечет за собой

$$\|\vec{v}_{2t}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \leq c \|g_t\|_{L_r(0,T;W_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n))}.$$

Отсюда и из (2.24) вытекает (2.23). Предложение доказано.

Предложения 2.1 и 2.2 приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\vec{f} \in L_{q,r}(\Pi_+^T)$, $\nabla g \in L_{q,r}(\Pi_+^T)$, существует производная $g_t \in L_r(0,T;W_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n))$, $g \in L_{q,r}(K \times (0,T))$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_+^n$, а $\vec{v}_0$ обладает тем свойством, что $\vec{v}_0^{(-)} \in \dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, кроме того, что выполнено (в слабом смысле) условие согласования $\operatorname{div} \vec{v}_0(x,0) = g(x,0)$. Тогда задача (2.16) имеет решение $(\vec{v}, \nabla p)$, удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned} &\|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \\ &\leq c(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} + \|\nabla g\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} + \|g_t\|_{L_r(0,T;W_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n))} + \|\vec{v}_0^{(-)}\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

с постоянной, не зависящей от T . Решение единственно в классе функций $\vec{v} \in \dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(\Pi_+^T)$, таких, что $\vec{v} \in L_{q,r}(K \times (0, T])$, $\forall K \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$.

Действительно, существование решения и оценка (2.25) следуют из проведенных выше построений и предложений 2.1, 2.2, а единственность можно установить с помощью соображений дуальности: разность $\vec{w} = \vec{v}^{(1)} - \vec{v}^{(2)}$ двух решений из указанного класса принадлежит $L_{q,r}(\Pi_+^{T'})$ при любом $T' < T$ и удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{T'} \int_{\mathbb{R}^n} \vec{w}(-\vec{\varphi}_t - \nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi) dx dt = 0$$

при любых финитных $\vec{\varphi}$, π , $\vec{\varphi}|_{t=T'} = 0$. Так как множество $-\vec{\varphi}_t - \nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi$ плотно в $L_{q',r'}(\Pi_+^{T'})$, то $\vec{w} = 0$.

Отметим, что условие $\vec{v}_0^{(-)} \in \dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)$ выделяет из класса $\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)$ элементы, согласованные с нулем на границе $\{x_n = 0\}$ (см. по этому поводу [10], где доказана и оценка (2.22)).

Наконец, сформулируем аналогичную теорему для задачи Коши

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \nabla p &= \vec{f}, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \\ \vec{v}|_{t=0} &= \vec{v}_0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\vec{f} \in L_{q,r}(\Pi^T)$, $\Pi^T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $\nabla g \in L_{q,r}(\Pi^T)$, $g_t \in L_r(0, T; \dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}^n))$, $\vec{v}_0 \in \dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{q,r}(K \times (0, T))$, $\vec{v}_0 \in L_q(K)$, $\forall K \subset \mathbb{R}^n$, $u \operatorname{div} \vec{v}_0 = g(x, 0)$. Тогда задача (2.26) имеет решение такое, что

$$\begin{aligned} &\|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(\Pi^T)} \\ &\leq c(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(\Pi^T)} + \|\nabla g\|_{L_{q,r}(\Pi^T)} + \|g_t\|_{L_r(0, T; W_q^{-1}(\mathbb{R}^n))} + \|\vec{v}_0\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Решение единственно в классе функций со следующими свойствами:

$$\vec{v} \in \dot{W}_{q,r}^{2,1}(\mathbb{R}^n), \quad \nabla p \in L_{q,r}(\mathbb{R}^n), \quad \vec{v} \in L_{q,r}(K \times (0, T)), \quad \forall K \subset \mathbb{R}^n.$$

Ограничимся указанием на то, что при гладких убывающих на бесконечности $\vec{f}$, $\vec{v}_0$, g решение имеет вид (2.17), (2.18), где

$$\vec{v}_1(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) \vec{v}_0(y) dy,$$

$(\vec{v}_2, p_2)$ – решение стационарной системы

$$-\nu \Delta \vec{v}_2 + \nabla p_2 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}_2 = g - \operatorname{div} \vec{v}_1,$$

т.е.

$$\vec{v}_2(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla E(x - y) (g(y, t) - \operatorname{div} \vec{v}_1(y, t)) dy, \quad p_2 = \nu(g - \operatorname{div} \vec{v}_1),$$

а $(\vec{v}_3, p_3)$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \vec{v}_{3t} - \nu \Delta \vec{v}_3 + \nabla p_3 &= \vec{f} - \vec{v}_{2t} \equiv \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{v}_3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \\ \vec{v}_3|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{v}_3(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{T}(x - y, t - \tau) \vec{f}_1(y, \tau) dy d\tau, \\ p_3(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla E(x - y) \cdot \vec{f}_1(y, t) dy, \end{aligned}$$

где $\mathbb{T}$ – фундаментальная матрица нестационарной системы Стокса с элементами

$$T_{ij}(x, t) = \delta_{ij} \Gamma(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - z, t) E(z) dz, \quad i, j = 1, \dots, n$$

(тензор Озеена). Функции $(\vec{v}_2, p_2)$ и $(\vec{v}_3, p_3)$ оцениваются так же, как в предложениях 2.1, 2.2.

2.3. Оценки матрицы Грина. Выведем поточечные оценки матрицы Грина G_{ij} (не используемые в доказательстве оценки (2.25)). Они являются следствием следующего вспомогательного предложения, доказанного в работе [22].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $M(x, t)$ – функция, заданная при $x \in \mathbb{R}_+^n$, $t > 0$, и обладающая свойствами

$$M(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^m M(x, t), \quad \forall \lambda > 0, \quad (2.28)$$

$$|D_x^k D_t^s M(x, t)| \leq ct^{\frac{m-|k|-2s}{s}} \exp\left(-c \frac{|x|^2}{t}\right).$$

Тогда интеграл

$$J(x, y_n, t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(y) M(x' - y', x_n, t) dy'$$

удовлетворяет условиям

$$J(\lambda x, \lambda y_n, \lambda^2 t) = \lambda^{m+1} J(x, y_n, t), \quad (2.29)$$

$$|D_x^k D_{y_n}^l D_t^s J(x, y_n, t)| \leq ct^{\frac{m+n-1-2s-k_n}{2}} [|x'|^2 + (x_n + y_n)^2 + t]^{-\frac{|k'|+l+n-2}{2}} e^{-\frac{cx_n^2}{t}}, \quad (2.30)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $k' = (k_1, \dots, k_{n-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие однородности (2.29) легко вытекает из (2.28), а из него следует, что неравенство (2.30) достаточно доказать при $t = 1$; кроме того, так как функция E гармоническая, то достаточно ограничиться рассмотрением случаев $l = 0, l = 1$. Положим $M_s(x) = D_t^s M(x, t)|_{t=1}$, $E_l(y) = \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^l E(y)$, $l = 0, 1$, и оценим производную $D_x^k J_{l,s}$ интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} E_l(y) M_s(x' - y', x_n) dy' = J_{l,s}(x, y_n).$$

Имеем

$$\begin{aligned} |D_x^k J_{l,s}(x, y_n)| &\leq c \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |E_l(y)| e^{-c|x'-y'|^2} dy' e^{-cx_n^2} \\ &\leq c \left(\int_{|y'| \leq 1} |E_l(y)| dy' + \int_{|y'| \geq 1} e^{-c|x'-y'|^2} dy' \right) e^{-cx_n^2} \leq ce^{-cx_n^2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Кроме того, полагая $\rho = (|x'|^2 + (x_n + y_n)^2)^{1/2}$ и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} D_x^k J_{l,s}(x, y_n) &= \int_{\sigma_\rho(x)} D_{y'}^{k'} E_l(y) D_{x_n}^{k_n} M_s(x' - y', x_n) dy' \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \sigma_\rho(x)} E_l(y) D_x^k M_s(x' - y', x_n) dy' \\ &\quad + \sum_{j'} \int_{\partial \sigma_\rho(x)} D_{y'}^{j'} E_l(y) D_{x'}^{m'} D_{x_n}^{k_n} M_s(x' - y', x_n) n_i(y') dS_y \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где $\sigma_\rho(x) = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x' - y'|^2 + x_n^2 \leq \rho^2/4\}$ (это множество пусто, если $x_n \geq \rho/2$). Так как

$$|y| = \sqrt{|y'|^2 + y_n^2} \geq \sqrt{|x'|^2 + (x_n + y_n)^2} - \sqrt{|x' - y'|^2 + x_n^2} \geq \frac{\rho}{2}$$

для $y' \in \sigma_\rho(x)$, то

$$|I_1| \leq c \rho^{-(n-2+l+|k'|)} \int_{\sigma_\rho(x)} e^{-c(|x'-y'|^2 + x_n^2)} dy' \leq \frac{ce^{-cx_n^2}}{\rho^{n-2+l+|k'|}}.$$

Далее,

$$|I_2| \leq ce^{-c\rho^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |E_l(y)| e^{-c|x'-y'|^2} dy' \leq ce^{-c\rho^2}.$$

В третьем члене I_3 мультииндексы j' и m' таковы, что $j' + m' + i' = k'$, где

$$i' = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0),$$

а $\vec{n}(y')$ — нормаль к $\sigma_\rho(x)$. Поэтому

$$|I_3| \leq c \sum_{j'} \rho^{n-2} \rho^{-(n-2+l+j')} e^{-c\rho^2} \leq c e^{-c\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^{l+|k'|}}\right).$$

Объединяя полученные оценки с (2.31), приходим к неравенству

$$|D_x^k J_{l,s}(x)| \leq c e^{-c x_n^2} (\rho^2 + 1)^{-\frac{|k'|+l+n-2}{2}},$$

откуда следует (2.30). Предложение доказано.

