Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лимаренко, Кольца с критически сжимаемыми идеалами, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:40:48

КОЛЬЦА С КРИТИЧЕСКИ СЖИМАЕМЫМИ ИДЕАЛАМИ

С. В. ЛИМАРЕНКО

Критически сжимаемые модули подробно рассматривались Зельмановицем в целом ряде его работ (см., например, [1]). Он также ввел понятие слабо примитивного кольца как кольца, обладающего точным критически сжимаемым модулем. В данной работе основное внимание уделено кольцам, в которых роль точного критически сжимаемого модуля играет правый идеал, в силу чего эти кольца являются слабо примитивными. Дополнительно выделен случай, в котором такой идеал есть само кольцо. В работах [2] и [3] читатель может ознакомиться с аналогами вышеупомянутых объектов в градуированном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. R -модуль M называется *сжимаемым*, если он может быть вложен в каждый из своих ненулевых подмодулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Сжимаемый R -модуль называется *критически сжимаемым*, если он не может быть вложен ни в какой из своих собственных фактор-модулей.

Сразу отметим, что ненулевой подмодуль критически сжимаемого модуля также является критически сжимаемым. Мы начнем с описания критически сжимаемых модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Модуль M_R называется *униформным (однородным)*, если для любых ненулевых подмодулей M_1 и M_2 модуля M их пересечение нетривиально: $M_1 \cap M_2 \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M_R – несингулярный униформный модуль, в котором $\text{Hom}_R(M, N) \neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля $N_R \in M_R$. Тогда M_R критически сжимаем.

Критически сжимаемый модуль, равно как и неприводимый, может быть сингулярным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Следующие условия на слабо примитивное кольцо эквивалентны:

- (i) оно обладает точным несингулярным критически сжимаемым (правым) модулем;
- (ii) оно обладает точным критически сжимаемым правым идеалом.

В предыдущем предложении условие слабой примитивности кольца можно заменить на условие его первичности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – первичное кольцо, тогда следующие условия на правый идеал I равносильны.

- (i) I – несингулярный униформный правый идеал в R .
- (ii) I – точный критически сжимаемый правый идеал в R .

СЛЕДСТВИЕ. Если S – правая область Оре, то S_S – точный критически сжимаемый модуль (как модуль над самим собой), т.е. S – слабо примитивное кольцо.

В силу всего выше сказанного, мы можем получить характеристику некоторого специального класса слабо примитивных колец, а именно,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Следующие условия на кольцо R равносильны:

- (i) R – правая область Оре;
- (ii) R_R – точный критически сжимаемый модуль.

Широко известен тот факт, что любые два точных неприводимых (правых) модуля над примитивным кольцом с минимальным правым идеалом изоморфны, в частности, они изоморфны этому идеалу. Можно сформулировать аналогичный результат и для слабо примитивных колец. Максимум, на что мы можем рассчитывать, – это вложение одного модуля в другой. Ни о каком изоморфизме речи идти не может. Заметим, что свойство вложимости есть отношение эквивалентности на множестве всех сжимаемых R -модулей. Действительно, это свойство и рефлексивно, и транзитивно. Свойство сжимаемости, очевидно, играет здесь ключевую роль. Пример алгебры Вейля демонстрирует тот факт, что кольцо с точным критически сжимаемым (несингулярным равномерным) правым идеалом может обладать точными критически сжимаемыми модулями, не вкладываемыми друг в друга. А именно, алгебра Вейля есть (правая) область Оре, в силу чего является точным критически сжимаемым модулем над собой, а также, будучи собственным правым идеалом, является несингулярным равномерным модулем опять же над собой. Однако соответствующее кольцо многочленов есть неприводимый сингулярный модуль над алгеброй Вейля, в силу чего и не вкладывается в саму алгебру Вейля как модуль.

При более детальном рассмотрении оказывается, что вся проблема заключается в сингулярности. При дополнительном условии несингулярности модулей их взаимная вложимость все же имеет место.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – слабо примитивное кольцо с точным критически сжимаемым (несингулярным равномерным) правым идеалом I , тогда любые два несингулярных равномерных модуля над R могут быть вложены друг в друга.

В заключение автор хотел бы поблагодарить А. В. Михалева за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Zelmanowitz // Comm. Algebra. 1981. V. 9. № 1. P. 23–45. [2] С. В. Зеленов // УМН. 2001. Т. 56. № 3. С. 167–168. [3] С. В. Лимаренко // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 181–182.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.02.2003