Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричным расстоянием, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm615>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:06:09

ТЕОРЕМА БАНАХА–МАЗУРА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ РАССТОЯНИЕМ

А. Р. Алимов

Рассматриваются классические линейные нормированные пространства и их обобщения – линейные пространства с несимметричной нормой. Известная теорема Банаха–Мазура утверждает универсальность пространства $C([0, 1])$ для сепарабельных линейных нормированных пространств. П. А. Бородин [1] установил, что если линейное пространство с несимметричной нормой $(X, \|\cdot\|)$ сепарабельно относительно нормы $\|x\|_{\text{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$, то оно изометрично изоморфно линейному многообразию пространства $C([0, 1], p_+(f))$, несимметричная преднорма в котором определяется как $p_+(f) = \|f_+\|_{C([0, 1])}$, где $f_+(t) = \max\{f(t), 0\}$.

Оказывается, что при дополнительном условии метризуемости каждое сепарабельное линейное несимметрично нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ изометрично изоморфно вкладывается в классическое $C([0, 1])$ как аффинное многообразие (теорема 1). Теорема 2 утверждает универсальность ℓ^1 для конечномерных несимметрично нормированных пространств. Теоремы 3 и 4 обобщают теорему Банаха–Мазура для метрических пространств на случай пространств с несимметричной метрикой.

Пространства с несимметричной нормой. Несимметричная норма на действительном линейном пространстве X – это неотрицательный функционал $\|\cdot\|$ на X такой, что для всех $x, y \in X$: 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ для всех $\alpha \geq 0$; 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. В общем случае, $\|x\| \neq \|-x\|$. Отметим, что функционал $\|x\|_{\text{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$ является нормой.

Посредством (LNN) обозначим класс всех линейных несимметрично нормированных пространств, т.е. пространств, на которых введена несимметричная норма $\|\cdot\|$. Для $X \in (LNN)$, $x \in X$, $r > 0$ определим $B(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}$ – шар с центром x и радиусом r , $\dot{B}(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$ – открытый шар с центром x и радиусом r .

Основная T_1 -топология (обозначим ее τ) на X задается базой открытых шаров $\{\dot{B}(x, r)\}$, $x \in X$, $r > 0$. Наряду с топологией τ на X могут быть введены другие естественные топологии: топология τ^{-1} , задаваемая базой шаров $\dot{B}^{-1}(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$ – “отражениями” шаров $\dot{B}(-x, r)$, и топология τ_{sym} , задаваемая предбазой $\{\dot{B}(x, t), \dot{B}^{-1}(x', r')\}$. Легко видеть, что топология τ_{sym} задается естественной нормой $\|x\|_{\text{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$. Ниже, говоря о топологии на $X \in (LNN)$, мы будем иметь в виду топологию τ . В общем случае топологии τ, τ^{-1} различны. (О пространствах с несимметричным расстоянием см. [2].)

Можно показать, что метризуемость $X \in (LNN)$ эквивалентна его нормируемости (т.е. существованию на X нормы, определяющей топологию, эквивалентную исходной). И в этом (и только в этом) случае топология τ совпадает с топологией τ^{-1} . Отметим, что пространство $C([0, 1])$ с несимметричной нормой $\|f\| = \|f_+\|_{C([0, 1])} + \|f_-\|_{L^1([0, 1])}$ не является метризуемым.

Ниже мы устанавливаем еще одно свойство универсальности единичного шара пространства $C([0, 1])$, показывая, что метризуемое сепарабельное пространство $X \in (LNN)$ можно изометрически изоморфно вложить в классическое $C([0, 1])$ как аффинное многообразие; иными словами, единичный шар пространства X можно представить как пересечение единичного шара пространства $C([0, 1])$ с некоторым линейным многообразием.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(X, \|\cdot\|) \in (LNN)$ – линейное пространство с несимметричной нормой. Пространство $(X, \|\cdot\|)$ можно изометрически изоморфно вложить в $C([0, 1])$ как аффинное линейное многообразие L тогда и только тогда, когда X метризуемо и сепарабельно.

Отметим, что если пространство $(X, \|\cdot\|) \in (LNN)$ метризуемо, то несимметричная норма $\|\cdot\|$ и норма $\|\cdot\|_{\text{sym}}$ эквивалентны, поэтому неважно, относительно какой из топологий $\tau, \tau^{-1}, \tau_{\text{sym}}$ требовать сепарабельность X .