Переходим к оценкам функций G_{ij} и P_j . Следующий результат вытекает из определения P_j и из предложения 2.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Справедливы неравенства*

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s D_x^k D_z^m P_j(x, z, t) \right| \leq c t^{-1-s-\frac{m_n}{2}} (|x - z^*|^2 + t)^{-\frac{n-1+|k|+|m'|}{2}} e^{-\frac{c z_n^2}{t}}. \quad (2.32)$$

Оценка G_{ij} сводится к оценке функций

$$\begin{aligned} G'_{ij}(x, z, t) &= 4(1 - \delta_{jn}) \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial E(x-y)}{\partial x_i} \Gamma(y - z^*, t) dy \\ &= 4(1 - \delta_{jn}) \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E_i(y) \Gamma(x - z^* - y, t) dy. \end{aligned} \quad (2.33)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Функции G'_{ij} удовлетворяют неравенствам*

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s D_x^k D_z^m G'_{ij}(x, z, t) \right| \leq c t^{-s-\frac{m_n}{2}} (t + x_n^2)^{-k_n/2} (|x - z^*|^2 + t)^{-\frac{n+|k'|+|m'|}{2}} e^{-\frac{c z_n^2}{t}}. \quad (2.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие предложения 2.3 функция

$$J_i(x, z, y_n, t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E_i(y) \Gamma(x - z^* - y, t) dy'$$

подчиняется неравенствам

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s D_x^k D_z^m J_i \right| \leq c t^{-\frac{1}{2}-s-\frac{m_n+k_n}{2}} [|x - z^*|^2 + t]^{-\frac{|k'|+|m'|+n-1}{2}} e^{-\frac{c(x_n+z_n-y_n)^2}{t}}.$$

Отсюда следует, что

$$|G'_{ij}(x, z, t)| \leq c (|x - z^*|^2 + t)^{-n/2} e^{-\frac{c z_n^2}{t}}$$

и, более того,

$$|D_{x'}^{k'} D_z^m G'_{ij}(x, z, t)| \leq c t^{-m_n/2} (|x - z^*|^2 + t)^{-\frac{n+|k'|+|m'|}{2}} e^{-\frac{c z_n^2}{t}}.$$

Подсчитаем производную $\frac{\partial G'_{ij}}{\partial x_n}$. Если $i \neq n$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n} G'_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E_n(x-y) \Gamma(y-z^*, t) dy \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(x'-y', 0) \Gamma(y'-z', x_n+z_n, t) dy', \end{aligned} \quad (2.35)$$

а если $i = n$, то

$$\frac{\partial G'_{nj}}{\partial x_n} = - \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\partial G'_{\mu j}}{\partial x_\mu} + 2 \frac{\Gamma(x-z^*, t)}{\partial x_j}. \quad (2.36)$$

В обоих случаях имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} D_x^{k'} D_z^m G'_{ij} \right| &\leq c(|x-z^*|^2 + t)^{-\frac{n+|k'|+|m'|}{2}} t^{-m_n/2} e^{-\frac{cz_n^2}{t}} \\ &+ ct^{-\frac{1+m_n}{2}} (|x-z^*|^2 + t)^{-\frac{n+|k'|+|m'|+1}{2}} e^{-\frac{c(x_n+z_n)^2}{t}} \\ &\leq c(t+x_n^2)^{-1/2} t^{-m_n/2} (|x-z^*|^2 + t)^{-n/2} e^{-\frac{cz_n^2}{t}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя формулы (2.35) и (2.36) по x_n и применяя несколько раз предложение 2.3, нетрудно получить оценку (2.34) в случае $s = 0$. Для оценки производной $\frac{\partial G'_{ij}}{\partial t}$ воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial G'_{ij}}{\partial t} = \nu \Delta G'_{ij} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i}. \quad (2.37)$$

Оно позволяет вывести из (2.32) и из уже доказанного неравенства (2.34) с $s = 0$ то же неравенство с $s = 1$. Дифференцируя (2.37) по t , получаем (2.34) в общем случае. Предложение доказано.

Так как функция $\Gamma(x-z^*, t)$ также удовлетворяет неравенству (2.34), мы можем записать $G_{ij}(x, z, t)$ в виде

$$G_{ij}(x, z, t) = -\delta_{ij} \Gamma(x-z, t) + G_{ij}^*(x, z, t), \quad G_{ij}^* = \delta_{ij} \Gamma(x-z^*, t) + G'_{ij};$$

в силу (2.34)

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s D_x^k D_z^m G_{ij}^*(x, z, t) \right| \leq ct^{-s-m_n/2} (t+x_n^2)^{-k_n/2} (|x-z^*|^2 + t)^{-\frac{n+|k'|+|m'|}{2}} e^{-\frac{cz_n^2}{t}}. \quad (2.38)$$

Следствием (2.38) является оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |G_{ij}(x, z, t)| dz &\leq \delta_{ij} + c \int_{\mathbb{R}_+^n} (|x-z^*|^2 + t)^{-n/2} e^{-\frac{cz_n^2}{t}} dt \\ &\leq \delta_{ij} + c \int_0^\infty (z_n^2 + t)^{-1/2} e^{-\frac{cz_n^2}{t}} dz_n \leq c, \end{aligned} \quad (2.39)$$

справедливая при любом $t > 0$.

Полученные оценки элементов матрицы Грина G_{ij} позволяют построить решение задачи (2.10) при любом ограниченном непрерывном $\vec{v}_0(x)$. Векторное поле скоростей определяется формулой (2.11₁); оно непрерывно, и вследствие (2.39)

$$|\vec{v}(x, t)| \leq c \sup_{\mathbb{R}_+^n} |\vec{v}_0(y)|, \quad (2.40)$$

а для производных $\vec{v}$ имеем оценки

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s D_x^k \vec{v}(x, t) \right| \leq c \sup_{\mathbb{R}_+^n} |\vec{v}_0(y)| t^{-s-|k|/2}. \quad (2.41)$$

Формула для давления (2.11₂) теряет смысл, так как оценка (2.32) с $s = 0$, $k = 0$, $m = 0$ не гарантирует сходимости интеграла в (2.11₂) при любом ограниченном $\vec{v}_0(y)$. Но для градиента давления имеем обычное представление

$$\nabla p(x, t) = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla P_j(x, y, t) v_{0j}(y) dy,$$

причем вследствие (2.32)

$$\begin{aligned} |\nabla p(x, t)| &\leq c \sup_{\mathbb{R}_+^n} |\vec{v}_0(y)| \int_{\mathbb{R}_+^n} t^{-1} (|x - z^*|^2 + t)^{-n/2} e^{-\frac{cz_n^2}{t}} dz \\ &\leq c \sup_{\mathbb{R}_+^n} |\vec{v}_0(y)| t^{-1/2} (x_n^2 + t)^{-1/2} \xrightarrow{x_n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Можно показать, что построенное решение задачи (2.10) с ограниченным непрерывным $\vec{v}_0$ единственно в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.40)–(2.42).

