Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Федорчук, Слабо бесконечномерные пространства,
УМН, 2007, том 62, выпуск 2, 109–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:45:32

УДК 515.12

Памяти П. С. Александра посвящается

Слабо бесконечномерные пространства

В. В. Федорчук

Обзор посвящен двум сериям новых классов пространств, промежуточных между классом слабо бесконечномерных в смысле П. С. Александра пространств и классом C -пространств, а именно классам m - C -пространств и w - m - C -пространств, $m = 2, 3, \dots, \infty$. Классы 2 - C и w - 2 - C совпадают с классом слабо бесконечномерных пространств, а компактные ∞ - C -пространства – это в точности C -компакты Хэйвера. На эти классы распространяются основные результаты теории слабо бесконечномерных пространств, включая классификацию посредством трансфинитных лебеговых размерностей и индексов Лузина–Серпинского. Слабые m - C -пространства характеризуются посредством существенных отображений в m -компакты Хендерсона. Доказывается существование наследственно m -сильно бесконечномерных пространств.

Библиография: 102 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	109
§ 1. Различные классы слабо бесконечномерных пространств. Теоремы сложения, суммы и монотонности	111
§ 2. Отображения, понижающие размерность	127
§ 3. Отображения, повышающие размерность	132
§ 4. Трансфинитные продолжения лебеговой размерности и размерность Ind_m	133
§ 5. Факторизационные теоремы и компактификации	146
§ 6. Существенные отображения и m -компакты Хендерсона	151
§ 7. Наследственно сильно бесконечномерные компакты	155
Добавление. Промежуточные размерности бикомпактов	158
Список литературы	160

Введение

7 мая 2006 г. исполнилось 110 лет со дня рождения Павла Сергеевича Александра – создателя советской топологической школы, получившей всемирное

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-00764 и гранта РНП 2.1.1. 7988.

© В. В. Федорчук, 2007

признание. П. С. Александров, будучи учеником Н. Н. Лузина, начал свою научную работу в области дескриптивной теории множеств. В 1915 г. он доказал, что всякое несчетное борелевское множество (на прямой) имеет мощность континуума.

В начале 20-х годов П. С. Александров вместе с П. С. Урысоном основал и развил теорию бикompактных пространств. Затем он посвятил себя геометрическому направлению в топологии. На основе введенного им понятия нерва покрытия были доказаны теоремы об аппроксимации компактов и более общих пространств полиэдрами. Вершинами творчества П. С. Александрова стали созданная им в конце 20-х–начале 30-х годов гомологическая теория размерности и написанная зимой 1941–42 г. знаменитая “Казанская” работа [1] о гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств. “Казанская” работа завершила большой цикл исследований, начавшийся с построения гомологической теории компактов. За этот цикл исследований П. С. Александрову в 1943 г. была присуждена Сталинская премия 1-й степени.

Основная теорема гомологической теории размерности в современной форме гласит: *для всякого конечномерного компакта X имеет место равенство $\dim X = \dim_{\mathbb{Z}} X$, где $\dim_{\mathbb{Z}} X$ – когомологическая размерность компакта X с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$, равная наибольшему числу n такому, что найдется замкнутое множество $A \subset X$, для которого $H^n(X, A; \mathbb{Z}) \neq 0$* . П. С. Александров получил этот результат, опираясь на предложенную им характеристику размерности $\dim$ в терминах продолжения отображений в сферы и на теорему Хопфа о продолжении отображений, и поставил вопрос о равенстве $\dim = \dim_{\mathbb{Z}}$ в классе всех метризуемых компактов. Эта проблема П. С. Александрова оставалась нерешенной более полувека, пока в 1987 г. А. Н. Дранишников [2] не построил бесконечномерный компакт X когомологической размерности $\dim_{\mathbb{Z}} X = 3$.

В 1948 г. в предисловии к русскому переводу монографии В. Гуревича и Г. Волмэна [3] П. С. Александров рассмотрел понятие слабой бесконечномерности. Исследования в этом направлении, начавшиеся 10 лет спустя в работах Б. Т. Левшенко [4] и Е. Г. Складенко [5], быстро показали, какое важное место занимают слабо бесконечномерные пространства (или кратко *wid*-пространства) в классе всех бесконечномерных пространств. Была создана стройная внутренняя теория *wid*-пространств, построены примеры, демонстрирующие взаимоотношения класса *wid*-пространств с другими классами бесконечномерных пространств. Отметим здесь: 1) теорему Хендерсона [6] о том, что всякий сильно бесконечномерный компакт содержит континуум, любой подконтинуум которого бесконечномерен; 2) пример Р. Поля [7] несчетномерного *wid*-компакта; 3) совсем недавний пример Борста [8] *wid*-компакта, не являющегося *C*-пространством.

Свойство *C* для метрических пространств в 1973 г. ввел В. Хэйвер [9], доказавший, что локально стягиваемое метрическое пространство, представимое в виде объединения счетного числа компактов со свойством *C*, является ANR-пространством. Топологическое определение *C*-пространств было предложено в 1978 г. Д. Аддисом и Дж. Грешэмом [10]. Выяснилось, что *C*-пространства играют важную роль в теории клеточно-подобных отображений [11], в теории селекций многозначных отображений [12]–[14] и других разделах топологии.

