Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Павлов, Новые интегрируемые $(2 + 1)$ -уравнения гидродинамического типа, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:05:56

НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ $(2 + 1)$ -УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

М. В. ПАВЛОВ

По аналогии с системами гидродинамического типа, интегрируемыми обобщенным методом годографа, [1],

$$u_t^i = v_j^i(\mathbf{u})u_x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

введем понятие бесконечно-компонентных аналогов треугольного типа таких систем:

$$\partial_{t^n} H_k = \partial_x F_{k,n}(H_0, H_1, \dots, H_{k+n}), \quad k, n = 0, 1, \dots, \quad F_{k,0} \equiv H_0, \quad x \equiv t^0. \quad (2)$$

Системы вида (2) в дальнейшем мы будем называть гидродинамическими цепочками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [2]). Полугамильтонова (нераспадающаяся) система гидродинамического типа (1) называется егоровской, если она имеет пару законов сохранения вида

$$\partial_t a(\mathbf{u}) = \partial_x b(\mathbf{u}), \quad \partial_t b(\mathbf{u}) = \partial_x c(\mathbf{u}). \quad (3)$$

Рассмотрим произвольное количество коммутирующих потоков

$$u_{t^k}^i = w_{(k)j}^i(\mathbf{u})u_x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где $t \equiv t^1$, и такое же количество плотностей законов сохранения $a_n(\mathbf{u})$. В этом случае законы сохранения $\partial_{t^k} a_n(\mathbf{u}) = \partial_x \Phi_{kn}(\mathbf{u})$, $\Phi_{0n}(\mathbf{u}) \equiv a_n(\mathbf{u})$ могут быть записаны в дивергентной форме

$$d\Omega_i = \Phi_{ik}(\mathbf{u}) dt^k. \quad (5)$$

ЛЕММА. Для любых коммутирующих потоков (4) найдутся такие плотности законов сохранения $a_n(\mathbf{u})$, что дивергентная форма (5) будет симметричной, и наоборот, для любых плотностей законов сохранения $a_n(\mathbf{u})$ найдутся такие коммутирующие потоки (4), что дивергентная форма (5) будет симметричной.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только егоровские гидродинамические цепочки, т.е. гидродинамические цепочки, имеющие пару законов сохранения вида (3). Потребуем, чтобы вторые производные от функции $\Omega(t^0, t^1, \dots)$, зависящей (неявно) от бесконечного числа независимых переменных t^k , были (явными) функциями только от конечного числа полевых переменных (моментов) H_m , а именно, $\Omega_{nk} = \Phi_{nk}(H_0, H_1, \dots, H_{n+k})$, где $\Phi_{0i} \equiv H_i$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда первые две егоровские гидродинамические цепочки из всей иерархии коммутирующих потоков имеют вид (здесь $y \equiv t^2$)

$$\begin{aligned} \partial_t H_0 &= \partial_x H_1, \quad \partial_t H_1 = \partial_x \Phi_{11}(H_0, H_1, H_2), \quad \partial_t H_2 = \partial_x \Phi_{12}(H_0, H_1, H_2, H_3), \quad \dots, \\ \partial_y H_0 &= \partial_x H_2, \quad \partial_y H_1 = \partial_x \Phi_{12}(H_0, H_1, H_2, H_3), \quad \partial_y H_2 = \partial_x \Phi_{22}(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4), \quad \dots \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Первый коэффициент $\Phi_{11}(H_0, H_1, H_2)$ полностью определяет не только все остальные коэффициенты дивергентной формы (5), но и соответствующие интегрируемые $(2 + 1)$ -мерные уравнения гидродинамического типа.

На промежуточном этапе вычислений (проверка равенства вторых смешанных производных $\partial_y \Phi_{11} = \partial_t \Phi_{12}$) возникает условие

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial H_2} = \frac{1}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma + \varepsilon H_2}, \quad (6)$$

где $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ – произвольные константы. Представляет интерес рассмотреть следующие случаи.