§ 3. Доказательство теорем 1.1, 1.2

3.1. Случай $\vec{v}_0 = 0$. Сначала положим $\vec{v}_0 = 0$ и рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \nabla p &= \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \vec{v}|_{t=0} &= 0, \quad \vec{v}|_{x \in S} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

в ограниченной или внешней области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ради некоторых технических упрощений будем считать, что $\vec{f}$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0, \quad \vec{f} \cdot \vec{n}|_{x \in S} = 0 \quad (3.2)$$

(т.е. $\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \nabla \varphi dx = 0$ для любой гладкой финитной φ). Как и в случае полупространства, это предположение не является ограничением общности. Получим сначала априорную оценку любого решения $\vec{v} \in W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(Q^T)$ задачи. Оценим

решение в окрестности любой точки $x_0 \in S$. Поместим начало координат в x_0 , повернем оси так, чтобы ось x_n была направлена вдоль внутренней нормали к S в точке x_0 , и введем функции

$$\vec{v}'(x, t) = \vec{v}(x, t)\zeta_\lambda(x), \quad p'(x, t) = p(x, t)\zeta_\lambda(x), \quad (3.3)$$

где $\zeta_\lambda(x) = \zeta((x - x_0)/\lambda)$, $\zeta(z)$ — стандартная срезающая функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная единице при $|z| < 1/2$ и нулю при $|z| > 1$ и являющаяся монотонной функцией $|z|$. Введем новые координаты $y = U^{-1}x$:

$$y' = x', \quad y_n = x_n - F(x'),$$

где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и F — функция, задающая поверхность S вблизи $x_0 = 0$ посредством уравнения $y_n = F(y')$, $|y'| \leq d$. Положим $\vec{v}'(Uz, t) = \vec{u}(z, t)$, $p'(Uz, t) = s(z, t)$, $\zeta_\lambda(Uz) = \zeta_\lambda(z)$ и будем считать эти функции заданными во всем полупространстве $\mathbb{R}_+^n$ и равными нулю вне носителя ζ_λ . Ясно, что $\vec{u}$, s удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu \nabla'^2 \vec{u} + \nabla' s &= \vec{f}' \tilde{\zeta}_\lambda + \vec{f}_1'(z, t), \\ \nabla' \cdot \vec{u} &= \vec{v}' \cdot \nabla' \tilde{\zeta}_\lambda, \quad z \in \mathbb{R}_+^n, \quad t \in [0, T], \\ \vec{u}|_{t=0} &= 0, \quad \vec{u}|_{z_n=0} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - F_1' \frac{\partial}{\partial z_n}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} - F_{n-1}' \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial z_n} \right), \quad F_j' = \frac{\partial F}{\partial z_j}$$

и

$$\vec{f}_1' = s \nabla' \tilde{\zeta}_\lambda - \nu \nabla' \vec{u} (\nabla' \tilde{\zeta}_\lambda) - \nu \vec{u} \nabla'^2 \tilde{\zeta}_\lambda. \quad (3.5)$$

Запишем (3.4) в виде

$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \nu \Delta \vec{u} + \nabla s &= \vec{f} \zeta_\lambda + \vec{f}_1 + \vec{f}_2, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= \vec{v}' \cdot \nabla' \tilde{\zeta}_\lambda + \sum_{j=1}^{n-1} F_j \frac{\partial u_j}{\partial z_n} \equiv g, \\ \vec{u}|_{t=0} &= 0, \quad \vec{u}|_{z_n=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

с $\vec{f}_2 = \nu(\nabla'^2 - \nabla^2)\vec{u} + (\nabla - \nabla')s$.

Воспользуемся оценкой (2.12) для задачи (2.4), убедившись предварительно, что $g_t \in L_r(0, T; \dot{W}_q^{-1}(\mathbb{R}_+^n))$. Для любой $\varphi \in \dot{W}_q^1(\mathbb{R}_+^n)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} g \varphi \, dz = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\vec{v}' \cdot \nabla' \tilde{\zeta}_\lambda (\varphi - \bar{\varphi}) - \sum_{j=1}^{n-1} F_j u_j \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \right) dz,$$

где $\bar{\varphi} = \frac{1}{|B(\lambda)|} \int_{B(\lambda)} \varphi dz$ и $B(\lambda)$ — полушар $\{|z| \leq c\lambda, z_n > 0\}$, содержащий $\text{supp } \tilde{\zeta}_\lambda$.
Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} g_t \varphi dz &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left((\nu \nabla'^2 \vec{v}' - \nabla' p' + \vec{f}') \cdot \nabla' \tilde{\zeta}_\lambda (\varphi - \bar{\varphi}) - \sum_{j=1}^{n-1} F_j u_{jt} \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left\{ -\nu \sum_{k=1}^n \nabla'_k \vec{v}' \cdot \nabla'_k (\nabla' \tilde{\zeta}_\lambda (\varphi - \bar{\varphi})) + p' \nabla' \cdot (\nabla' \tilde{\zeta}_\lambda (\varphi - \bar{\varphi})) \right. \\ &\quad \left. + \vec{f}' \cdot \nabla' \tilde{\zeta}_\lambda (\varphi - \bar{\varphi}) - \sum_{j=1}^{n-1} F_j u_{jt} \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \right\} dz \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p' \left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j \nabla'_j - \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \tilde{\zeta}'_\lambda (\varphi - \bar{\varphi}) dz' \Big|_{z_n=0} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} F_j \nabla'_j - \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \vec{v}' \cdot \nabla' \tilde{\zeta}'_\lambda (\varphi - \bar{\varphi}) dz' \Big|_{z_n=0}. \end{aligned}$$

Оценивая $\varphi - \bar{\varphi}$ с помощью неравенства Пуанкаре, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+^n} g_t \varphi dx \right| &\leq c \|\nabla \varphi\|_{L_{q'}(\mathbb{R}_+^n)} \left(\lambda^{-1} \|\nabla \vec{v}'\|_{L_q(B(\lambda))} + \lambda^{-1} \|p'\|_{L_q(B(\lambda))} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{-1+1/q} \|\nabla \vec{v}'\|_{L_{q'}(b(\lambda))} + \lambda^{-1+1/q} \|p'\|_{L_q(b(\lambda))} \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{f}'\|_{L_{q'}(B(\lambda))} + \max_{B(\lambda)} |\nabla' F| \|\vec{u}_t\|_{L_q(B(\lambda))} \right), \end{aligned}$$

где $b(\lambda)$ — плоская часть границы $B(\lambda)$. Так как $S \in C^2$, то $\max_{B(\lambda)} |\nabla' F| \leq c\lambda$, так что

$$\begin{aligned} \|g_t(\cdot, t)\|_{\dot{W}_q^1(\mathbb{R}_+^n)} &\leq c \left(\lambda^{-1} \|\nabla \vec{v}'\|_{L_q(B(\lambda))} + \lambda^{-1+1/q} \|\nabla \vec{v}'\|_{L_q(b(\lambda))} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{-1} \|p'\|_{L_q(B(\lambda))} + \lambda^{-1+1/q} \|p'\|_{L_q(b(\lambda))} \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{f}'\|_{L_{q,r}(B(\lambda))} + \lambda \|\vec{u}_t\|_{L_q(B(\lambda))} \right). \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь оценкой (2.25), получаем при достаточно малом λ

$$\begin{aligned} &\|\vec{u}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi_+^T)} + \|\nabla q\|_{L_{q,r}(\Pi_+^T)} \\ &\leq c \left(\|\vec{f}'\|_{L_{q,r}(B(\lambda) \times (0,T))} + \lambda^{-1} \|\nabla \vec{v}'\|_{L_{q,r}(B(\lambda) \times (0,T))} + \lambda^{-1} \|p'\|_{L_{q,r}(B(\lambda) \times (0,T))} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{-1+1/q} (\|p'\|_{L_{q,r}(b(\lambda) \times (0,T))} + \|\nabla \vec{v}'\|_{L_{q,r}(b(\lambda) \times (0,T))}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{-2} \|\vec{v}'\|_{L_{q,r}(B(\lambda) \times (0,T))} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Это неравенство справедливо в λ -окрестности любой точки S . Выбрав конечную достаточно густую сеть таких точек $x^{(k)}$, мы покроем их окрестностями пограничную

полоску S ширины $\lambda/4$. Остается оценить решения во внутренней подобласти $\Omega_\lambda \subset \Omega$, точки которой отстоят от S не менее чем на $\lambda/4$. Введем снова функции (3.3), понимая теперь под ζ_λ функцию, равную единице в Ω_λ и нулю в $\Omega \setminus \Omega_{\lambda/2}$. Будем считать $\vec{v}'$ и p' равными нулю в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ и рассмотрим их как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \vec{v}'_t - \nu \Delta \vec{v}' + \nabla p' &= \vec{f}\zeta_\lambda + \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{v}' = \nabla \zeta_\lambda \cdot \vec{v}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \vec{v}'|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{с } \vec{f}_1 = p\nabla\zeta_\lambda - \nu\nabla\vec{v}(\nabla\zeta_\lambda) - \nu\vec{v}\nabla^2\zeta_\lambda.$$

Повторив проведенное выше рассуждение (но использовав (2.27) вместо (2.25)), придем к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\vec{v}'\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi^T)} + \|\nabla p'\|_{L_{q,r}(\Pi^T)} \\ &\leq c \left(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(\Omega_{\lambda/2} \times (0,T))} + \lambda^{-1} \|\nabla \vec{v}\|_{L_{q,r}(C(\lambda) \times (0,T))} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{-2} \|\vec{v}\|_{L_{q,r}(C(\lambda) \times (0,T))} + \lambda^{-1} \|p\|_{L_{q,r}(C(\lambda) \times (0,T))} \right), \end{aligned}$$

где $C(\lambda) = \Omega_{\lambda/2} \setminus \Omega_\lambda$. Сложим эту оценку и неравенство (3.7) при всех $x^{(k)}$ (число этих точек конечно). Это даст

$$\begin{aligned} &\|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(Q^T)} \\ &\leq c \left(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \|\nabla \vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))} + \|p\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla \vec{v}\|_{L_{q,r}(S \times (0,T))} + \|p\|_{L_{q,r}(S \times (0,T))} + \|\vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))} \right), \quad (3.8) \end{aligned}$$

где Ω_1 — некоторая ограниченная область, прилегающая к границе (так что $(\Omega \setminus \Omega_1) \cap S = \emptyset$).

