Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Черный, Векторный стохастический интеграл в первой фундаментальной теореме финансовой математики, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4, 221–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 05:30:07

ВЕКТОРНЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ В ПЕРВОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

А. С. ЧЕРНЫЙ

Пусть $X = (X_t^1, \dots, X_t^d)_{t \geq 0}$ – d -мерный семимартингал на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, являющийся дисконтированным процессом цен d финансовых активов на фондовом рынке. Любой портфель, основанный на этих активах, описывается предсказуемым процессом $H = (H_t^1, \dots, H_t^d)$. Капитал соответствующего портфеля определяется как *векторный стохастический интеграл* $\int_0^t (H_s, dX_s)$. Векторный стохастический интеграл (по поводу его определения см. [1], [2]) является более общим понятием, чем *покомпонентный стохастический интеграл* $\sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i dX_s^i$. Именно, возможны ситуации, когда векторный интеграл существует, в то время как покомпонентный интеграл не определен. Если же покомпонентный интеграл определен, то существует и векторный интеграл. В этом случае они совпадают.

Первая фундаментальная теорема финансовой математики утверждает, что если многомерный семимартингал X удовлетворяет специальным образом определенному условию отсутствия арбитража, то существует эквивалентная вероятностная мера, относительно которой X является *мартингалным преобразованием* (доказательство теоремы содержится в [3]). В определении арбитража используются векторные стохастические интегралы. Если в этом определении ограничиться лишь покомпонентными стохастическими интегралами, то мы получим более слабое условие безарбитражности. Возникает вопрос, является ли оно достаточным для существования эквивалентной меры, относительно которой X – мартингалное преобразование. Оказывается, что ответ на этот вопрос зависит от точного определения арбитража. Рассматриваемые ниже виды арбитража $(\bar{A})$ и $(\tilde{A})$ были введены в статье [4], где они обозначались как $(FLVR)$ и $(FLBR)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность стратегий $(H_n)_{n=1}^\infty$ реализует $(\bar{A})_V$ на X , если выполнены следующие условия:

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ определен векторный стохастический интеграл $\int_0^t ((H_n)_s, dX_s)$;
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \geq 0: \forall t \geq 0 \int_0^t ((H_n)_s, dX_s) \geq -a_n$ (P-п.н.);
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N} \exists \int_0^\infty ((H_n)_s, dX_s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t ((H_n)_s, dX_s)$ (P-п.н.);
- (iv) $\exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0: \forall n \in \mathbb{N} \mathbb{P}(\int_0^\infty ((H_n)_s, dX_s) > \delta_1) > \delta_2$;
- (v) $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^\infty ((H_n)_s, dX_s) \geq -1/n$ (P-п.н.).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность H_n реализует $(\tilde{A})_V$ на X , если выполнены условия (i)–(iv), а условие (v) заменено следующим:

- (v)' $\exists b > 0: \forall n \in \mathbb{N} \int_0^\infty ((H_n)_s, dX_s) \geq -b$ (P-п.н.);
 $\forall \delta > 0 \mathbb{P}(\int_0^\infty ((H_n)_s, dX_s) < -\delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Покомпонентные аналоги $(\bar{A})_C$ и $(\tilde{A})_C$ предыдущих видов арбитража определяются аналогичным образом с заменой условия (i) условием

- (i)' $\forall n \in \mathbb{N}$ определен покомпонентный стохастический интеграл $\sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^i dX_s^i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Условия $(\bar{N}A)_V, (\tilde{N}A)_V, (\bar{N}A)_C$ и $(\tilde{N}A)_C$ означают отсутствие соответствующих последовательностей стратегий для X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Семимартингал X является *мартингалным преобразованием*, если существуют d -мерный локальный мартингал M и d -мерный предсказуемый процесс H такие, что определены стохастические интегралы $\int_0^t H_s^i dM_s^i$ и при этом $\int_0^t H_s^i dM_s^i = M_t^i \forall t \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Семимартингал X удовлетворяет условию (EM) , если существует эквивалентная мера, относительно которой X является мартингальным преобразованием.

С помощью введенных обозначений утверждение первой фундаментальной теоремы финансовой математики записывается в виде импликаций:

$$(EM) \iff (\widetilde{NA})_V \iff (\overline{NA})_V.$$

Ответ на поставленный выше вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. (i) $(EM) \iff (\widetilde{NA})_C \implies (\overline{NA})_C$.
(ii) $(\overline{NA})_C \not\implies (EM)$.

Опишем конструкцию семимартингала для доказательства пункта (ii) теоремы 1. Пусть $(\tau_i)_{i=1}^\infty$, $(\zeta_i)_{i=1}^\infty$, $(\rho_i)_{i=1}^\infty$ и $(\eta_i)_{i=1}^\infty$ являются взаимно независимыми случайными величинами, причем τ_i, ρ_i равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, ζ_i являются гауссовскими с параметрами 0, 1, а η_i принимают значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Положим

$$T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Построим вспомогательные процессы A_t , B_t и C_t . Процесс A_t задается формулой:

$$A_t = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \cdot I(T_n \leq t), \quad t \geq 0.$$

Процесс B_t постоянен на интервалах $[S_i, S_{i+1})$, $B_0 = 0$ и

$$B_{S_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } B_{S_{n-1}} = 1 \text{ или } \eta_n = 1, \\ -2 + 2^{-n}, & \text{если } B_{S_{n-1}} \neq 1 \text{ и } \eta_n = -1. \end{cases}$$

Процесс C_t имеет следующий вид:

$$C_t = \int_0^t (1 - \{s\}) dB_s,$$

где $\{s\}$ обозначает дробную часть s . Пусть W_t — одномерный винеровский процесс, независимый от пары процессов (A_t, C_t) . Если определить двумерный семимартингал по формуле

$$\begin{aligned} X_t^1 &= A_t + C_t + W_t, \\ X_t^2 &= -A_t + C_t - W_t, \end{aligned}$$

то X будет удовлетворять условию $(\overline{NA})_C$ и не будет удовлетворять условию (EM) . Этот пример показывает необходимость использования векторных стохастических интегралов в финансовой математике.

Автор благодарит А. Н. Ширяева за постановку задачи, а также за полезные замечания и ценные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jacod J. Intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle // Lect. Notes in Math. 1980. V. 784. P. 161–172. [2] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. [3] Delbaen F., Shachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes // Preprint, 1996. [4] Delbaen F., Shachermayer W. // Math. Ann. 1994. V. 300. P. 463–520.