Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Курлин, Базисные вложения графов и метод трехстраничных вложений
Дынникова, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 10:07:37

БАЗИСНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ГРАФОВ И МЕТОД ТРЕХСТРАНИЧНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ДЫННИКОВА

В. А. Курлин

Эта заметка посвящена решению двух задач современной геометрической топологии. Эти задачи объединяет метод решения – техника вложений графов в книжку с конечным числом страниц. Во-первых, доказывается критерий базисной вложимости конечных графов в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$, где $T_{n,m}$ – букет n отрезков (склеенных по концам) и m окружностей. Во-вторых, изотопическая классификация произвольных заузленных графов сводится к алгебраической проблеме равенства центральных элементов в двух сериях конечно определенных полугрупп.

1. Базисные вложения графов. Понятие базисного вложения мотивировано решением Колмогорова–Арнольда 13-й проблемы Гильберта. Пусть G, X, Y – произвольные компактные метрические пространства. Вложение $G \subset X \times Y$ называется *базисным*, если для любой непрерывной функции $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ существуют такие непрерывные функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}, h: Y \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ при всех $(x, y) \in G$. Опишем класс графов, базисные вложения которых мы будем рассматривать. Под *конечным графом* G понимаем произвольный граф с конечным числом вершин и ребер. *Степень* $\deg v$ вершины $v \in G$ равна числу ребер графа G , примыкающих к ней. Граф может быть несвязным, но изолированные вершины степени 0 будем исключать. Все графы считаются неориентированными, мы допускаем мульти-ребра и петли. *Число циклов* $c(G)$ графа G по определению равно количеству связных компонент графа G минус его эйлерова характеристика. Ребро, примыкающее к вершине степени 1, будет называться *висячим*. Вершина $v \in G$ считается *неразветвленной*, если к ней примыкает висячее ребро, и *разветвленной* иначе. Вершина $v \in G$ называется *сложной*, если либо ее степень $\deg v \geq 5$, либо $\deg v = 4$ и она является разветвленной. *Дефект* $\delta(G)$ графа G – это сумма $\sum (\deg v_i - 2)$ по всем сложным вершинам v_i графа G . Напомним, что $T_{n,m}$ – букет n склеенных по концам отрезков и m окружностей. Проблема характеристики графов, базисно вложимых в $\mathbb{R} \times T_{n,0}$, ставилась в [1].

ТЕОРЕМА 1.1. *Фиксируем целые числа $n, m \geq 0$ ($n + 2m \geq 2$). Тогда конечный граф G базисно вкладывается в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$ тогда и только тогда, когда $c(G) \leq m$ и либо $\delta(G) < n + 2m$, либо $\delta(G) = n + 2m$ и одна из сложных вершин графа G является неразветвленной.*

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого конечного графа G существуют такие $n, m \geq 0$, что граф G базисно вкладывается в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$. В то же время для любой фиксированной пары целых чисел $n, m \geq 0$ существует конечный граф, базисно невложимый в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$.*

Семейство графов $\{G_i\}$ называется *запрещенным* (для базисных вложений в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$), если любой конечный граф G базисно вкладывается в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$ тогда и только тогда, когда граф G не содержит подграфов, гомеоморфных графам из $\{G_i\}$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Существует алгоритм, который для любых $n, m \geq 0$ и конечного графа G проверяет базисную вложимость графа G в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$. Этот алгоритм является квадратичным по количеству вершин графа G . При фиксированных n, m существует конечное запрещенное семейство для базисных вложений конечных графов в $\mathbb{R} \times T_{n,m}$.*

Частные случаи теорем 1.1 и 1.3 (для $m = 0$) доказаны в [2; теорема 1.1 и следствие 1.3]. В доказательстве теоремы 1.1 используется геометрический критерий Штернфельда–Скопенкова базисной вложимости конечных графов [3; GS, с. 33].

2. Метод трехстраничных вложений для заузленных графов. Фиксируем целое $n \geq 2$. Здесь мы рассматриваем неориентированные конечные графы с вершинами степени от 2 до n . То есть мы исключаем висячие ребра, но графы могут быть несвязными, допускаются петли и мульти-ребра. Тогда *заузленный граф* – это вложение конечного графа $G \subset \mathbb{R}^3$, рассматриваемое с точностью до объемлющей изотопии. *Объемлющая изотопия* между заузленными графами $G, H \subset \mathbb{R}^3$ – это такое непрерывное семейство гомеоморфизмов $\varphi_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, t \in [0, 1]$, что $\varphi_0 = \text{id}$ и $\varphi_1(G) = H$. Иногда заузленные графы с этим отношением эквивалентности называют графами с *нежесткими вершинами*. Если потребовать, чтобы у вложенного графа $G \subset \mathbb{R}^3$ в течение всей изотопии некоторая окрестность каждой вершины лежала в плоскости, то получатся графы с *жесткими вершинами*.

Рассмотрим полугруппу SG_n с множеством образующих $\mathbb{A}_n = \{a_i, b_i, c_i, d_i, x_{m,i} \mid i \in \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}, 3 \leq m \leq n\}$. Общее количество букв алфавита $\mathbb{A}_n$ равно $g(n) = 3(n+2)$. Пусть SG_n – полугруппа с образующими из $\mathbb{A}_n$ и соотношениями (1)–(10). Предполагается, что параметры m, p, q удовлетворяют неравенствам $3 \leq m \leq n, 2 \leq p \leq (n+1)/2$ и $2 \leq q \leq n/2$.