Для исключения некоторых норм p и $\nabla \vec{v}$ из правой части (3.8) воспользуемся интерполяционными неравенствами

$$\|\nabla \vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))} \leq \theta_1 \sum_{|j|=2} \|D^j \vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))} + c\theta_1^{-1} \|\vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))}, \quad (3.9)$$

$$\|\nabla \vec{v}\|_{L_{q,r}(S \times (0,T))} \leq c\theta_2^{1-1/q} \sum_{|j|=2} \|D^j \vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))} + c\theta_2^{-1-1/q} \|\vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))}, \quad (3.10)$$

$$\|p\|_{L_{q,r}(S \times (0,T))} \leq c\theta_3^{1-1/q} \|\nabla p\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))} + c\theta_3^{-1/q} \|p\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))}, \quad (3.11)$$

справедливыми при сколь угодно малых положительных θ_i . Кроме того, примем во внимание, что $p(x, t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{x \in S} &= \nu \vec{n} \cdot \Delta \vec{v} = \nu \sum_{i,k=1}^n \left(n_k \frac{\partial}{\partial x_i} - n_i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x \in S}. \end{aligned}$$

Из представления решения этой задачи в виде потенциала простого слоя следует (см. [4]), что

$$\|p\|_{L_{q,r}(S \times (0,T))} \leq c \|\nabla \vec{v}\|_{L_{q,r}(S \times (0,T))}.$$

Отсюда и из оценок (3.8) и (3.9)–(3.11) с достаточно малыми θ_i вытекает неравенство

$$\|\vec{v}\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(Q^T)} \leq c_1 \|\vec{f}\|_{L_{q,r}(Q^T)} + c_2 \|\vec{v}\|_{L_{q,r}(\Omega_1 \times (0,T))}, \quad (3.12)$$

в котором постоянные c_1 и c_2 не зависят от T .

Ясно, что (3.12) справедливо и для любого $t < T$ с теми же самыми постоянными. Отсюда с помощью леммы Гронуолла легко вывести оценку (1.5) или (1.10) (при $\vec{v}_0 = 0, g = 0$) с постоянной $c = c(T)$.

Более точный результат может быть получен, если воспользоваться для оценки последнего члена в (3.12) представлением решения задачи (1.1) с $\vec{v}_0 = 0$ через резольвенту оператора Стокса, оценки которой будут приведены ниже в § 4. В случае ограниченной области это приводит к неравенству (1.5) с постоянной, не зависящей от T . В случае внешней области оценок резольвенты для доказательства (1.10) не достаточно; это неравенство было доказано различными способами в [7], [10]. Мы не можем привести здесь все детали доказательства.

Приведем доказательство разрешимости задачи (1.1) из работы [11] (единственность решения из рассматриваемого класса является следствием из доказанной выше априорной оценки). Будем считать, что $\vec{f}(x, t)$ принадлежит плотному в $L_{q,r}(Q^T)$ множеству гладких финитных векторных полей. Хорошо известно [23], что задача (1.1) с $\vec{v}_0 = 0$ имеет единственное обобщенное решение, которое на самом деле принадлежит классу $W_2^{2,1}(Q^T)$, а $\nabla p \in L_2(Q^T)$. Следуя работам [24], [11], введем усреднение по t

$$\vec{f}_\rho(x, t) = \int_{|s| < \rho} \omega_\rho(t-s) \vec{f}(x, s-\rho) ds,$$

где ω_ρ – усредняющее ядро С. Л. Соболева, $f(x, t) = 0$ при $t < 0$, и заметим, что $(\vec{v}_\rho, p_\rho)$ – решение задачи

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\rho t} - \nu \Delta \vec{v}_\rho + \nabla p_\rho &= \vec{f}_\rho, & \operatorname{div} \vec{v}_\rho &= 0, \\ \vec{v}_\rho|_{t=0} &= 0, & \vec{v}_\rho|_{x \in S} &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что $\vec{v}_\rho, \vec{v}_{\rho t} \in C(0, T'; W_2^2(\Omega))$, $T' < T$, а значит, $\vec{v}_{\rho t} \in C(0, T'; L_{q_1}(\Omega))$, $1/q_1 \geq 1/2 - 2/n$. Перенеся $\vec{v}_{\rho t}$ в правую часть уравнения и рассмотрев $\vec{v}_\rho$ как решение стационарной задачи Стокса с $\vec{f}_\rho - \vec{v}_{\rho t}$ в правой части, заключаем, что $\vec{v}_\rho \in C(0, T'; W_{q_1}^2(\Omega))$. Затем можно показать, что $\vec{v}_\rho \in C(0, T'; W_{q_2}^2(\Omega))$, $1/q_2 \geq 1/q_1 - 2/n \geq 1/2 - 4/n$, и наконец, что $\vec{v}_\rho \in W_{q,r}^{2,1}(\Omega^T)$ с любыми $r > 1, q \geq 2$. Переходя к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и используя полученную выше априорную оценку, видим, что $\vec{v} \in W_{q,r}^{2,1}(\Omega^T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(Q^T)$. Чтобы получить тот же самый результат при $q < 2$, нужно лишь оценить при $|x| \geq R \gg 1$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \nu \Delta \vec{u} + \nabla s &= \vec{f}\zeta_0 + \vec{f}_1, & \operatorname{div} \vec{u} &= \vec{v} \cdot \nabla \zeta_0, \\ \vec{u}|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

где $\vec{u} = \zeta_0 \vec{v}$, $s = \zeta_0 p$, $\vec{f}_1 = -2\nu \nabla \vec{v} \nabla \zeta_0 - \nu \vec{v}_0 \nabla^2 \zeta_0 + s \nabla \zeta_0$, ζ_0 — та же функция, что в §1. Мы имеем

$$\vec{u} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{T}(x-y, t-\tau) (\vec{f} \zeta_0(y) + \vec{f}_1(y, \tau)) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla E(x-y) (\vec{v} \cdot \nabla \zeta_0(y)) dy.$$

Отсюда следует конечность нормы

$$\|\vec{u}\|_{L_r(0,T; \dot{W}_q^2(B^R))},$$

где $B^R = \{|x| > R\}$, а так как $\int \vec{v} \cdot \nabla \zeta_0 dy = 0$, то

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \nabla E(x-y) \vec{v} \cdot \nabla \zeta_0 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\nabla E(x-y) - \nabla E(x-y_0)) \vec{v} \cdot \nabla \zeta_0 dy, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

и можно заключить, что конечна и норма $\|\vec{v}_t\|_{L_{q,r}(B^R \times (0,T))}$. Таким образом, $\vec{v} \in W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(Q^T)$, что и требовалось.

3.2. Задача для системы Стокса с ненулевой дивергенцией. Рассмотрим теперь более общую, чем (1.1), задачу

$$\begin{aligned} \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \nabla p &= \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = g, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T], \\ \vec{v}|_{t=0} &= \vec{v}_0(x), \quad \vec{v}|_{x \in S} = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть Ω — ограниченная область, $g \in L_r(0, T; W_q^1(\Omega))$, $\vec{f} \in L_{q,r}(Q^T)$, существует производная $g_t \in L_r(0, T; W_q^{-1}(\Omega))$, $\vec{v}_0 \in B_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$ согласовано с нулем на границе и выполняются условия согласования

$$\operatorname{div} \vec{v}_0(x) = g(x, 0), \quad (3.14)$$

$$\int_{\Omega} g(x, t) dx = 0. \quad (3.15)$$

Тогда задача (3.13) имеет единственное решение $\vec{v} \in W_{q,r}^{2,1}(Q_T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(Q_T)$, и выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}\|_{W_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(Q^T)} \\ & \leq c \left(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \|g\|_{L_r(0,T;W_q^1(\Omega))} + \|g_t\|_{L_r(0,T;W_q^{-1}(\Omega))} + \|\vec{v}_0\|_{q,\Omega}^{2-2/r} \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что Ω – внешняя область, $\vec{f} \in L_{q,r}(Q^T)$, $g \in L_r(0, T; \widetilde{W}_q^1(\Omega))$, существует производная $g_t \in L_r(0, T; \widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))$, $\vec{v}_0 \in \widetilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$ и выполнено условие согласования*

$$\operatorname{div} \vec{v}_0(x) = g(x, 0). \quad (3.16)$$

Тогда задача (3.13) имеет единственное решение $\vec{v} \in \widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $\nabla p \in L_{q,r}(Q^T)$ и

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}\|_{\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p\|_{L_{q,r}(Q^T)} \\ & \leq c \left(\|\vec{f}\|_{L_{q,r}(Q^T)} + \|g\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^1(\Omega))} + \|g_t\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))} + \|\vec{v}_0\|_{\widetilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если $n \geq 3$, $q < n/2$, то постоянная c не зависит от T .

