Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, О потенциале Стокса для давления,
УМН, 2007, том 62, выпуск 2, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 11:46:06

О потенциале Стокса для давления

П. А. Крутицкий

Потенциалы для двумерных уравнений Стокса построены и изучены в [1] в случае замкнутых кривых и непрерывных плотностей в потенциалах. В настоящей заметке рассматривается потенциал давления, заданный на разомкнутой кривой. При этом плотности в потенциале принадлежат весовому пространству Гёльдера и могут иметь степенные особенности.

Под разомкнутой кривой понимается простая гладкая незамкнутая дуга конечной длины без самопересечений [2]. В декартовых координатах $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ на плоскости рассмотрим простую гладкую разомкнутую кривую Γ класса $\mathbb{C}^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, параметризованную длиной дуги s : $\Gamma = \{x : x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a, b]\}$. Тем самым, между точками $x \in \Gamma$ и значениями параметра s имеется взаимно однозначное соответствие. Вектор касательной к Γ в точке $x(s)$ обозначим $\tau_s = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$, где $\cos \alpha(s) = x'_1(s)$, $\sin \alpha(s) = x'_2(s)$. Отрезок $[a, b]$ будет также обозначаться Γ .

Пусть вещественнозначная функция $\mu(s)$ класса $\mathbb{C}_q^\omega[a, b]$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$, задана на Γ . Будем говорить, что $\mu(s) \in \mathbb{C}_q^\omega[a, b]$, если $\mu_0(s) \in \mathbb{C}^{0,\omega}[a, b]$, где $\mu_0(s) = \mu(s)|s - a|^q|s - b|^q$ и $\mathbb{C}^{0,\omega}[a, b]$ – класс функций, гёльдеровых с показателем ω .

Рассмотрим Γ как разрез на плоскости. Ту сторону разреза Γ , которая остается слева при возрастании параметра s , будем обозначать Γ^+ , а противоположную сторону будем обозначать Γ^- . Пусть $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ – вещественнозначные интегрируемые функции. Цель настоящей заметки – изучить свойства потенциала давления для уравнений Стокса [1]:

$$P[\mu_1, \mu_2](x) = P_c[\mu_1](x) + P_s[\mu_2](x),$$

где

$$P_c[\mu_1](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma, \quad P_s[\mu_2](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma,$$

$$\cos \psi(x, y(\sigma)) = \frac{x_1 - y_1(\sigma)}{|x - y(\sigma)|}, \quad \sin \psi(x, y(\sigma)) = \frac{x_2 - y_2(\sigma)}{|x - y(\sigma)|},$$

$$y(\sigma) = (y_1(\sigma), y_2(\sigma)) \in \Gamma, \quad |x - y(\sigma)| = \sqrt{(x_1 - y_1(\sigma))^2 + (x_2 - y_2(\sigma))^2}.$$

Пусть $z = x_1 + ix_2$, $t = t(\sigma) = (y_1(\sigma) + iy_2(\sigma)) \in \Gamma$, тогда $dt = t'(\sigma) d\sigma = e^{i\alpha(\sigma)} d\sigma$, $z - t(\sigma) = |x - y(\sigma)|e^{i\psi(x, y(\sigma))}$. Считая, что $\mu(s)$ – вещественная интегрируемая плотность, рассмотрим комплексный потенциал

$$P_E[\mu](x) = P_c[\mu](x) - iP_s[\mu](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{e^{-i\psi(x, y(\sigma))}}{|x - y(\sigma)|} d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{1}{z - t(\sigma)} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) e^{-i\alpha(\sigma)} \frac{1}{z - t(\sigma)} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \hat{\mu}(t) \frac{1}{t - z} dt,$$

где $\hat{\mu}(t) = \mu(\sigma)e^{-i\alpha(\sigma)}$. В $P_E[\mu](x)$ можно взять либо $\mu \equiv \mu_1$, либо $\mu \equiv \mu_2$. Тем самым, чтобы изучить функции $P_c[\mu_1](x)$, $P_s[\mu_2](x)$, достаточно изучить функцию $P_E[\mu](x)$ и взять ее действительную или мнимую часть.

Будем говорить, что комплекснозначная функция $\hat{\mu}(t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}_q^\omega(\Gamma)$ с $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$, если $\hat{\mu}_0(t) \in \mathbb{C}^{0,\omega}(\Gamma)$, где $\hat{\mu}_0(t) = \hat{\mu}(t)|t - t(a)|^q|t - t(b)|^q$ и $\mathbb{C}^{0,\omega}(\Gamma)$ – класс функций, гёльдеровых с показателем ω . Можно показать, что если $\mu(\sigma) \in \mathbb{C}_q^\omega[a, b]$, где $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$, и если $\hat{\mu}(t) = \mu(\sigma)e^{-i\alpha(\sigma)}$, то $\hat{\mu}(t) \in \mathbb{C}_q^\beta(\Gamma)$, где $\beta = \min\{\omega, \lambda\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – разомкнутая кривая класса $\mathbb{C}^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, $u, t = t(\sigma) = (y_1(\sigma) + iy_2(\sigma)) \in \Gamma$. Пусть $\mu(\sigma) \in \mathbb{C}_q^\omega[a, b]$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$. Тогда

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00050, 07-01-00029) и центра Бернулли в Лозанне (Швейцария).