Изометричность понимается в следующем смысле (далее $B_{C([0, 1])}$ – единичный шар пространства $C([0, 1])$): существует точка $\theta \in L \cap \text{int } B_{C([0, 1])}$ такая, что функционал Минковского

множества $B_{C([0,1])} \cap L$ относительно θ совпадает с функционалом Минковского шара B пространства X , т.е. с несимметричной нормой $\|\cdot\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для простоты обозначим $B = B(0, 1)$. Пусть $(X, \|\cdot\|) \in (LNN)$, X метризуемо и сепарабельно. Тогда существует норма $|\cdot|$ на X , эквивалентная несимметричной норме $\|\cdot\|$. Посредством $b(x, \delta)$ обозначим шар $\{y \in X \mid |y - x| \leq \delta\}$ относительно нормы $|\cdot|$. Эквивалентность нормы $|\cdot|$ и несимметричной нормы $\|\cdot\|$ запишем в виде включения $b(0, r) \subset B \subset b(0, r') \subset b(0, 1)$ для некоторых $0 < r < r' < 1$. В пространстве $X \times \mathbb{R}$ рассмотрим выпуклое тело $U = \text{conv}(B \times \{1\} \cup b(0, 1) \times \{0\})$, определим точку $v = 0 \times \{1 + r\}$ и положим $V = U \cup \text{conv}(v \cup B \times \{1\})$. Оказывается, что множества V и $W = V \cup (-V)$ выпуклы, причем $V \cap (X \times \{1\}) = B \times \{1\}$. Центральное-симметричное ограниченное выпуклое тело W определяет норму $\|\cdot\|_W$ на $X \times \mathbb{R}$. По условию X сепарабельно относительно $|\cdot|$, т.е. в X существует счетное множество $\mathcal{A}$, всюду плотное в X относительно нормы $|\cdot|$. Множество $\mathcal{A} \times \mathbb{Q} \subset X \times \mathbb{R}$ также счетно и, как легко видеть, всюду плотно в $X \times \mathbb{R}$ относительно нормы $\|\cdot\|_W$.

Итак, линейное нормированное пространство $(X \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_W)$ сепарабельно. По теореме Банаха–Мазура $X \times \mathbb{R}$ можно линейно изометрично вложить в $C([0, 1])$ как линейное многообразие. Пусть $\varphi: X \times \mathbb{R} \rightarrow C([0, 1])$ – линейное изометричное вложение $X \times \mathbb{R}$ в $C([0, 1])$, $M = \varphi(X \times \mathbb{R})$ – линейное многообразие в $C([0, 1])$. Поскольку $0 \times \{1\} \subset \text{int } W$, то $\varphi(0 \times \{1\}) =: \theta \in \text{int } B_{C([0,1])}$. Линейный оператор φ переводит аффинную гиперплоскость $X \times \{1\}$ в аффинное линейное многообразие $L \subset C([0, 1])$. Поскольку $W \cap (X \times \{1\}) = B \times \{1\}$, то в силу изометричности вложения множество $L \cap B_{C([0,1])}$ изометрично множеству B . В частности, функционал Минковского множества $L \cap B_{C([0,1])}$ относительно точки $\theta = \varphi(0 \times \{1\})$ совпадает с функционалом Минковского тела B , т.е. с несимметричной нормой $\|\cdot\|$.

Утверждение “тогда” в теореме 1 очевидно. Теорема доказана.

Известно, что каждое конечномерное линейное нормированное пространство изометрично изоморфно подпространству в ℓ^1 . Рассуждая, как и выше, можно показать, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Каждое конечномерное линейное несимметрично нормированное пространство можно изометрически изоморфно вложить в ℓ^1 как аффинное линейное многообразие.

Пространства с несимметричной метрикой. Функционал $\varrho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *несимметричной метрикой* на пространстве X , если для всех $x, y, z \in X$ выполнено: 1) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ и 2) $\varrho(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Обобщением теоремы Банаха–Мазура для метрических пространств на случай сепарабельных и несепарабельных пространств с несимметричной метрикой являются следующие утверждения. Сформулируем отдельно сепарабельный и несепарабельный случаи.

ТЕОРЕМА 3. Пространство X с несимметричной метрикой ϱ можно изометрично вложить в несимметрично преднормированное пространство $C([0, 1], p_+(f))$ в том и только том случае, когда X сепарабельно относительно метрики $d(x, y) = \max\{\varrho(x, y), \varrho(y, x)\}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть α – несчетное кардинальное число. Пространство X с несимметричной метрикой ϱ можно изометрично вложить в несимметрично преднормированное пространство $C([0, 1]^\alpha, p_+(f))$ в том и только том случае, когда X имеет плотность $\leq \alpha$ относительно метрики $d(x, y) = \max\{\varrho(x, y), \varrho(y, x)\}$.

Доказательство этих утверждений следует идеям доказательства классической теоремы Банаха–Мазура для сепарабельных метрических пространств и ее обобщения на несепарабельный случай [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. А. Бородин // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 329–337. [2] H.-P. A. Künzi // Hist. Topol. 2001. V. 3. P. 853–968. [3] M. Kleiber, W. J. Pervin // Bull. Austral. Math. Soc. 1969. V. 1. P. 169–173.