Условия (3.14), (3.16) понимаются в обобщенном смысле как

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{V}(x, t) - g(x, t)) \varphi(x) dx = 0 \quad (3.18)$$

для любого $\vec{V} \in W_{q,r}^{2,1}(Q^T)$ ($\vec{V} \in \widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$ в случае внешней области) такого, что $\vec{V}|_{t=0} = \vec{v}_0(x)$, и для любой гладкой финитной $\varphi(x)$. В частности, если $g(x, t) = 0$, то (3.18) влечет за собой

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \vec{V}(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \vec{v}_0(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx,$$

что означает, что $\vec{v}_0$ удовлетворяет (возможно, в слабом смысле) условиям (1.2).

Как обычно,

$$\|g\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|g(\cdot, t)\|_{\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega)}^r dt \right)^{1/r},$$

где

$$\|g\|_{\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|_{W_{q'}^1(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} g \varphi dx \right|, \quad 1/q' = 1 - 1/q.$$

Так же определяется норма $\|g\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))}$.

Теоремы 3.1 и 3.2 доказываются путем сведения задачи (3.13) к задаче (3.1) по схеме, которая проведена в работе [15] в случае ограниченной области Ω . В случае внешней области нам потребуются следующие вспомогательные предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть Ω – внешняя область. Для любой функции $u \in \widetilde{W}_q^1(\Omega)$ справедливы неравенства:

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \leq c \|u\|_{\widetilde{W}_q^1(\Omega)}, \quad (3.19)$$

где $1/s = 1/q - 1/n$, $q < n$;

$$\left(\int_{\Omega} |u(x)|^q \frac{dx}{|x - x_0|^q} \right)^{1/q} \leq c \|u\|_{\widetilde{W}_q^1(\Omega)}, \quad (3.20)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $q > n$; u

$$\left(\int_{\Omega} |u(x)|^n \frac{dx}{|x - x_0|^n \left(\log \frac{|x - x_0|}{h} \right)^n} \right)^{1/n} \leq c \|u\|_{\widetilde{W}_n^1(\Omega)}, \quad (3.21)$$

где $h < \text{dist}(x_0, S)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Всякая функция $u \in \widetilde{W}_q^1(\Omega)$ может быть аппроксимирована в норме $\widetilde{W}_q^1(\Omega)$ финитными функциями $u(x)\psi_m(x)$, где

$$\begin{aligned} \psi_m(x) &= \zeta\left(\frac{|x|}{m}\right), & \text{если } q \neq n, \\ \psi_m(x) &= \zeta\left(\log\left(\frac{\log|x - x_0|/h}{m}\right)\right), & \text{если } q = n, \end{aligned}$$

$\zeta(t)$ – функция из $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ с носителем в интервале $0 \leq t < 1$, обладающая свойствами: $\zeta(t) = 1$ для $0 \leq t \leq 1/2$, $0 \leq \zeta(t) \leq 1$.

Неравенство (3.19) – это хорошо известная теорема вложения Соболева, а (3.20) и (3.21) – неравенства Харди, так что доказательство предложения 3.1 не приводится. Предложение 3.2 следует из предложения 3.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть Ω – внешняя область. Для всякой функции $\vec{v}_0 \in \widetilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)$ существует функция $\vec{V}_0 \in \widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$ такая, что $\vec{V}_0(x, 0) = \vec{v}_0(x)$, $\vec{V}_0(x, t)|_{x \in S} = 0$ и

$$\|\vec{V}_0\|_{\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} \leq c \|\vec{v}_0\|_{\widetilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)}. \quad (3.22)$$

Если $n \geq 3$, $q < n/2$, то постоянная c от T не зависит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_M$ – разбиение единицы из § 1. Для каждого $k = 0, \dots, M$ определим функцию $\vec{V}_k$ по формулам

$$\begin{aligned} \vec{V}_0(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t) \vec{v}_0 \zeta_0(\xi) d\xi, \\ \vec{V}_k(z, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z - \xi, t) \vec{v}_k^{(-)}(\xi) d\xi, \quad k = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

где $\vec{v}_k^{(-)}$ – нечетное продолжение $\vec{v}_k'(\xi) = \vec{v}_0(T_k^{-1}\xi)\zeta_k(T_k^{-1}\xi)$ на все $\mathbb{R}^n$. Вследствие неравенства (2.22)

$$\begin{aligned}\|\vec{V}_0\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi^T)} &\leq c\|\vec{v}_0\zeta_0\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}, \\ \|\vec{V}_k\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi^T)} &\leq c\|\vec{v}_k^{(-)}\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}, \quad k = 1, \dots, M,\end{aligned}$$

кроме того, для любой ограниченной подобласти $\Omega'_{\mathbb{R}^n}$

$$\begin{aligned}\|\vec{V}_0\|_{L_{q,r}(\Omega' \times (0, t_0))} &\leq \|\vec{v}_0\zeta_0\|_{L_q(\Omega')} + t_0\|\vec{V}_0\|_{L_{q,r}(\Omega' \times (0, t_0))} \\ &\leq \|\vec{v}_0\zeta_0\|_{L_q(\Omega')} + ct_0\|\vec{v}_0\zeta_0\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)}, \\ \|\vec{V}_k\|_{L_{q,r}(\Omega' \times (0, t_0))} &\leq \|\vec{v}_k^{(-)}\|_{L_q(\Omega')} + ct\|\vec{v}_k^{(-)}\|_{\dot{B}_{q,r}^{2-2/r}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

а если $n \geq 3$, $q < n/2$, то вследствие теоремы вложения С. Л. Соболева

$$\begin{aligned}\|\vec{V}_j\|_{L_{q,r}(\Omega' \times (0, t_0))} &\leq c\|\vec{V}_j\|_{L_{s,r}(\Pi^T)} \leq c\|\vec{V}_j\|_{\dot{W}_{q,r}^{2,1}(\Pi^T)}, \\ j &= 0, 1, \dots, M, \quad 1/s = 1/q - 2/n,\end{aligned}\tag{3.23}$$

с постоянными, не зависящими от T . Функцию $\vec{V}$ определим равенством

$$\vec{V}(x, t) = \chi_0\vec{V}_0(x, t) + \sum_{j=1}^M \chi_j(x)\vec{V}_j(T_k^{-1}x, t),$$

где $\chi_k(x)$ – гладкие функции с компактными носителями такие, что $\chi_k(x)\zeta_k(x) = \zeta_k(x)$ и $\text{supp } \chi_0 \subset \Omega$. Ясно, что $\vec{V}$ обладает всеми необходимыми свойствами. Предложение доказано.

Приступим теперь к доказательству теорем 3.1 и 3.2. Будем искать решение задачи (3.13) в виде суммы

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \\ p &= p_2 + p_3,\end{aligned}$$

где $\vec{v}_1 = \vec{V}_0$ – векторное поле, определенное в предложении 3.3, а $(\vec{v}_2, p_2)$ – решение стационарной задачи

$$\begin{aligned}-\nu\Delta\vec{v}_2 + \nabla p_2 &= 0, \quad \text{div } \vec{v}_2 = g - \text{div } \vec{v}_1 \equiv g', \quad x \in \Omega, \\ \vec{v}|_S &= 0.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Тогда для $(\vec{v}_3, p_3)$ получаем задачу типа (3.1):

$$\begin{aligned}\vec{v}_{3t} - \nu\Delta\vec{v}_3 + \nabla p_3 &= \vec{f} - \vec{v}_{1t} + \nu\Delta\vec{v}_1 - \vec{v}_{2t} \equiv \vec{f}, \\ \text{div } \vec{v}_3 &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \vec{v}_3|_{t=0} &= 0, \quad \vec{v}_3|_{x \in S} = 0.\end{aligned}$$

Функция $\vec{v}_1$ была оценена в предложении 3.3. Рассмотрим задачу (3.24). Аппроксимируем g' финитными функциями $g'_m = g'(x)\psi_m(x)$, как указано в предложении 3.2, и определим $(\vec{v}_2^{(m)}, p_2^{(m)})$ как решение задачи

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\vec{v}_2^{(m)} + \nabla p_2^{(m)} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{v}_2^{(m)} = g'_m(x, t), \quad x \in \Omega, \\ \vec{v}_2^{(m)}|_S &= 0, \quad \vec{v}_2^{(m)}, p_2^{(m)} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (\vec{v}_2^{(m)} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \text{const при } n = 2). \end{aligned}$$