В [15] начато изучение m - C -пространств, промежуточных между wid - и C -пространствами:

$$\text{wid} = 2\text{-}C \supset 3\text{-}C \supset \cdots \supset m\text{-}C \supset \cdots \supset \infty\text{-}C \supset C. \quad (0.1)$$

В настоящей работе вводится понятие слабого m - C -пространства, или w - m - C -пространства, с естественным соотношением $m\text{-}C \subset w\text{-}m\text{-}C$ и аналогичной (0.1) последовательностью

$$\text{wid} = w\text{-}2\text{-}C \supset \cdots \supset w\text{-}m\text{-}C \supset \cdots \supset w\text{-}\infty\text{-}C \supset wC \supset C. \quad (0.2)$$

На m - C - и w - m - C -пространства переносятся практически все результаты, касающиеся wid -пространств. Более того, автору пока не известны примеры пространств, которые противоречили бы одному из равенств

$$m\text{-}C = m + 1\text{-}C, \quad w\text{-}m\text{-}C = w\text{-}m + 1\text{-}C, \quad m\text{-}C = w\text{-}m\text{-}C.$$

Возникает большое число и других вопросов, с которыми можно познакомиться в [16].

Статья не является всеобъемлющим обзором теории слабо бесконечномерных пространств. Дополнительную информацию по рассматриваемой теме читатель может найти в [15], [17]–[19] и в статьях, приведенных в списке литературы. Многие результаты приведены без доказательств. В первую очередь это относится к § 6 и добавлению, которые в развернутом виде будут опубликованы отдельно.

§ 1. Различные классы слабо бесконечномерных пространств.

Теоремы сложения, суммы и монотонности

Бесконечномерность как отрицание конечномерности начинает становиться содержательным понятием, если мы обращаемся к различным, но эквивалентным (например, для метрических компактов) определениям конечной размерности. Создатель теории размерности П. С. Урысон доказал, что для произвольного метризуемого компакта X имеет место равенство

$$\dim X = \text{ind } X = \text{Ind } X,$$

впоследствии названное *тождеством Урысона*. Основным размерностным инвариантом в исследованиях П. С. Урысона была введенная им малая индуктивная размерность, которую он просто называл размерностью. Летом 1922 г. П. С. Урысон писал (опубликовано в [20]):

“Вместо бесконечной размерности можно было бы ввести трансфинитные размерности для всех чисел второго класса и, может быть, даже дальше, потому что размерность (согласно ее определению) есть порядковое число. Впрочем, это распространение, по крайней мере в данный момент, кажется мне лишним интереса, тем более, что даже в этом случае останутся, по-видимому, множества, не укладывающиеся в классификацию (области гильбертова пространства)”.

Формальное определение малой трансфинитной размерности ind было дано В. Гуревичем [21] в 1928 г., а большая трансфинитная размерность Ind была определена Ю. М. Смирновым [22] лишь в 1959 г. К настоящему времени теория трансфинитных размерностей сложилась в хорошо разработанную область бесконечномерной топологии, с которой читатель может познакомиться в монографиях [17], [18] и обзорах [23], [24].

П. С. Урысон охарактеризовал n -мерные пространства как объединения нульмерных подпространств в количестве $n + 1$ штук. В последний год своей жизни он владел понятием *счетномерного* пространства, т.е. пространства, являющегося суммой счетного числа конечномерных, а значит, и нульмерных (в классе сепарабельных метрических пространств) множеств. П. С. Урысон ставил вопрос о связи этого понятия с трансфинитной размерностью и высказал гипотезу [25] о несчетномерности гильбертова куба. Формальное определение счетномерного пространства (в случае метрических пространств) было дано В. Гуревичем в [21], где он доказал несчетномерность гильбертова куба. В монографии В. Гуревича и Г. Волмэна [26] показано, что сепарабельное полное метрическое пространство счетномерно тогда и только тогда, когда для него определена малая трансфинитная размерность. Таким образом, исследование счетномерных пространств во многом сводится к изучению пространств, для которых определена трансфинитная размерность.

Третий тип бесконечномерности на основе понятия перегородки был введен П. С. Александровым [3] в 1948 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Нормальное пространство X называется *слабо бесконечномерным*, если для любой последовательности (F_1^i, F_2^i) , $i \in \omega$, дизъюнктивных пар замкнутых в X множеств существуют перегородки P_i между F_1^i и F_2^i с пустым пересечением. Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным, называется *сильно бесконечномерным*.

Несколько лет спустя Ю. М. Смирнов предложил другое определение слабой бесконечномерности. В нем требуется, чтобы пересечение конечного числа перегородок P_i было пусто. Такие пространства будем называть *S-слабо бесконечномерными*. В классе бикомпактов (и даже счетно компактных пространств) понятия слабой и *S-слабой* бесконечномерности совпадают. Дискретная сумма конечномерных кубов $\bigoplus I^n$ показывает, что *S-слабо бесконечномерные* пространства образуют собственный подкласс класса слабо бесконечномерных пространств.

