Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Гуревич, А. А. Темпельман, О множествах временных и пространственных средних для непрерывных функций на пространстве конфигураций, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:36:00

О МНОЖЕСТВАХ ВРЕМЕННЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ КОНФИГУРАЦИЙ

Б. М. ГУРЕВИЧ, А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

1. Рассмотрим пространство конфигураций $X = V^{\mathbb{Z}^d}$, где $|V| := \text{card } V < \infty$, $d \geq 1$, наделенное топологией прямого произведения, и группу τ , состоящую из сдвигов τ_t , $t \in \mathbb{Z}^d$, где $(\tau_t x)(s) = x(s + t)$, $s \in \mathbb{Z}^d$, $x \in X$, $x: \mathbb{Z}^d \rightarrow V$. Зафиксировав последовательность конечных множеств $T_n \subset \mathbb{Z}^d$, положим для всякой функции $\varphi \in C(X, \mathbb{R}^m)$

$$(A_n \varphi)(x) = \frac{1}{|T_n|} \sum_{t \in T_n} \varphi(\tau_t x), \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \varphi)(x) =: (A\varphi)(x)$, если он существует, называется *временным средним* функции φ в точке x (роль “времени” здесь играет группа $\mathbb{Z}^d$). В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $T_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [0, n-1]$, хотя можно было бы рассматривать и более общие последовательности параллелепипедов (ср. с [1]). Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}^m$ положим

$$X_{\varphi, \alpha} = \{x \in X : (A\varphi)(x) = \alpha\}.$$

Введем множество временных средних $A_\varphi = \{\alpha \in \mathbb{R}^m : X_{\varphi, \alpha} \neq \emptyset\}$ и множество *пространственных средних* $I_\varphi = \{\mu(\varphi), \mu \in \mathcal{J}\}$, где $\mu(\varphi) := \int \varphi d\mu$ и $\mathcal{J}$ – множество τ -инвариантных вероятностных борелевских мер на X . Точка $x \in X$ называется *типичной* точкой меры μ , если $(A\psi)(x) = \mu(\psi)$ для всех $\psi \in C(X, \mathbb{R}^1)$. Пусть G_μ – множество всех типичных точек меры μ .

Введем на X метрику $\rho = \rho_\theta$, положив $\rho_\theta(x, y) = \theta^{n(x, y)}$, $x \neq y$, где $\theta \in (0, 1)$ и $n(x, y)$ – минимальное из тех n , для которых $x(t) \neq y(t)$ хотя бы при одном $t \in T_n$, и обозначим через $D_\rho(B)$ хаусдорфову размерность множества $B \subset X$, отвечающую метрике ρ (все результаты этой статьи справедливы для гораздо более широкого класса метрик ρ , введенного в [2], см. также [3] и [4], в частности, для метрик Биллингсли, отвечающих гиббсовским мерам).

ТЕОРЕМА 1. Для всякой меры $\mu \in \mathcal{J}$ множество G_μ непусто и $D_{\rho_\theta}(G_\mu) = -h(\mu)/\ln \theta$, где $h(\mu)$ – энтропия меры μ .

Из первого утверждения теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всякой функции $\varphi \in C(X, \mathbb{R}^m)$ множества A_φ и I_φ совпадают, а потому A_φ – выпуклое замкнутое множество.

Для случая $d = 1$ непустота множества G_μ – это теорема Какутани (см. [5]), а его хаусдорфова размерность вычислена в [6] и [7]. Обобщение первого утверждения на случай произвольного $d \geq 1$ содержится в доказательстве леммы 3.1 из [3], там же доказано второе утверждение, но только для гиббсовских мер μ .

2. Пусть $g \in C(X, \mathbb{R}^m)$. Мера $\mu \in \mathcal{J}$ называется *g-равновесной* (см. [1], [8]), если на ней достигается максимум функции $\nu \mapsto h(\nu) + \nu(g)$, $\nu \in \mathcal{J}$. Совокупность *g-равновесных мер* обозначим через $\mathcal{E}(g)$.

Для всякого множества $B \subset \mathbb{R}^m$ будем обозначать через $\text{cl } B$, $\text{int } B$ и $\text{ri } B$ соответственно его замыкание, внутренность и относительную внутренность (см., например, [9]). Каждой функции $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in C(X, \mathbb{R}^m)$ поставим в соответствие линейное подпространство $C_\varphi \subset C(X, \mathbb{R}^1)$, натянутое на $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Пусть

$$\mathcal{E}_\varphi = \bigcup_{g \in C_\varphi} \mathcal{E}(g), \quad E_\varphi = \{\nu(\varphi) : \nu \in \mathcal{E}_\varphi\}.$$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00158).