Оно может быть найдено в форме

$$\begin{aligned} \vec{v}_2^{(m)}(x, t) &= \int_{\Omega} \nabla E(x-y) g'_m(y, t) dy + \vec{w}_2^{(m)}(x, t) \\ &= \int_{\Omega} E(x-y) \nabla g'_m(y, t) dy + \int_{\Omega} E(x-y) \vec{n}(y) g'(y, t) dS + \vec{w}_2^{(m)}(x, t), \\ p_2^{(m)}(x, t) &= \nu g'_m(x, t) + r_2^{(m)}(x, t), \end{aligned}$$

где $\vec{w}_2^{(m)}, r_2^{(m)}$ — решение задачи с неоднородным краевым условием

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\vec{w}_2^{(m)} + \nabla r_2^{(m)} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{w}_2^{(m)} = 0, \\ \vec{w}_2^{(m)}|_{x \in S} &= -\vec{w}_1^{(m)}|_{x \in S}, \\ \vec{w}_2^{(m)}(x, t) &\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (n \geq 3), \quad \vec{w}_2^{(m)}(x, t) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \text{const} \quad (n = 2). \end{aligned}$$

При $n \geq 3, q < n/2$ имеет место неравенство

$$\|\vec{v}_2^{(m)}(\cdot, t)\|_{\widetilde{W}_q^2(\Omega)} + \|\nabla p_2^{(m)}\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|g'_m\|_{\widetilde{W}_q^1(\Omega)} \leq c \|g'\|_{\widetilde{W}_q^1(\Omega)}$$

(ср. с [25; теорема 1]), а значит,

$$\|\vec{v}_2^{(m)}\|_{\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p_2^{(m)}\|_{L_{q,r}(Q^T)} \leq c \|g'_m\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^1(\Omega))} \quad (3.25)$$

с постоянной, не зависящей от T .

При $q \geq n/2$ эта оценка не имеет места, но $\vec{v}_2^{(m)} \in \widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $\nabla p^{(m)} \in L_{q,r}(Q^T)$ при всех $m \geq 1$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\vec{\varphi}(x) + \nabla\pi(x) &= \vec{f}(x), \quad \operatorname{div} \vec{\varphi}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \vec{\varphi}|_S &= 0, \quad \vec{\varphi}(x), \pi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (n \geq 3), \\ \vec{\varphi}(x) &\rightarrow \text{const} \quad (n = 2) \end{aligned} \quad (3.26)$$

для некоторого гладкого финитного векторного поля $\vec{f}(x)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{v}_2^{(m)}(x, t) \cdot \vec{f}(x) dx &= - \int_{\Omega} g'_m(x, t) \pi(x) dx + \int_{\Omega} \vec{\varphi}(x) \cdot (-\nu\Delta\vec{v}_2^{(m)} + \nabla p_2^{(m)}) dx \\ &= - \int_{\Omega} g'_m(x, t) \pi(x) dx. \end{aligned}$$

Вследствие (3.18) интеграл в правой части стремится к нулю при $t \rightarrow 0$, кроме того, он имеет производную по t из $L_r(0, T)$. При почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} g'_m \pi(x) dx \right| &\leq c \|g'_t(\cdot, t)\|_{\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega)} \|\psi_m \pi\|_{\widetilde{W}_{q'}^1(\Omega)} \\ &\leq \left(\|g_t(\cdot, t)\|_{\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega)} + \|\vec{v}_{1t}(\cdot, t)\|_{L_q(\Omega)} \right) \|\pi\|_{\widetilde{W}_{q'}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

В [25] показано, что при любом $q' > 1$ в пространстве $L_{q'}(\Omega)$ существуют такие плотные множества финитных векторных полей $\vec{f}$, что решение задачи (3.26) подчиняется неравенству

$$\|\vec{\varphi}\|_{\widetilde{W}_{q'}^2(\Omega)} + \|\pi\|_{\widetilde{W}_{q'}^1(\Omega_1)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_{q'}(\Omega)};$$

следовательно, для любого $\vec{f}$ из соответствующего плотного множества имеем

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{v}_2^{(m)}(x, t) \cdot \vec{f}(x) dx \right| \leq \left(\|g_t(\cdot, t)\|_{\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega)} + \|\vec{v}_{1t}(\cdot, t)\|_{L_q(\Omega)} \right) \|\vec{f}\|_{L_{q'}(\Omega)}.$$

Это значит, что $\vec{v}_{2t}^{(m)} \in L_{q,r}(Q^T)$ и

$$\|\vec{v}_{2t}^{(m)}\|_{L_{q,r}(\Omega)} \leq c \left(\|g_t\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))} + \|\vec{v}_{1t}\|_{L_{q,r}(\Omega)} \right). \quad (3.27)$$

Так как $\vec{v}_2^{(m)}(x, 0) = 0$, то

$$\|\vec{v}_2^{(m)}(\cdot, t)\|_{L_q(\Omega)} \leq \int_0^t \|\vec{v}_{2t}^{(m)}(\cdot, \tau)\|_{L_q(\Omega)} d\tau,$$

а значит,

$$\|\vec{v}_2^{(m)}(\cdot, t)\|_{L_{q,r}(\Omega)} \leq cT \left(\|g_t\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))} + \|\vec{v}_{1t}\|_{L_{q,r}(\Omega)} \right).$$

Воспользовавшись теперь справедливой при всех $q > 1$ оценкой

$$\|\vec{v}_2^{(m)}(\cdot, t)\|_{\dot{W}_q^2(\Omega)} + \|\nabla p_2^{(m)}\|_{L_q(\Omega)} \leq c \left(\|g'_m\|_{\dot{W}_q^1(\Omega)} + \|\vec{v}_2^{(m)}(\cdot, t)\|_{L_q(\Omega)} \right)$$

и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, заключаем, что задача (3.24) имеет решение $\vec{v}_2 \in \widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)$, $\nabla p_2 \in L_{q,r}(Q^T)$, для которого справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_2\|_{\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} + \|\nabla p_2\|_{L_{q,r}(Q^T)} &\leq c \left(\|g\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^1(\Omega))} + \|g_t\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))} + \|\vec{v}_1\|_{\widetilde{W}_{q,r}^{2,1}(Q^T)} \right) \\ &\leq c \left(\|g\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^1(\Omega))} + \|g_t\|_{L_r(0,T;\widetilde{W}_q^{-1}(\Omega))} + \|\vec{v}_0\|_{\widetilde{B}_{q,r}^{2-2/r}(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

причем постоянная c не зависит от T , если $n \geq 3$ и $q < n/2$ (благодаря (3.23) и (3.25)). Таким образом, задача (3.13) свелась к (3.1). Оценка (3.17) следует из (3.22), (3.28), (1.10) ($c \vec{v}_0 = 0$). Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Оценка резольвенты оператора Стокса

Переходим к рассмотрению задачи (1.3). Приведем оценку решения этой задачи, полученную в работе [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любого решения $\vec{u} \in W_q^2(\Omega)$ задачи (1.3) справедлива оценка (1.11), если $\lambda \in \Sigma_{\rho, \omega} = \{|\arg \lambda| \leq \pi/2 + \omega, |\lambda| > \rho\}$ при некоторых $\rho > 0$ и $\omega \in (0, \pi/2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta(\sigma)$ — гладкая монотонная функция положительного аргумента, равная нулю при $\sigma \leq 1/2$ и единице при $\sigma \geq 1$. Если $\vec{u}(x)$, $s(x)$ — решение задачи (1.3), то

$$\vec{v}(x, t) = \vec{u}(x)e^{\lambda t}(1 - \eta(th)), \quad p(x, t) = s(x)e^{\lambda t}(1 - \eta(th)),$$

$h > 0$ — решение задачи (3.1) при

$$\vec{f}(x, t) = \vec{f}(x)e^{\lambda t}(1 - \eta(th)) - h\eta'(th)\vec{u}(x)e^{-\lambda t}$$

и оценка (3.12) с $r = q$ влечет за собой

$$\begin{aligned} & |\lambda| \|\vec{u}\|_{L_q(\Omega)} + \|\vec{u}\|_{\dot{W}_q^2(\Omega)} + \|\nabla s\|_{L_q(\Omega)} \\ & \leq c_1 \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)} + \left(c_2 + h\psi^{1/q}(\lambda, h, T)\Phi^{-1/q}(\lambda, h, T)(c_1 + 1) \right) \|\vec{u}\|_{L_q(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, h, T) &= \int_0^T (1 - \eta(th))^q e^{qt \operatorname{Re} \lambda} dt, \\ \Psi(\lambda, h, T) &= \int_0^T (\eta'(th))^q e^{qt \operatorname{Re} \lambda} dt. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы $\rho > c_2$, и подберем параметры h и T так, чтобы

$$|\lambda|^{-1} h \Psi^{1/q} \Phi^{-1/q} (c_1 + 1) \leq \beta, \quad \beta < 1 - c_2/\rho, \quad (4.2)$$

тогда

$$c_2 + h(c_1 + 1)\Psi^{1/q}\Phi^{-1/q} \leq c_2 + \beta|\lambda| \leq \gamma|\lambda|$$

с $\gamma = \beta + c_2/\rho < 1$, а значит, из (4.1) будет следовать

$$(1 - \gamma)|\lambda| \|\vec{u}\|_{L_q(\Omega)} + \|\vec{u}\|_{\dot{W}_q^2(\Omega)} + \|\nabla s\|_{L_q(\Omega)} \leq c_1 \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)},$$

откуда вытекает (1.11).