В 1973 г. В. Хэйвер [9] для метрического пространства X определил *свойство* C , которое состоит в следующем:

для всякой последовательности ε_i , $i \in \omega$, положительных чисел существует такая последовательность $\{v_i\}$ дизъюнктивных открытых в X семейств, что $\text{diam } V < \varepsilon_i$ для каждого $V \in v_i$ и $X = \bigcup \{V : V \in v_i, i \in \omega\}$.

Хэйвер заметил, что всякое счетномерное метрическое пространство обладает свойством C , и доказал [27], что всякое локально стягиваемое метрическое пространство, представимое в виде счетного объединения компактов со свойством C , является ANR-пространством. В 1978 г. Аддис и Грешэм [10]

предложили топологическую версию свойства C , не накладывая на пространство никаких ограничений. Но мы будем рассматривать только нормальные пространства (включая аксиому T_1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Нормальное пространство X называется C -пространством ($X \in C$), если для любой последовательности (u_i) , $i \in \omega$, его открытых покрытий существует последовательность (v_i) дизъюнктивных открытых семейств пространства X , C -вписанная в последовательность (u_i) . Последнее означает, что каждое семейство v_i вписано в покрытие u_i , а совокупность семейств v_i является покрытием пространства X , т.е.

$$X = \bigcup \left\{ \bigcup v_i : i \in \omega \right\}. \quad (1.1)$$

В этом случае говорят также, что последовательность (u_i) (бесконечная или конечная) *несущественна*.

Непосредственно из определения вытекает, что всякое C -пространство X является *просеянным* в смысле Бинга [28], т.е. в любое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие, распадающееся в сумму счетного числа дизъюнктивных семейств. Поэтому из теоремы Нагами [29] о паракомпактности всякого нормального счетно паракомпактного просеянного пространства вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Всякое счетно паракомпактное C -пространство паракомпактно.*

Это утверждение дает нам большой запас конечномерных пространств, не являющихся C -пространствами. Таковым будет, например, нульмерное пространство ω_1 всех счетных трансфинитов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. В классе метрических компактов определение Хэйвера совпадает с определением Аддиса и Грешэма. Из нижеследующего предложения 1.5 вытекает, что всякое метрическое пространство, представимое в виде объединения счетного числа компактов со свойством C , является C -пространством. Но в то же время не всякое польское C -пространство обладает свойством C . В самом деле, упомянутый во введении несчетномерный wid -компакт P . Поля является C -пространством, содержащим сильно бесконечномерное подпространство Y . Следовательно, Y не является C -пространством согласно предложению 1.6. В то же время Y имеет свойство C , поскольку оно наследуется при переходе к подпространству.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5 [10]. *Если наследственно коллективно нормальное пространство X может быть представлено в виде объединения счетного числа подпространств $X_i \in C$, то $X \in C$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 [10]. *Всякое C -пространство слабо бесконечномерно.*

С применением предложенной Ф. Острандом [30] характеристики размерности $\dim$ доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 [10]. *Всякое паракомпактное конечномерное пространство является C -пространством.*

Из предложений 1.5 и 1.7 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.8 [10]. *Всякое наследственно паракомпактное счетномерное пространство является C -пространством.*

Таким образом, ввиду упомянутых выше примеров Р. Поля и П. Борста метрические C -пространства занимают строго промежуточное положение между метрическими счетномерными и метрическими wid -пространствами. Не известен ответ на следующий вопрос.

ВОПРОС 1. Является ли C -пространством всякое паракомпактное счетномерное пространство?

В то же время, за пределами паракомпактов эти классы различаются. Как отмечено выше, не всякое нульмерное пространство является C -пространством. Предложение 1.3 показывает, что определение C -пространства выделяет не только размерностные свойства пространства, но и свойства типа компактности. В. А. Чатырко предложил [31] в определении C -пространства ограничиться локально конечными покрытиями. При этом получается более широкий класс пространств, содержащий все конечномерные пространства. Ниже мы укажем некоторые отличия теории C -пространств от теории нового класса lf - C -пространств. Основным недостатком этого нового класса пространств является то, что нельзя автоматически доказать принадлежность классу lf - C замкнутых подмножеств lf - C -пространств (см. предложение 1.23).

Но прежде чем перейти к новым классам пространств и к параллельному изложению новых возникающих при этом теорий, вернемся к предложению 1.6. Почему всякое C -пространство X слабо бесконечномерно? Для последовательности (F_1^i, F_2^i) , $i \in \omega$, дизъюнктных подмножеств пространства X надо найти перегородки P_i между F_1^i и F_2^i с пустым пересечением $\bigcap P_i$. Воспользовавшись нормальностью пространства X , найдем такие окрестности OF_1^i и OF_2^i , что $[OF_1^i] \cap [OF_2^i] = \emptyset$. Полагая $U_1^i = X \setminus [OF_2^i]$, $U_2^i = X \setminus [OF_1^i]$, получаем бинарные открытые покрытия $u_i = \{U_1^i, U_2^i\}$ пространства X . Поскольку $X \in C$, существует последовательность (v_i) , $i \in \omega$, дизъюнктных открытых семейств, C -вписанная в последовательность (u_i) . Полагаем теперь

$$O_1^i = OF_1^i \cup \text{St}(OF_1^i, v_i), \quad O_2^i = OF_2^i \cup \left(\bigcup \{V \in v_i : V \cap OF_1^i = \emptyset\} \right). \quad (1.2)$$

