Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Квазиинвариантные меры на неархимедовых банаховых пространствах, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm619>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 06:42:47

КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА НЕАРХИМЕДОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Люлковский

Имеется ряд работ об интегрировании в банаховых пространствах (БП) и квазиинвариантных мерах в классическом случае (т.е. для БП над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), тогда как для неархимедовых БП X (т.е. для БП над неархимедовыми полями $\mathbb{K}$) критерии квазиинвариантности мер (КИМ) относительно линейных и нелинейных преобразований БП X не рассматривались. С другой стороны, развитие неархимедовой квантовой механики и неархимедова функционального анализа приводит к необходимости решения таких проблем, чему и посвящена данная работа (см. также [1]).

1. Замечания и определения. Для хаусдорфова топологического пространства X с малой индуктивной размерностью $\text{ind}(X) = 0$ борелевская σ -алгебра обозначается $\mathcal{B}$. Далее действительные меры μ задаются на измеримых пространствах (X, F) , где σ -алгебра $F \supset \mathcal{B}$.

Напомним, что для алгебры подмножеств E в X , разделяющей точки в X , отображение μ из E в неархимедово поле $\mathbb{K}_s$ такое, что оно полно как ультраметрическое пространство и $\mathbb{Q}_s \subset \mathbb{K}_s \subset \mathbb{C}_s$, называется мерой, если выполнены следующие условия: (i) μ аддитивна и $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) для любого $A \in E$ существует норма $\|A\|_\mu := \sup\{|\mu(B)|_{\mathbb{K}_s} : B \subset A, B \in E\} < \infty$, (iii) если имеется сжимающееся семейство F , т.е. для любых $A, B \in F$ существует $F \ni C \subset A \cap B$ и $\bigcap\{A : A \in F\} = \emptyset$, то $\lim_{A \in F} \mu(A) = 0$ (см. обозначения в [2] и там же о пополнении $Af(X, \mu)$ алгебры E по мере μ). Мере со значениями в $\mathbb{K}_s$ назовем вероятностной, если $\|X\|_\mu = 1$ и $\mu(X) = 1$. Для функций $f: X \rightarrow \mathbb{K}_s$ и $\phi: X \rightarrow [0, \infty)$ используется обозначение $\|f\|_\phi := \sup_{x \in X} (|f(x)|\phi(x))$, $N_\mu(x) := \inf(\|U\|_\mu : U \in E, x \in U)$. Плотные меры, т.е. определенные на $E \supset \text{Vco}(X)$, образуют БП $M(X)$ с нормой $\|\mu\| := \|X\|_\mu$, где $\text{Vco}(X)$ – алгебра открыто-замкнутых подмножеств в X .

Пусть БП X задано над бесконечным полем $\mathbb{K}$ с дискретной нетривиальной группой $\Gamma_{\mathbb{K}} := \{|x|_{\mathbb{K}} : x \neq 0\}$. Пусть имеется возрастающая последовательность БП $L_n \subset L_{n+1} \subset \dots$ такая, что $\text{cl}(\bigcup [L_n : n]) = X$, $\dim_{\mathbb{K}} L_n = \kappa_n < \aleph_0$ для всех n . Выберем согласованное семейство проекций $P_n^m: L_m \rightarrow L_n$ для любых $m \geq n$, тогда согласованное семейство мер $\mu_{L_n}(A) = \mu_{L_m}(P_n^{-1}(A) \cap L_m)$ при любых $m \geq n$ называется последовательностью конечномерных распределений.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на X заданы две ненулевые меры μ и ν со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{K}_s$. Мера ν называется абсолютно непрерывной относительно меры μ , если $\nu(A) = 0$ для любого $A \in E$ с $\mu(A) = 0$, или для любого $A \in E: \nu(A) = \int_A f(x) \mu(dx)$, где $f \in L(\mu)$, что обозначается $\nu \ll \mu$. Если $\nu \ll \mu$ и $\mu \ll \nu$, то они называются эквивалентными, $\nu \sim \mu$.