- (1) $d_0 d_1 d_2 = 1$; (2) $b_i d_i = d_i b_i = 1$;
- (3) $a_i = a_{i+1} d_{i-1}, b_i = a_{i-1} c_{i+1}, c_i = b_{i-1} c_{i+1}, d_i = a_{i+1} c_{i-1}$;
- (4) $x_{2p-1, i-1} = d_{i-1}^{p-1} (x_{2p-1, i} d_{i+1}) b_{i-1}^{p-2}, x_{2q, i-1} = d_{i-1}^{q-2} (b_{i+1} x_{2q, i} d_{i+1}) b_{i-1}^{q-2}$;
- (5) $x_{2p-1, i} d_i^{p-1} = a_i (x_{2p-1, i} d_i^{p-1}) c_i, b_i^{p-1} x_{2p-1, i} b_i = a_i (b_i^{p-1} x_{2p-1, i} b_i) c_i$;
- (6) $d_i x_{2q, i} d_i^{q-1} = a_i (d_i x_{2q, i} d_i^{q-1}) c_i, b_i^{p-1} x_{2q, i} b_i = a_i (b_i^{q-1} x_{2q, i} b_i) c_i$;
- (7) $(d_i c_i) w = w (d_i c_i)$, где $w \in \{c_{i+1}, b_i d_{i+1} d_i, x_{m, i+1}\}$;
- (8) $uv = vu$, где $u \in \{a_i b_i, b_{i-1} d_i d_{i-1} b_i, x_{2p-1, i} b_i, d_i x_{2q, i} b_i\}$,
 $v \in \{a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, b_i d_{i+1} d_i, x_{m, i+1}\}$;
- (9) $(x_{2p-1, i} b_i) D_{p, i} = D_{p-1, i} (x_{2p-1, i} b_i)$, где $D_{k, i} = d_i^k d_{i+1}^k d_{i-1}^k, k \geq 1$;
- (10) $(d_i x_{2q, i} b_i) D_{q, i} = D_{q, i} (d_i x_{2q, i} b_i)$.

Одно из соотношений (2) избыточно: его можно получить из соотношения (1) и остальных соотношений (2). Тогда общее количество соотношений (1)–(10) равно $r(n) = 3(n^2 + 7n - 2)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Центр полугруппы SG_n классифицирует все заузленные графы с жесткими вершинами степени $\leq n$ с точностью до объемлющей изотопии в $\mathbb{R}^3$.*

а) Любой заузленный граф $G \subset \mathbb{R}^3$ с жесткими вершинами степени $\leq n$ кодируется некоторым элементом w_G полугруппы SG_n .

б) Два заузленных графа $G, H \subset \mathbb{R}^3$ с жесткими вершинами степени $\leq n$ изотопны тогда и только тогда, когда в полугруппе SG_n имеем $w_G = w_H$.

в) Элемент $w \in SG_n$ кодирует некоторый заузленный граф с жесткими вершинами степени $\leq n$ тогда и только тогда, когда этот элемент w является центральным в полугруппе SG_n .

Частный случай теоремы 2.1 (при $n = 3$) доказан в [4] по методу [5]. Заменяем соотношения (9)–(10) на (9') $x_{m, i} (d_{i+1} d_i d_{i-1}) = x_{m, i}$.

Через SG'_n обозначим полугруппу с образующими из $\mathbb{A}_n$ и соотношениями (1)–(8), (9'). Новая полугруппа имеет то же количество образующих и определяющих соотношений, что и SG_n .

ТЕОРЕМА 2.2. *Центр полугруппы SG'_n классифицирует все заузленные графы с нежесткими вершинами степени $\leq n$ с точностью до объемлющей изотопии в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 использует трехстраничный подход Дынникова [5]. Рассмотрим следующее преобразование слов в алфавите $\mathbb{A}_n$: $\rho_n(a_i) = c_i, \rho_n(b_i) = d_i, \rho_n(c_i) = a_i, \rho_n(d_i) = b_i, \rho_n(x_{2p-1, i}) = x_{2p-1, i} b_i c_i, \rho_n(x_{2q, i}) = x_{2q, i}$. Отображение ρ_n по формуле $\rho_n(uv) = \rho_n(v) \rho_n(u)$ продолжается до инволютивных антиавтоморфизмов $\rho_n: SG_n \rightarrow SG_n$ и $\rho'_n: SG'_n \rightarrow SG'_n$. Пусть $w_a \in SG_n$ (соответственно $w'_G \in SG'_n$) – классифицирующий элемент для заузленного графа $G \subset \mathbb{R}^3$ из теоремы 2.1 (соответственно теоремы 2.2).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Заузленный граф $G \subset \mathbb{R}^3$ с жесткими (соответственно, нежесткими) вершинами степени $\leq n$ изотопен своему зеркальному образу тогда и только тогда, когда в полугруппе SG_n (соответственно, в полугруппе SG'_n) имеем $w_G = \rho_n(w_G)$ (соответственно, $w'_G = \rho'_n(w'_G)$).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Cavicchioli, D. Repovs, A. B. Skopenkov // Topology Appl. 1998. V. 84. P. 207–226. [2] V. A. Kurlin // Topology Appl. 2000. V. 102. № 2. P. 113–137. [3] A. B. Skopenkov // Topology Appl. 1995. V. 65. P. 29–48. [4] В. А. Курлин // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 3. С. 84–88. [5] И. А. Дынников // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33. № 4. С. 25–37; 2000. Т. 34. № 1. С. 29–40.