Так как семейство v_i вписано в покрытие u_i , ни один из элементов $V \in v_i$ не пересекается одновременно с двумя множествами OF_1^i и OF_2^i . Поэтому множества O_1^i и O_2^i являются непересекающимися окрестностями множеств F_1^i и F_2^i , а множества $P_i = X \setminus O_1^i \cup O_2^i$ – перегородками между F_1^i и F_2^i . Наконец, из (1.2) вытекает, что $\bigcup (\bigcup v_i) \subset O_1^i \cup O_2^i$. Поэтому $\bigcap_i P_i = \emptyset$ в силу (1.1).

Итак, при доказательстве предложения 1.6 у нас возникли бинарные покрытия $u_i = \{U_1^i, U_2^i\}$, рассмотрение которых и привело к слабой бесконечномерности пространства. Это приводит к простой идее определения целого спектра классов пространств, промежуточных между C -пространствами и wid -пространствами: в определении C -пространства надо ограничить класс рассматриваемых покрытий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Пусть $\mathcal{P}$ – класс открытых покрытий топологических пространств. Нормальное пространство X называется $\mathcal{P}$ - C -пространством (кратко $X \in \mathcal{P}\text{-}C$), если всякая последовательность (u_i) , $i \in \omega$, его покрытий из класса $\mathcal{P}$ несущественна.

Возникают следующие классы пространств:

- 1) k - C -пространства, k – натуральное число ≥ 2 , $\mathcal{P}$ состоит из покрытий, содержащих не более чем k элементов (всякое нормальное пространство является 1- C -пространством);
- 2) ∞ - C -пространства, $\mathcal{P}$ состоит из всех конечных покрытий;
- 3) ω_0 - C -пространства, $\mathcal{P}$ состоит из всех счетных покрытий;
- 4) sf - C -пространства, $\mathcal{P}$ состоит из всех звездно конечных покрытий;
- 5) lf - C -пространства, $\mathcal{P}$ состоит из всех локально конечных покрытий;
- 6) pf - C -пространства, $\mathcal{P}$ состоит из всех точечно конечных покрытий.

Кроме 1), 2), 3), можно рассматривать и другие ограничения на мощность покрытий, комбинируя их с ограничениями типа 4), 5), 6).

Имеет место очевидное предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Если $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ – классы покрытий и $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, то $\mathcal{P}_2\text{-}C \subset \mathcal{P}_1\text{-}C$.

Таким образом, возникает следующая цепочка классов пространств:

$$C \subset \omega_0\text{-}C \subset \infty\text{-}C \subset \dots \subset k\text{-}C \subset \dots \subset 2\text{-}C.$$

Наибольший член этой последовательности, как мы видели, совпадает с классом wid -пространств. Если мы не выходим за пределы бикompактных пространств, то классы C , $\omega_0\text{-}C$ и $\infty\text{-}C$ совпадают. Поскольку основные проблемы, касающиеся слабо бесконечномерных пространств, не решены для метризуемых компактов, нас в первую очередь будут интересовать классы конечных покрытий. В связи с этим введем в рассмотрение упорядоченное по типу $\omega + 1$ множество $\bar{\mathbb{N}}$, состоящее из натуральных чисел $k \geq 2$ и элемента ∞ , превосходящего все k . Множество $\bar{\mathbb{N}}$ удобно тем, что многие утверждения об m - C -пространствах, $m \in \bar{\mathbb{N}}$, доказываются единым способом, не зависящим от m . В дальнейшем буквой m будем обозначать только элементы множества $\bar{\mathbb{N}}$.

Определение $\mathcal{P}$ - C -пространства является обобщением определения C -пространства. Обратимся теперь к определению wid -пространства. Нахождение перегородок P_i между непересекающимися замкнутыми множествами F_1^i и F_2^i , подчиненных условию $\bigcap_i P_i = \emptyset$, равносильно нахождению дизъюнктных пар окрестностей OF_1^i и OF_2^i , в совокупности покрывающих все пространство. Но вместо дизъюнктных пар (F_1^i, F_2^i) можно рассматривать дизъюнктные семейства других классов: дизъюнктные тройки, дизъюнктные конечные семейства и т.д. Это приводит к определению классов пространств, более узких, чем класс wid -пространств. Предварительно приведем несколько вспомогательных понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Последовательность k_i , $i \in \omega$, натуральных чисел ≥ 2 будем называть m -последовательностью, если все $k_i = m$ при конечном m .

Семейство открытых (замкнутых) подмножеств пространства X , состоящее не более чем из k элементов, будем называть *открытым (замкнутым) k -семейством* пространства X . Дизъюнктные замкнутые k -семейства будем называть *k -системами*. Открытые k -семейства, являющиеся покрытиями, будем называть *k -покрытиями* пространства X .