Заметим, что Φ и Ψ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \Phi &\geq \int_{1/h}^T e^{qt \operatorname{Re} \lambda} dt = \frac{e^{qT \operatorname{Re} \lambda} - e^{q \operatorname{Re} \lambda/h}}{q \operatorname{Re} \lambda}, \\ \Psi &\leq \max |\eta'(s)| \int_{1/2h}^{1/h} e^{qt \operatorname{Re} \lambda} dt \leq \max |\eta'(s)|^q \frac{e^{q \operatorname{Re} \lambda/h} - e^{q \operatorname{Re} \lambda/2h}}{q \operatorname{Re} \lambda}, \end{aligned}$$

если $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, и

$$\Phi \geq T - \frac{1}{h}, \quad \Psi \leq \frac{2}{h} \max |\eta'(s)|^q,$$

если $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Поэтому при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ левая часть в (4.2) может быть сделана сколь угодно малой, если положить $h = |\operatorname{Re} \lambda|$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $h = 1$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ и выбрать T достаточно большим: $T \operatorname{Re} \lambda \gg 1$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $T \gg 1$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$; в случае $\operatorname{Re} \lambda < 0$ можно взять $h = |\operatorname{Re} \lambda|$, $T |\operatorname{Re} \lambda| > 2$ и потребовать, чтобы отношение $h/|\lambda| = |\operatorname{Re} \lambda|/|\lambda|$ было достаточно малым, что имеет место при малом ω . Во всех случаях неравенство (4.2) может быть удовлетворено. Предложение доказано.

Из доказательства ясно, что если неравенство (3.12) справедливо с $c_2 = 0$ и c_1 не зависит от T , то можно взять выше $\rho = 0$ (см. [11; теорема 4.3]).

Для ограниченной области справедлива и более сильная, чем (1.11), оценка решений задачи (1.3), а именно,

$$(|\lambda| + 1) \|\vec{u}\|_{L_q(\Omega)} + \sum_{|j|=2} \|D^j \vec{u}\|_{L_q(\Omega)} + \|\nabla s\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)}, \quad (4.3)$$

причем λ может принадлежать множеству

$$\Sigma_{\omega,0} \cup \{-b < \operatorname{Re} \lambda \leq 0\} = \Sigma_{\omega,0,b},$$

где b – некоторое положительное число. Она вытекает из предложения 4.1 и из несложного дополнительного исследования задачи (1.3) с $|\lambda| < \rho$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если Ω – ограниченная область, то решение задачи (1.3) $(\vec{u}, s)$ подчиняется неравенству (4.3) для всех $\lambda \in \Sigma_{\omega,0,b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно ограничиться рассмотрением случая $|\lambda| < \rho$, и тогда (4.3) сводится к оценке

$$\|\vec{u}\|_{W_q^2(\Omega)} + \|\nabla s\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)}. \quad (4.4)$$

Оператор Стокса не имеет собственных значений при $-b < \operatorname{Re} \lambda < 0$ с некоторым $b > 0$, откуда следует разрешимость задачи (4.3) и оценка (4.4) при $q = 2$, когда λ удовлетворяет всем указанным выше ограничениям. По теореме о гладкости решений эллиптических краевых задач (4.4) имеет место и при $q > 2$. При $q < 2$ следует воспользоваться соображениями двойственности. Если $\vec{f}$ принадлежит плотному в $L_q(\Omega)$ множеству гладких векторных полей, то задача (1.3) имеет решение $\vec{u} \in W_2^2(\Omega)$, $\nabla s \in L_2(\Omega)$. Возьмем произвольное $\vec{g} \in L_{q'}(\Omega)$; так как $q' > 2$, то задача

$$\lambda \vec{\varphi} - \nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi = \vec{g}, \quad \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0, \quad \vec{\varphi}|_S = 0$$

имеет единственное решение $\vec{\varphi} \in W_{q'}^2(\Omega)$, $\nabla \pi \in L_{q'}(\Omega)$, и справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{g} \, dx = \int_{\Omega} (\lambda \vec{\varphi} - \nu \Delta \vec{\varphi}) \cdot \vec{u} \, dx = \int_{\Omega} (\lambda \vec{u} - \nu \Delta \vec{u}) \cdot \vec{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\varphi} \, dx.$$

Отсюда следует

$$\left| \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{g} dx \right| \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)} \|\vec{\varphi}\|_{L_{q'}(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)} \|\vec{g}\|_{L_{q'}(\Omega)},$$

а значит, $\|\vec{u}\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)}$. Рассмотрим $\vec{u}$, s как решение задачи Стокса

$$-\nu \Delta \vec{u} + \nabla s = \vec{f} - \lambda \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \vec{u}|_S = 0,$$

получаем (4.3) и при $q < 2$, что и завершает доказательство предложения.

Переходим к краткому изложению основного результата работы [8]. В ней используются оценка (1.11) для ограниченной области, аналогичная оценка Мак-Крекен [19] для всего пространства $\mathbb{R}^n$ и следующее вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть Ω – внешняя область. При любом гладком финитном $\vec{f}$ и любом $\lambda \in \Sigma_{\omega,0}$, $0 < |\lambda| \leq \rho$, задача (1.3) имеет решение $\vec{u} \in W_q^2(\Omega)$, $\nabla s \in L_q(\Omega)$ с любым $q > 1$, и

$$\|\vec{u}\|_{W_q^2(\Omega)} + \|\nabla s\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_q(\Omega)}. \quad (4.5)$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 4.2; для оценки решения задачи Стокса во внешней области следует воспользоваться результатами работы [25].

Основной результат работы [8] состоит в следующем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Решение задачи (1.3) во внешней области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, подчиняется неравенству (1.13) при любом $\lambda \in \Sigma_{\omega,0}$ $\forall \omega > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать (1.13) при дополнительном предположении $|\lambda| \leq \rho$. Кроме того, сначала предполагается, что $q < n/2$, и в этом случае устанавливается равносильное неравенство (1.11). Рассуждение ведется от противного. Если (1.11) не имеет места, то существуют такие последовательности λ_m , $\vec{u}_m$, s_m , $m = 1, 2, \dots$, что $\lambda_m \in \Sigma_{\omega,0}$, $0 < |\lambda_m| \leq \rho$,

$$\vec{u}_m \in W_q^2(\Omega), \quad \nabla s_m \in L_q(\Omega), \quad (4.6)$$

$$\|\lambda_m \vec{u}_m\|_{L_q(\Omega)} + \|\vec{u}_m\|_{\dot{W}_q^2(\Omega)} + \|\nabla s_m\|_{L_q(\Omega)} = 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\|\lambda_m \vec{u}_m - \nu \Delta \vec{u}_m + \nabla s_m\|_{L_q(\Omega)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (4.7)$$

Так как $q < n/2$, то отсюда следует ограниченность суммы норм

$$\|\vec{u}_m\|_{L_r(\Omega)} + \|\nabla \vec{u}_m\|_{L_{r_1}(\Omega)} + \|s_m\|_{L_{r_1}(\Omega)}, \quad (4.8)$$

где r , r_1 определяются соотношениями $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}$. Заметим, что $\frac{1}{r'} = \frac{2}{n} + \frac{1}{q'}$, так что $r' < \frac{n}{2}$.

Очевидно, существует подпоследовательность m_k , $k \rightarrow \infty$, такая, что $\lim \lambda_{m_k} = \lambda_0 \in \overline{\Sigma}_{\omega,0}$, $|\lambda_0| \leq \rho$, а $\vec{u}_{m_k}$, $D^j \vec{u}_{m_k}$, ∇s_{m_k} сходятся слабо в соответствующих нормах к $\vec{u} \in L_r(\Omega)$, $D^j \vec{u}$, $|j| = 2$, $\nabla s \in L_q(\Omega)$. Будем считать, что уже исходные последовательности λ_m , $\vec{u}_m$, $D^j \vec{u}_m$, ∇s_m сходятся в указанном смысле.