1) функция $P_E[\mu](x)$ принадлежит $\mathbb{C}^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \setminus X}) \cap \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, где $X = x(a) \cup x(b)$ – множество концов Γ ;

2) предельные значения функции $P_E[\mu](x)$ на $\Gamma^\pm$ во внутренних точках даются формулой

$$\begin{aligned} P_E[\mu](x)|_{x(s) \in \Gamma^\pm} &= -i \left(\pm \frac{1}{2} e^{-i\alpha(s)} \mu(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\hat{\mu}(t)}{t - t_0} dt \right) \\ &= -i \left(\pm \frac{1}{2} e^{-i\alpha(s)} \mu(s) - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu(s) e^{-i\psi(x(s), y(\sigma))}}{|x(s) - y(\sigma)|} d\sigma \right), \end{aligned}$$

где $t_0 = t_0(s) = (x_1(s) + ix_2(s)) \in \Gamma$ и интеграл понимается в смысле главного значения;

3) для любой точки $x \notin \Gamma$, расположенной в малой окрестности конца $x(d)$ ($d = a$ или $d = b$), выполняется неравенство

$$|P_E[\mu](x)| \leq \frac{\text{const}}{|x - x(d)|^\delta},$$

где $\delta = q$, если $q \in (0, 1)$, и δ – произвольное число из интервала $(0, 1)$, если $q = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Через $\mathbb{C}^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \setminus X})$ обозначается класс функций, которые непрерывны вне Γ , непрерывно продолжимы на стороны Γ слева и справа во внутренних точках, но предельные значения каждой функции на Γ слева и справа могут быть разными.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – разомкнутая кривая класса $\mathbb{C}^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$;

$$\mu(\sigma) = \frac{\eta(\sigma)}{|\sigma - d|^q}, \quad q \in (0, 1); \quad \eta(\sigma) \in \mathbb{C}^{0,\omega}[a, b], \quad \omega \in (0, 1]; \quad d = a \quad \text{или} \quad d = b.$$

Пусть

$$\hat{\nu}(t) = \hat{\nu}(t(\sigma)) = \left(\frac{t(\sigma) - t(d)}{|\sigma - d|} \right)^q \eta(\sigma) e^{-i\alpha(\sigma)}.$$

Тогда $\hat{\nu}(t) \in \mathbb{C}^{0,\beta}(\Gamma)$, где $\beta = \min\{\omega, \lambda\}$, и для точек $z = x_1 + ix_2$, расположенных вблизи $D = t(d)$ вне Γ , справедлива асимптотическая формула

$$P_E[\mu](x) = \mp \frac{e^{\pm q\pi i}}{2 \sin(\pi q)} \frac{\hat{\nu}(D)}{(z - D)^q} + \Theta_0(z),$$

верхний знак берется, если $d = a$, а нижний знак – если $d = b$. Функция $\Theta_0(z)$ непрерывна при $z \rightarrow D$, если $\beta > q$. Если $0 < \beta \leq q < 1$, то для z , лежащих вблизи $D = t(d)$ вне Γ , выполняется неравенство

$$|\Theta_0(z)| \leq \frac{\text{const}}{|z - D|^{q_1}},$$

где q_1 – произвольное число такое, что $q_1 \in (q - \beta, q)$. Более того, $\Theta_0(z)$ – аналитическая функция в окрестности точки D , разрезанной вдоль Γ . Через $(z - D)^q$ обозначается ветвь, аналитическая в окрестности точки D , разрезанной вдоль Γ , и принимающая значение $(t - D)^q$ на Γ^+ . Кроме того, $\hat{\nu}(D) = \lim_{\sigma \rightarrow d} \hat{\nu}(t(\sigma))$, где $\sigma \in (a, b)$.

Теоремы 1, 2 могут быть доказаны непосредственной проверкой с использованием свойств интегралов типа Коши из [2].

Список литературы

- [1] А. Н. Попов, *Краевые задачи математической физики. 7: Сб. работ*, Тр. МИАН, **116**, Наука, Л., 1971, 162–180. [2] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.

П. А. Крутицкий (P. A. Krutitskii)

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: krutitsk@mail.ru

Представлено М. И. Зеликиным

Принято редколлегией

22.01.2007