3. ТЕОРЕМА. Пусть $X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j$ – произведение вполне регулярных пространств с $\text{ind}(X_j) = 0$ и вероятностными мерами $\mu_j, \nu_j: E(X_j) \rightarrow \mathbb{K}_s$, а $\mu_j \ll \nu_j$ для любого j , $\nu = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \nu_j$, $\mu = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mu_j$ – меры на E , $\rho_j(x) = \mu_j(dx)/\nu_j(dx)$ $\mathcal{R}_\nu$ -непрерывны по $x \in X_j$, $\prod_{j=1}^n \rho_j(x_j) =: t_n(x)$ сходится равномерно на $Af(X, \nu)$ -компактных подмножествах в X , $\beta_j := \|\rho_j(x)\|_{\phi_j}$, $\phi_j(x) := N_{\nu_j}(x)$ на X_j . Если $\prod_{j=1}^{\infty} \beta_j$ сходится в $(0, \infty)$ (или расходится к 0), то $\mu \ll \nu$ и $q_n(x) = \prod_{j=1}^n \rho_j(x_j)$ сходится в $L(\nu)$ к $q(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \rho_j(x_j) = \mu(dx)/\nu(dx)$ (или $\mu \perp \nu$, т.е. существует $F \in E$ с $\|F\|_\mu + \|X \setminus F\|_\nu = 0$), где $x_j \in X_j$, $x \in X$.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для БП X над $\mathbb{K}$ элемент $a \in X$ называется допустимым сдвигом меры μ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{K}_s$, если $\mu_a \ll \mu$, где $\mu_a(A) = \mu(A - a)$ для любых $A \in E$, $\rho(a, x) := \rho_\mu(a, x) := \mu_a(dx)/\mu(dx)$, $M_\mu := [a \in X : \mu_a \ll \mu]$. Мера μ называется квазиинвариантной, если M_μ содержит $\mathbb{K}$ -линейное подпространство J_μ , плотное в X .

5. ТЕОРЕМА. Если $\mu: E \rightarrow \mathbb{R} (\vee \mathbb{F})$ – σ -конечная мера на $E(Y)$ (или $\text{Vco}(Y)$), Y – полное сепарабельное ультраметрическое $\mathbb{K}$ -линейное пространство такое, что $\text{co}(S)$

нигде не плотно в Y для любого компакта $S \subset Y$, где $\mathbb{K}$ и $\mathbb{F}$ – бесконечные недискретные нерхимедовы поля. Тогда из $J_\mu = Y$ следует, что $\mu = 0$.

6. ТЕОРЕМА. Пусть X – сепарабельное БП над локально компактным полем $\mathbb{K}$. Тогда существуют вероятностные КИМ μ на X со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{K}_s$ ($s \neq p$).

7. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть X – БП над $\mathbb{K}$, $|\cdot|_{\mathbb{K}} = \text{mod}_{\mathbb{K}}(\cdot)$ с вероятностной КИМ $\mu: E \rightarrow \mathbb{R} (\vee \mathbb{K}_s)$ и $\mu_{L_n}(dx) = f_n(x) v_n(dx)$, где $f_n \in L^1(L_n, v_n, \mathbb{R}) (\vee L(L_n, v_n, \mathbb{K}_s))$, $v_n(a + A) = v_n(A)$ для любых $a \in L_n$ и $A \in E(L_n)$, а оператор U μ -почти всюду на X удовлетворяет следующим условиям: (i) $U \in C^1$; (ii) $(U'(x) - I)$ компактен; (iii) $(x - U(x)) \in J_\mu$; (iv) $(x - U(x); x) \in \text{dom}(\rho(z, x))$, причем $\rho(x - U(x), x) \neq 0 \pmod{\mu}$; (v) $\mu(S') = 1 (\vee \|X \setminus S'\|_\mu = 0)$, здесь $S' := ([x : \rho(z, x) \text{ определена для } z \in L \text{ и непрерывна по } z])$ для любого конечномерного $L \subset J_\mu$ над $\mathbb{K}$; (vi) существует S с $\mu(S) = 0 (\vee \|S\|_\mu = 0)$ и для любого $x \in X \setminus S$ и любого z , для которого существует $\rho(z, x)$, выполнено условие: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P_n z, x) = \rho(z, x)$ и сходимость равномерно для любого конечномерного над $\mathbb{K}$ подпространства $L \subset J_\mu$ по z в $L \cap [x \in J_\mu : |x| \leq c]$, где $c > 0$; (vii) существует n , для которого при всех $j > n$ и μ -почти всех $x \in X$ отображения $U(j, x) := x + P_j(U(x) - x)$ обратимы и $\lim_j |\det U'(j, x)| = |\det U'(x)|$ (дополнительно с равномерной сходимостью в (vi) по z на $Af(X, \mu)$ -компактных подмножествах для $\rho(P_n z, x)$, а в (vii) по x для $|\det U'(j, x)|$ для μ со значениями в $\mathbb{K}_s$). Тем же условиям пусть удовлетворяет U^{-1} .

8. ТЕОРЕМА. Из предположений п. 7 следует, что мера $\nu(A) := \mu(U^{-1}(A))$ эквивалентна μ и $\nu(dx)/\mu(dx) = |\det U'(U^{-1}(x))|_{\mathbb{K}} \rho(x - U^{-1}(x), x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Ludkovsky. Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures on a non-Archimedean Banach space // Los Alamos Nat. Lab. USA. `math.GM/0106169` и `math.GM/0106170` (ICTP: IC/96/210). [2] A. C. M. van Rooij. Non-Archimedean Functional Analysis. New York: Dekker, 1978.

Институт общей физики РАН

Принято редколлегией
03.02.2003