При любых финитных $\vec{\varphi} \in W_{r'}^2(\Omega)$, $\pi \in W_{r'}^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\lambda_m \vec{u}_m - \nu \Delta \vec{u}_m + \nabla s_m) \cdot \vec{\varphi} \, dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \vec{u}_m \cdot (\lambda_m \vec{\varphi} - \nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \vec{u} \cdot (\lambda_0 \vec{\varphi} - \nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi) \, dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Легко видеть, что функции $\lambda_0 \vec{\varphi} - \nu \Delta \vec{\varphi} + \nabla \pi$ при всевозможных указанных $\vec{\varphi}$, π плотны в $L_{r'}(\Omega)$ (это следует из предложения 4.3 или, в случае $\lambda_0 = 0$, из результатов работы [25], поскольку $r' < n/2$). Поэтому (4.9) влечет за собой $\vec{u} = 0$.

Пусть B_1 и B_2 — шары такие, что $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B_1 \subset B_2$, $\varphi_1(x)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1(x) = 1$ в B_1 , $\varphi_1(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_2$, $0 \leq \varphi_1(x) \leq 1$ и $\varphi_2(x) = 1 - \varphi_1(x)$. Положим $\vec{u}_m^{(1)} = \vec{u}_m \varphi_1 + \vec{w}_m$, $\vec{u}_m^{(2)} = \vec{u}_m \varphi_2 - \vec{w}_m$, $s_m^{(1)} = s_m \varphi_1$, $s_m^{(2)} = s_m \varphi_2$, где $\vec{w}_m$ — векторное поле, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{w}_m &= -\operatorname{div}(\vec{u}_m \varphi_1) = -\nabla \varphi_1 \cdot \vec{u}_m, \quad x \in B_2 \setminus B_1, \\ \vec{w}_m|_{\partial B_1 \cup \partial B_2} &= 0. \end{aligned}$$

Можно считать, что $\nabla \vec{\varphi}_1 = 0$ вблизи $\partial B_1 \cup \partial B_2$. Тогда согласно [26] существует векторное поле $\vec{w}_m \in W_q^2(B_2 \setminus B_1)$ с компактным носителем в $B_2 \setminus B_1$ такое, что

$$\|\vec{w}_m\|_{W_q^2(B_2 \setminus B_1)} \leq c \|\varphi_1 \vec{u}_m'\|_{W_q^1(B_2 \setminus B_1)}. \quad (4.10)$$

Ясно, что вследствие компактности вложения $W_q^2(B_2 \setminus B_1)$ в $W_q^1(B_2 \setminus B_1)$ нормы в правой части стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$. Мы положим $\vec{w}_m = 0$ вне $B_2 \setminus B_1$. Легко видеть, что $\vec{u}_m^{(1)}$ и $\vec{u}_m^{(2)}$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} \lambda_m \vec{u}_m^{(1)} - \nu \Delta \vec{u}_m^{(1)} + \nabla s_m^{(1)} &= \varphi_1(\lambda_m \vec{u}_m - \nu \Delta \vec{u}_m + \nabla s_m) + \vec{w}_m^{(1)}(x), \\ \operatorname{div} \vec{u}_m^{(1)} &= 0, \quad x \in B_2 \cap \Omega \equiv \Omega^{(1)}, \\ \vec{u}_m^{(1)}|_{\partial \Omega^{(1)}} &= 0, \\ \lambda_m \vec{u}_m^{(2)} - \nu \Delta \vec{u}_m^{(2)} + \nabla s_m^{(2)} &= \varphi_2(\lambda_m \vec{u}_m - \nu \Delta \vec{u}_m + \nabla s_m) + \vec{w}_m^{(2)}(x), \\ \operatorname{div} \vec{u}_m^{(2)} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \equiv \Omega^{(2)}, \end{aligned}$$

где $\vec{w}_m^{(i)}$ — функции с носителями в $B_2 \setminus B_1$, обладающие тем свойством, что

$$\|\vec{w}_m^{(1)}\|_{L_q(B_2 \setminus B_1)} + \|\vec{w}_m^{(2)}\|_{L_q(B_2 \setminus B_1)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (4.11)$$

Вследствие неравенства (4.3) и упомянутого выше результата Мак-Крекена имеем

$$\begin{aligned} & |\lambda_m| \|\vec{u}_m^{(i)}\|_{L_q(\Omega^{(j)})} + \sum_{|j|=2} \|D^j \vec{u}_m^{(i)}\|_{L_q(\Omega^{(j)})} + \|\nabla s_m^{(i)}\|_{L_q(\Omega^{(j)})} \\ & \leq c_1 \left(\|\varphi_i(\lambda_m \vec{u}_m - \nu \Delta \vec{u}_m + \nabla s_m)\|_{L_q(\Omega^i)} + \|\vec{w}_m^{(i)}\|_{L_q(B_2 \setminus B_1)} \right), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$. Складывая эти две оценки и принимая во внимание (4.7), (4.11), приходим к противоречивому неравенству $1 \leq \varepsilon_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Таким образом, доказано, что при $q < n/2, n \geq 3$

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c|\lambda|^{-1} \|f\|_{L_q(\Omega)}, \quad \lambda \in \Sigma_{\omega, 0}. \quad (4.12)$$

Кроме того, хорошо известно, что (4.12) справедливо при $q = 2$, а значит, в случае $n = 3$, и при $3/2 \leq q \leq 2$ (вследствие интерполяционной теоремы Рисса–Торина). Наконец, для $q > 2$ (4.12) легко выводится из соображений дуальности. Предложение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. К. Головкин, О. А. Ладыженская. О решениях нестационарной краевой задачи для уравнений Навье–Стокса // Труды МИАН. 1960. Т. 59. С. 100–114.
- [2] К. К. Головкин, В. А. Солонников. О первой краевой задаче для нестационарных уравнений Навье–Стокса // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 2. С. 267–290.
- [3] В. А. Солонников. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса // Труды МИАН. 1964. Т. 70. С. 213–317.
- [4] В. А. Солонников. Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 153–231.
- [5] Y. Giga. Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces // Math. Z. 1981. V. 178. № 3. P. 297–329.
- [6] Y. Giga, H. Sohr. On the Stokes operator in exterior domains // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1989. V. 36. № 1. P. 103–130.
- [7] Y. Giga, H. Sohr. Abstract L^p -estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier–Stokes equations in exterior domains // J. Funct. Anal. 1991. V. 102. № 1. P. 72–94.
- [8] W. Borchers, H. Sohr. On the semigroup of the Stokes operator for exterior domains in L^q -spaces // Math. Z. 1987. V. 196. № 3. P. 415–425.
- [9] W. Borchers, W. Varnhorn. On the boundedness of the Stokes semigroup in two-dimensional exterior domains // Math. Z. 1993. V. 213. № 2. P. 275–299.
- [10] П. Маремонти, В. А. Солонников. Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева со смешанной нормой // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 293. С. 124–150.
- [11] P. Maremonti, V. A. Solonnikov. On nonstationary Stokes problem in exterior domains // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1997. V. 24. № 3. P. 395–449.
- [12] В. А. Солонников. Коэрцитивные оценки в L_p решений начально-краевой задачи для обобщенной системы уравнений Стокса в полупространстве // Проблемы матем. анализа. 2000. Т. 20. С. 243–270.
- [13] В. А. Солонников. Оценки в L_p решений начально-краевой задачи для обобщенной системы уравнений Стокса в ограниченной области // Проблемы матем. анализа. 2000. Т. 21. С. 211–254.
- [14] G. A. Seregin. Some estimates near the boundary for solutions of the nonstationary linearized Navier–Stokes equations // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 204–223.
- [15] V. A. Solonnikov. Estimates of solutions of the Stokes equations in S. L. Sobolev spaces with a mixed norm // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 288. С. 204–231.

- [16] Я. С. Бугров. Функциональные пространства со смешанной нормой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 5. С. 1137–1158.
- [17] H. Sohr. The Navier–Stokes Equations. An Elementary Functional Analytic Approach. Basel: Birkhäuser, 2001.
- [18] R. Farwig, H. Sohr. The stationary and nonstationary Stokes system in exterior domains with nonzero divergence and nonzero boundary values // Math. Methods Appl. Sci. 1994. V. 17. № 4. P. 269–291.
- [19] M. McCracken. The resolvent problem for the Stokes equations on halfspace in L_p // SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12. № 2. P. 201–228.
- [20] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [21] A. P. Calderón, A. Zygmund. On singular integrals // Amer. J. Math. 1956. V. 78. P. 289–309.
- [22] В. А. Солонников. Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 178–254.
- [23] О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
- [24] В. А. Солонников. О разрешимости второй начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 200–218.
- [25] П. Маремонти, В. А. Солонников. Об оценке решений системы Стокса во внешних областях // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1990. Т. 180. С. 105–120.
- [26] М. Е. Боговский. Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Труды семин. С. Л. Соболева. 1980. № 1. С. 5–40.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
15.02.2003