Пусть $\Phi = \{F_1, \dots, F_k\}$ – k -система пространства X (в записи k -семейства мы предполагаем, что оно состоит ровно из k множеств, некоторые из которых могут быть пустыми). Всякое дизъюнктное семейство $O\Phi = \{OF_1, \dots, OF_k\}$ окрестностей элементов Φ называется *окрестностью* системы Φ . Если k -система Φ комбинаторно вписана в k -покрытие u , то покрытие u будем называть *k -накрытием* системы Φ , а пару (u, Φ) – *k -накрывающей парой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Нормальное пространство X называется *w - m - C -пространством* ($X \in w$ - m - C), если для любой m -последовательности (k_i) всякая последовательность (Φ_i) k_i -систем пространства X *несущественна*, т.е. существуют такие окрестности $O\Phi_i$, что семейство $\bigcup\{O\Phi_i : i \in \omega\}$ является покрытием пространства X . Очевидно, в этом определении можно ограничиться рассмотрением лишь функционально замкнутых систем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. *Всякое m - C -пространство является w - m - C -пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем m -последовательность (k_i) и последовательность $(\Phi_i = \{F_1^i, \dots, F_{k_i}^i\})$ k_i -систем m - C -пространства X . Поскольку пространство X нормально, существуют такие окрестности $O_1 F_j^i$ множеств F_j^i , что

$$[O_1 F_{j_1}^i] \cap [O_1 F_{j_2}^i] = \emptyset, \quad \text{если } j_1 \neq j_2. \quad (1.3)$$

Полагаем $u_i = \{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\}$, где

$$U_j^i = X \setminus \bigcup\{[O_1 F_l^i] : l \neq j\}. \quad (1.4)$$

Из (1.3) и (1.4) вытекает, что u_i является открытым покрытием пространства X . По определению m - C -пространства существует последовательность (v_i) дизъюнктных открытых в X семейств, C -вписанная в последовательность (u_i) . При этом, переходя к укрупнениям семейств v_i , можно считать, что каждое v_i комбинаторно вписано в u_i , т.е. $v_i = \{V_1^i, \dots, V_{k_i}^i\}$ и $V_j^i \subset U_j^i$. Полагаем $OF_j^i = O_1 F_j^i \cup V_j^i$. Покажем, что $O\Phi_i = \{OF_1^i, \dots, OF_{k_i}^i\}$ является окрестностью системы Φ_i . Для этого надо проверить, что

$$OF_{j_1}^i \cap OF_{j_2}^i = \emptyset, \quad \text{если } j_1 \neq j_2. \quad (1.5)$$

Из (1.4) и включений $V_j^i \subset U_j^i$ вытекают равенства $O_1 F_{j_1}^i \cap V_{j_2}^i = \emptyset = O_1 F_{j_2}^i \cap V_{j_1}^i$, которые вместе с (1.3) и дизъюнктностью семейств v_i гарантируют выполнение равенства (1.5). Семейство $\bigcup\{O\Phi_i : i \in \omega\}$ является покрытием пространства X в силу включений $V_j^i \subset OF_j^i$. Предложение 1.13 доказано.

Следующее утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. *Если $m_1 < m_2$, то w - m_2 - $C \subset w$ - m_1 - C .*

В определении 1.12 можно было бы рассмотреть и бесконечные системы множеств. Но в этом случае вместо дизъюнктивности надо предполагать дискретность этих систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Коллективно нормальное пространство X называется w - C -пространством ($X \in w$ - C), если любая последовательность (Φ_i) дискретных семейств замкнутых множеств пространства X несущественна.

Так же, как предложение 1.13, доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.16. Всякое коллективно нормальное C -пространство является w - C -пространством.

Предложения 1.13 и 1.16 позволяют называть w - m - C -пространства *слабыми m - C -пространствами*, а w - C -пространства *слабыми C -пространствами*.

ВОПРОС 2. Всякое ли слабое m - C -пространство является m - C -пространством?

Положительный ответ очевиден при $m = 2$. Что касается $m \geq 3$, ответ на вопрос 2 не известен и в классе метризуемых компактов.

ВОПРОС 3. Всякое ли паракомпактное слабое C -пространство является C -пространством?

Следующее утверждение дает нам широкий спектр слабых C -пространств, не являющихся C -пространствами (все конечномерные счетно компактные, но не бикомпактные пространства).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.17. Всякое конечномерное счетно компактное пространство является слабым C -пространством.

Поскольку всякое дискретное семейство подмножеств счетно компактного пространства конечно, предложение 1.17 вытекает из следующей упомянутой выше теоремы Остранда.

ТЕОРЕМА 1.18 [30]. Если $\dim X \leq n$, то во всякое локально конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие, представимое в виде объединения не более чем $n + 1$ дискретных в X семейств множеств.