ТЕОРЕМА 2. Для всякой функции $\varphi \in C(X, \mathbb{R}^m)$ выполняется включение $\text{ri } I_\varphi \subseteq E_\varphi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Разумеется, из теоремы 2 следует, что $\text{int } I_\varphi \subseteq E_\varphi$. Однако в некоторых ситуациях $\text{int } I_\varphi = \emptyset$, в то время как $\text{ri } I_\varphi \neq \emptyset$; это имеет место, например, в случае, когда функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ линейно зависимы.

СЛЕДСТВИЕ 2. $\text{cl}(\text{ri } E_\varphi) = \text{cl } E_\varphi = I_\varphi$.

3. По определению для всякого $\alpha \in E_\varphi$ найдется такая функция $g_\alpha \in C_\varphi$, что $\alpha = \mu_{\varphi, \alpha}(\varphi)$ для некоторой меры $\mu_{\varphi, \alpha} \in \mathcal{E}(g_\alpha)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\varphi \in C(X, \mathbb{R}^m)$ и $\alpha \in E_\varphi$, то $D_\rho(X_{\varphi, \alpha}) = -h(\mu_{\varphi, \alpha})/\ln \theta$.

В литературе имеется довольно много результатов, родственных теореме 3 (см., например, [4], [10]–[15]). Однако, насколько мы можем судить, во всей своей общности она не вытекает из известных фактов даже для случая $d = 1$.

При доказательстве теоремы 3 (и второго утверждения теоремы 1) используются результаты работы [3] и следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Для всякой меры $\mu \in \mathcal{I}$ существует такая последовательность эргодических гиббсовских мер $\mu_n \in \mathcal{I}$ с финитным потенциалом (т.е. марковских мер “растущего порядка”), что μ_n слабо сходится к μ и $h(\mu_n)$ сходится к $h(\mu)$.

Для $d = 1$ это утверждение элементарно (см., например, [6]), для произвольного $d \geq 1$, но при дополнительном условии, что μ – гиббсовская мера, оно вытекает из [16] (см. также [1; § 16]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вероятно, большинство сформулированных выше результатов можно обобщить на динамические системы, удовлетворяющие условиям работ [10], [14], [15] (точнее, их обобщениям на случай $d > 1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х.-О. Георги. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.: Мир, 1992. [2] А. А. Темпельман // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 3. С. 589–616. [3] В. М. Gurevich, А. А. Tempelman // J. Statist. Phys. 2002. V. 108. № 5/6. P. 181–201. [4] А. А. Tempelman // J. Dynam. Control Systems. 2001. V. 7. № 4. P. 535–551. [5] J. C. Oxtoby // Ergodic Theory. Proc. Internat. Sympos., Tulane Univ., 1961. New York: Academic Press, 1963. P. 203–215. [6] Н. Cajar // Lecture Notes in Math. 1981. V. 892. [7] Е. Olivier // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1999. V. 328. № 1. P. 13–16. [8] Д. Рюэль. Термодинамический формализм. Москва–Ижевск: РХД, 2002. [9] Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. [10] L. Barreira, B. Saussol, J. Schmeling // J. Math. Pures Appl. 2002. V. 81. P. 67–91. [11] А.-Н. Fan, D.-J. Feng // J. Statist. Phys. 2000. V. 99. № 3/4. P. 813–856. [12] А.-Н. Fan, D.-J. Feng, J. Wu // J. London Math. Soc. (2). 2001. V. 64. № 1. P. 229–244. [13] Е. Olivier // Nonlinearity. 1999. V. 12. № 6. P. 1571–1585. [14] F. Takens, E. Verbitski // Comm. Math. Phys. 1999. V. 203. № 3. P. 593–612. [15] F. Takens, E. Verbitski // Preprint, 2000. [16] A. Sokal // Comm. Math. Phys. 1982. V. 86. № 3. P. 327–336.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Университет штата Пенсильвания, США
E-mail: gurevich@mech.math.msu.su, arkady@stat.psu.edu

Принято редколлегией
03.02.2003