Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Фазовые переходы бозе-газа в двухзонной модели кристалла. Термомеханический эффект, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:34:55

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ БОЗЕ-ГАЗА В ДВУХЗОННОЙ
МОДЕЛИ КРИСТАЛЛА. ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

В. П. Маслов

В [1] было введено понятие оператора свободной энергии $\hat{F}$ как оператора с теми же собственными функциями [2; с. 65, формулы (5), (6)], что у гамильтониана $\hat{H}$, и с собственными значениями вида $\varepsilon_n - \theta \ln \sigma(\varepsilon_n)$, где $\sigma(\varepsilon_n)$ — кратность собственного значения ε_n гамильтониана $\hat{H}$. Предполагается, что собственные функции симметричны. Рассматривается кристалл с условиями Борна–Кармана с M ячейками, между которыми потенциальные барьеры велики (модель Эйнштейна), и расстояние между энергиями одной зоны столь малы, что ими можно пренебречь. Тогда кратность каждого собственного значения умножается на M . Рассматриваются (как обычно) две зоны (ε_1 и ε_2 — двухуровневая модель) со следующим парным взаимодействием для бозе-случая. Любые два бозона, находящиеся на верхнем уровне, отдают квант энергии, обратно пропорциональный числу частиц. При некоторых условиях на разность $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ имеется одно метастабильное состояние, интерпретируемое как сверхтекучее [3]. Можно показать, что для собственных значений оператора свободной энергии, отвечающих этому метастабильному состоянию, зависящих от θ , при некотором θ происходит фазовый переход второго рода с критическим значением $1/2$.

Пусть $\mathcal{L}$ — пространство функций $\Psi(x_1, \dots, x_N)$, симметричных относительно дискретных переменных x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, которые принимают значения $1, 2, \dots, M$. Гамильтониан, отвечающий игре, действует на функции пространства $\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\hat{H}_N \Psi(x_1, \dots, x_N) = \left(\sum_{i=1}^N \lambda(x_i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N V(x_i, x_j) \right) \Psi(x_1, \dots, x_N),$$

где $\lambda(x) = \varepsilon_1$ при $1 \leq x \leq G_1$ и $\lambda(x) = \varepsilon_2$ при $G_1 + 1 \leq x \leq M$, кроме того, $V(x, x') = -V$, если $G_1 + 1 \leq x, x' \leq M$, и $V(x, x') = 0$ во всех остальных случаях.

Его собственные значения имеют вид

$$\varepsilon_K = \varepsilon_1(N - K) + \varepsilon_2 K - \frac{\nu}{N} \frac{K(K-1)}{2}.$$

Кратности этих собственных значений для симметричных по i решений имеют вид

$$\sigma(\varepsilon_K) = \frac{(N - K + m_1 - 1)!}{K! (m_1 - 1)!} \frac{(K + m_2 - 1)!}{K! (m_2 - 1)!}.$$

Собственные значения оператора свободной энергии имеют вид $\varepsilon_K - \theta \ln \sigma(\varepsilon_K)$.

Полагая $n = \lim K/N$ и $N \gg 1$, $M \gg 1$, $g_1 = \lim m_1/N$, $g_2 = \lim m_2/N$, получим для собственных значений оператора свободной энергии

$$F(n, \theta) = N \left(\varepsilon_1 + \varepsilon n - \frac{\nu n^2}{2} + \theta \left(n \ln \left(\frac{n}{g_2} \right) - (g_2 + n) \ln \left(1 + \frac{n}{g_2} \right) + (1 - n) \ln \left(\frac{1 - n}{g_1} \right) - (g_1 + 1 - n) \ln \left(1 + \frac{1 - n}{g_1} \right) \right) \right).$$

Уравнение $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ при $\nu > \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ имеет при малых θ три решения, а при $\theta \rightarrow \infty$ только одно. “Столкновение” этих решений приводит к фазовым переходам. Фазовый переход для решения, являющегося локальным минимумом, дает фазовый переход второго рода с критическим индексом $1/2$. Кривые на этом кончаются, что означает внезапный останов, который вызывает эффект фонтанирования (термомеханический эффект), открытый в 1938 году Д. Алленом и Х. Джонсом [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов. Ультравторичное квантование и квантовая термодинамика. М.: Институт компьютерных исследований, 2001. [2] V. P. Maslov // Russian J. Math. Phys. 2002. V. 9. №1. P. 112–122. [3] Н. Н. Боголюбов. Избранные труды. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970. [4] В. Кеезом. Гелий. М., 1949.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
28.02.2003