Гипотетически имеется еще одна возможность получения новых классов слабо бесконечномерных пространств. А именно, можно комбинировать определения 1.9 и 1.12, рассматривая k_i -накрывающие пары (u_i, Φ_i) и пробуя найти последовательность $(O\Phi_i)$, C -вписанную в последовательность u_i . Но, как показывает предложение 1.19, при таком подходе мы не получаем ничего нового.

Конечное открытое покрытие u пространства X будем называть его m -покрытием, если u состоит из m элементов при $m \in \mathbb{N}$. Когда мы будем говорить о последовательности m -покрытий u_i пространства X , всегда будет предполагаться, что фиксирована последовательность k_i натуральных чисел и $|u_i| = k_i$. Последовательность (v_i) называется *комбинаторно C -вписанной* в последовательность (u_i) , если она C -вписана и каждое семейство v_i комбинаторно вписано в покрытие u_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.19 [15]. *Для нормального пространства X следующие условия равносильны.*

- 1) X является m - C -пространством.
- 2) Для любой последовательности (u_i) m -покрытий пространства X существует последовательность (v_i) дизъюнктивных открытых семейств, комбинаторно C -вписанная в последовательность (u_i) .
- 3) Для любой m -последовательности (k_i) и любой последовательности (u_i, Φ_i) k_i -накрывающих пар существует последовательность $(O\Phi_i)$ окрестностей систем Φ_i , C -вписанная в последовательность (u_i) .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.20. Если m - C -пространство X счетно паракомпактно, то в любую последовательность (u_i) его m -покрытий можно комбинаторно C -вписать последовательность (v_i) дизъюнктивных функционально открытых семейств.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.21. По аналогии с S -слабо бесконечномерными пространствами вводятся понятия S - m - C -, S - C -, S - w - m - C - и S - w - C -пространства требованием, чтобы уже некоторое конечное число семейств v_i (окрестностей $O\Phi_i$) покрывало пространство X . При этом здесь уже не надо ограничиваться счетно паракомпактными пространствами, для того чтобы предполагать эти семейства функционально открытыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.22. Почти все вновь введенные классы пространств замкнуты относительно перехода к замкнутым подпространствам. Но мы не можем этого утверждать про $\text{sf-}C$ -, $\text{lf-}C$ -, $\text{pf-}C$ -пространства и S -модификации этих классов из замечания 1.21. Основной проблемой здесь является невозможность продолжения, например, открытого звездно-конечного покрытия замкнутого подпространства до открытого звездно-конечного покрытия всего пространства. Этого нельзя сделать даже в классе метрических пространств. В случае локально конечных и точечно конечных покрытий ситуация существенно лучше (см. предложения 1.23 и 1.24).

ВОПРОС 4. Замкнуты ли классы $\text{sf-}C$ -, $\text{lf-}C$ - и $\text{pf-}C$ -пространств относительно перехода к замкнутым подпространствам?

Частичный ответ на этот вопрос дают следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.23. *Всякое замкнутое подмножество счетно паракомпактного коллективно нормального $\text{lf-}C$ -пространства является $\text{lf-}C$ -пространством.*

Это утверждение следует из теоремы Катетова [32] о том, что всякое локально конечное открытое покрытие замкнутого подмножества счетно паракомпактного коллективно нормального пространства X можно продолжить до локально конечного открытого покрытия всего пространства X . Вытекает оно и из более ранней теоремы Даукера [33] о раздутии локально конечного семейства замкнутых подмножеств пространства X до локально конечного открытого семейства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.24. *Всякое счетно паракомпактное коллективно нормальное $\text{lf-}C$ -пространство является $\text{pf-}C$ -пространством.*

Для доказательства достаточно применить теорему Э. Майкла [34] и К. Нагами [29] о том, что в точечно конечное открытое покрытие коллективно нормального пространства можно вписать σ -локально конечное открытое покрытие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.25. *Если w - m - C -пространство X является счетно паракомпактно, то в определении 1.12 можно считать, что окрестности $O\Phi_i = \{OF_1^i, \dots, OF_{k_i}^i\}$ состоят из функционально открытых множеств.*

При доказательстве используется то, что всякое счетное открытое покрытие счетно паракомпактного пространства можно ужать до замкнутого покрытия.

ЛЕММА 1.26. *Пусть (замкнутое) подмножество Y наследственно нормального (счетно паракомпактного) пространства X является w - m - C -пространством. Тогда для любой m -последовательности (k_i) и любой последовательности (Φ_i) k_i -систем пространства X существуют такие их окрестности $O\Phi_i$, что $Y \subset \bigcup(\bigcup\{O\Phi_i : i \in \omega\})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай счетно паракомпактного X и замкнутого Y . Пусть $\Phi_i = \{F_1^i, \dots, F_{k_i}^i\}$. Положим ${}^0F_j^i = F_j^i \cap Y$ и $\Phi_i^0 = \{{}^0F_1^i, \dots, {}^0F_{k_i}^i\}$. Согласно определению 1.12, в w - m - C -пространстве Y существуют такие окрестности $O\Phi_i^0 = \{V_1^i, \dots, V_{k_i}^i\}$ систем Φ_i^0 , что