1. Если положить $\alpha = \beta = \varepsilon = 0$ ($\gamma = 1$), то

$$\Phi_{11} = H_2 + \frac{A}{4}H_1^2 + BH_0H_1 + \frac{B^2}{A}H_0^2 + CH_1 + EH_0 + Ge^{-AH_0}, \quad (7)$$

где (A, B, C, E, G) – произвольные константы. Вспоминая, что $H_0 \equiv \Omega_{xx}$, $H_1 \equiv \Omega_{xt}$, $H_2 \equiv \Omega_{xy}$, $\Phi_{11} \equiv \Omega_{tt}$, получаем новое интегрируемое $(2+1)$ -мерное бездисперсионное уравнение

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + \frac{A}{4}\Omega_{xt}^2 + B\Omega_{xx}\Omega_{xt} + \frac{B^2}{A}\Omega_{xx}^2 + C\Omega_{xt} + E\Omega_{xx} + Ge^{-A\Omega_{xx}}. \quad (8)$$

Если $C = E = G = 0$, $A = -2B^2$ и $B \rightarrow 0$, получаем хорошо известное уравнение Хохлова–Заболоцкой; если положить $G = -2B^2A^{-3} + 2G_0A^{-2}$ и $A \rightarrow 0$, то получаем *модифицированное* уравнение Хохлова–Заболоцкой

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + B\Omega_{xx}\Omega_{xt} + G_0\Omega_{xx}^2 + \frac{B^2}{3}\Omega_{xx}^3;$$

в общем же случае с помощью *галилеевского* преобразования выражение (7) приводится к более компактному виду

$$\Phi_{11} = H_2 + \frac{A}{4}H_1^2 + Ge^{-AH_0},$$

что определяет нетривиальное обобщение (т.е. когда $G \neq 0$) иерархии бездисперсионного предела дискретного аналога уравнения Кадомцева–Петвиашвили (см. [3]). Таким образом, даже в простейшем случае ($\alpha = \beta = \varepsilon = 0$, $\gamma \neq 0$) с помощью предложенного подхода найдены новые $(2+1)$ -мерные интегрируемые уравнения гидродинамического типа.

2. При $\beta = \varepsilon = 0$ ($\alpha = 1$, константа γ убирается сдвигом: $H_0 + \gamma \rightarrow H_0$) аналогично получаем

$$\Phi_{11} = \frac{\Omega_{xy}}{\Omega_{xx}} + \left(\frac{1}{\Omega_{xx}} + \frac{A}{4\Omega_{xx}^2} \right) \Omega_{xt}^2 + \left(\frac{B}{\Omega_{xx}} + \frac{C}{\Omega_{xx}^2} \right) \Omega_{xt} + \frac{C^2}{A\Omega_{xx}^2} + \frac{E}{\Omega_{xx}} + Ge^{A/\Omega_{xx}},$$

где (A, B, C, E, G) – произвольные константы, еще одно новое интегрируемое $(2+1)$ -мерное уравнение гидродинамического типа.

3. Если положить теперь $\varepsilon = 0$ ($\beta = 1$, H_0 и константа γ убираются галилеевским преобразованием $H_1 + \alpha H_0 + \gamma \rightarrow H_1$, $x - \alpha t \rightarrow x$), то получаем еще одно новое $(2+1)$ интегрируемое уравнение гидродинамического типа

$$\Omega_{tt} = \frac{\Omega_{xy} + B\Omega_{xx} + C}{\Omega_{xt}} + \frac{1}{6}w(\Omega_{xx})\Omega_{xt}^2,$$

где функция w является решением *уравнения Шази*

$$w''' + 2ww'' = 3w'^2.$$

Общий случай ($\varepsilon \neq 0$), так же как и соответствующие гидродинамические цепочки за недостатком места будут рассмотрены в отдельной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. П. Царев // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 3. С. 534–537. [2] М. В. Павлов, С. П. Царев // Функции и их приложения. 2003. Т. 37. № 1. С. 38–54. [3] Lei Yu // J. Phys. A. 2000. V. 33. № 45. P. 8127–8138.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.02.2003