$$Y = \bigcup\{V_j^i : 1 \leq j \leq k_i, i \in \omega\}. \quad (1.6)$$

Положим $V_i = \bigcup\{V_j^i : 1 \leq j \leq k_i\}$. Поскольку счетная паракомпактность наследуется замкнутыми подмножествами, в открытое покрытие $v = \{V_i : i \in \omega\}$ пространства Y можно комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\gamma = \{\Gamma_i : i \in \omega\}$. Положим $\Gamma_j^i = \Gamma_i \cap V_j^i$. Поскольку $\Gamma_i \subset V_i$ и семейства $O\Phi_i^0$ дизъюнкты, множества Γ_j^i замкнуты и

$$Y = \bigcup\{\Gamma_j^i : 1 \leq j \leq k_i, i \in \omega\}. \quad (1.7)$$

Положим $H_j^i = \Gamma_j^i \cup F_j^i$. Семейства $h_i = \{H_1^i, \dots, H_{k_i}^i\}$ дизъюнкты. Поэтому их можно заключить в окрестности $Oh_i = \{OH_1^i, \dots, OH_{k_i}^i\}$. Согласно (1.7), они и будут искомыми окрестностями $O\Phi_i$.

Для наследственно нормального X и произвольного Y сначала для каждого семейства $\Phi_i = \{F_1^i, \dots, F_{k_i}^i\}$ найдем окрестности $O_1\Phi_i = \{G_1^i, \dots, G_{k_i}^i\}$ с условием $[G_{j_1}^i] \cap [G_{j_2}^i] = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$. Затем полагаем ${}^0F_j^i = [G_j^i] \cap Y$ и $\Phi_i^0 = \{{}^0F_1^i, \dots, {}^0F_{k_i}^i\}$. В Y находим окрестности $O\Phi_i^0 = \{V_1^i, \dots, V_{k_i}^i\}$, удовлетворяющие условию (1.6). Дизъюнкты семейства $\{V_1^i, \dots, V_{k_i}^i\}$ можно продолжить до дизъюнкты открытых в X семейств $\{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\}$ согласно нижеследующей лемме 1.27. Полагая $OF_j^i = U_j^i \cup G_j^i \setminus \bigcup\{G_{j'}^i : j' \neq j\}$, получаем искомые окрестности $O\Phi_i = \{OF_1^i, \dots, OF_{k_i}^i\}$. Лемма 1.26 доказана.

Следующее утверждение, уже частично использованное нами в предыдущем доказательстве, общеизвестно. Мы приводим его только для удобства дальнейших ссылок.

ЛЕММА 1.27 (о продолжении дизъюнктивных открытых семейств). Пусть Y – подпространство пространства X и $\{U_1, \dots, U_s\}$ – конечное дизъюнктивное семейство открытых подмножеств пространства Y . Тогда дизъюнктивное семейство открытых в X множеств $\{V_1, \dots, V_s\}$ со свойством $V_i \cap Y = U_i$ существует в следующих случаях:

- 1) X наследственно нормально;
- 2) X счетно паракомпактно, Y замкнуто, а U_i функционально открыты в Y (в этом случае V_i можно выбрать функционально открытыми в X).

ТЕОРЕМА 1.28 (теорема сложения). Если наследственно нормальное пространство X можно представить в виде объединения счетного семейства w - m - C -пространств Y_j , то X является w - m - C -пространством.

При доказательстве используется стандартный прием. Последовательность $\varphi = (\Phi_i)$ k_i -систем пространства X разбивается в дизъюнктивную сумму бесконечных последовательностей φ_j . Затем к каждой последовательности φ_j и подпространству Y_j применяется лемма 1.26.

ТЕОРЕМА 1.29 (теорема суммы). Если счетно паракомпактное пространство X можно представить в виде объединения счетного семейства замкнутых подмножеств Y_j , каждое из которых есть w - m - C -пространство, то X является w - m - C -пространством.

Доказательство проходит по схеме доказательства теоремы 1.28. При этом дополнительно используются предложение 1.25 и лемма 1.27.2).

ТЕОРЕМА 1.30 (теорема монотонности). Всякое F_σ -подмножество счетно паракомпактного w - m - C -пространства является w - m - C -пространством.

Теорема 1.30 вытекает из теоремы 1.29 и наследования свойства w - m - C замкнутыми подпространствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.31. Как отмечено в замечании 1.4, C -компакты могут содержать сильно бесконечномерные подмножества. Причем упомянутое там пространство Y является G_δ -подмножеством компакта Р. Поля. Таким образом, ни свойство m - C , ни свойство w - m - C не наследуется G_δ -подмножествами. В то же время, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.32. Если всякое G_δ -подмножество наследственно нормального пространства X является w - m - C -пространством, то и всякое его подмножество является w - m - C -пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим только случай m - C -пространств. Пусть $Y \subset X$. Фиксируем m -последовательность (k_i) и последовательность (u_i) k_i -покрытий пространства Y . Каждое u_i продолжаем до открытого в X k_i -семейства u_i^1 . Полагаем $Z = \bigcap_i (\bigcup u_i^1)$ и $u_i^0 = u_i^1|Z$. По предположению в последовательность (u_i^0) k_i -покрытий G_δ -множества Z можно C -вписать последовательность (v_i^0) дизъюнктивных открытых в Z семейств. Полагая $v_i = v_i^0|Y$, получаем искомую последовательность (v_i) дизъюнктивных открытых в Y семейств, C -вписанную в последовательность (u_i) . Предложение 1.32 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.33. Наследственная нормальность пространства необходима для того, чтобы всякое его подпространство было m - C -пространством.

Для w - m - C -пространств имеют место утверждения типа теоремы Даукера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.34. Пусть подмножество (F_σ -подмножество) Y наследственно нормального (счетно паракомпактного) пространства X является w - m - C -пространством и любое замкнутое в X множество $F \subset X \setminus Y$ также является w - m - C -пространством. Тогда w - m - C -пространством является и все пространство X .

Как и теоремы сложения и суммы, доказывается предложение 1.34 на основе леммы 1.26.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.35. Утверждения 1.28, 1.29 и 1.34 имеют место и для m - C -пространств (см. [15; §2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.36. Аналоги утверждений 1.28, 1.29, 1.30 и 1.34 имеют место для C - и w - C -пространств. При этом неизбежно добавляется коллективная нормальность рассматриваемых пространств, без которой свойство w - C не выполняется вообще. Теорема сложения для C -пространств доказана в [10], теорема суммы и теорема Даукера – в [15]. Докажем для иллюстрации одно из этих утверждений для w - C -пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.37 (теорема суммы). Если коллективно нормальное счетно паракомпактное пространство X можно представить в виде объединения замкнутых подмножеств $Y_j \in w$ - C , $j \in \omega$, то $X \in w$ - C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем последовательность (Φ_i) , $i \in \omega$, дискретных замкнутых семейств $\Phi_i = \{F_\alpha^i : \alpha \in A_i\}$. В силу коллективной нормальности X существуют дискретные окрестности $O_1\Phi_i = \{O_1F_\alpha^i : \alpha \in A_i\}$ этих семейств. Представим ω в виде дизъюнктивной суммы бесконечных множеств N_j , $j \in \omega$. Для $i \in N_j$, $\alpha \in A_i$ положим

$$\Gamma_\alpha^i = [O_1F_\alpha^i] \cap Y_j \quad (1.8)$$

и $\gamma_i = \{\Gamma_\alpha^i : \alpha \in A_i, i \in N_j\}$. Каждое семейство γ_i дискретно. Поскольку $Y_j \in w$ - C , существуют такие окрестности $O\gamma_i = \{O\Gamma_\alpha^i : \alpha \in A_i, i \in N_j\}$ семейств γ_i в Y_j , что

$$Y_j = \bigcup \{O\gamma_i : i \in N_j\}. \quad (1.9)$$

Положим $G_i = \bigcup O\gamma_i$. Согласно (1.9), семейство $\{G_i : i \in N_j\}$ является открытым покрытием счетно паракомпактного пространства Y_j . Его можно ужать до замкнутого покрытия $\{H_i : i \in N_j\}$. При этом без ограничения общности можно считать, что

$$\bigcup \{\Gamma_\alpha^i : \alpha \in A_i\} \subset H_i. \quad (1.10)$$

Положим $H_\alpha^i = H_i \cap O\Gamma_\alpha^i$, $\alpha \in A_i$. В силу включения $H_i \subset G_i$ и дизъюнктивности семейства $O\gamma_i$ множества H_α^i замкнуты, семейство $h_i = \{H_\alpha^i : \alpha \in A_i\}$ дискретно и

$$\bigcup h_i = H_i. \quad (1.11)$$

Поскольку X коллективно нормально, множества H_α^i можно заключить в попарно непересекающиеся открытые в X множества U_α^i . Полагаем

$$OF_\alpha^i = O_1F_\alpha^i \cup U_\alpha^i \setminus \bigcup \{[O_1F_{\alpha'}^i] : \alpha' \neq \alpha\}.$$

Из дизъюнктности семейств $O_1\Phi_i$ и $\{U_\alpha^i : \alpha \in A\}$ вытекает дизъюнктность семейства $O\Phi_i = \{OF_\alpha^i : \alpha \in A\}$. Поскольку $Y_j = \bigcup \{H_i : i \in N_j\}$, из (1.11) вытекает, что семейство $\bigcup \{O\Phi_i : i \in N_j\}$ покрывает множество Y_j . Следовательно, $\bigcup (\bigcup \{O\Phi_i : i \in \omega\}) \supset \bigcup Y_j = X$. Предложение 1.37 доказано.

Приведем некоторые следствия из теорем сложения и суммы. Скажем, что пространство σ -конечномерно, если оно является объединением счетного числа своих замкнутых конечномерных подпространств (в русской литературе такие пространства называются *слабо счетномерными*, в западной – *сильно счетномерными*).

Из теоремы Остранда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.38 [15]. *Всякое конечномерное пространство является ∞ -C-пространством.*

Из предложения 1.38 и теорем сложения и суммы для m -C-пространств вытекают соответственно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.39 [15]. *Всякое счетномерное наследственно нормальное пространство является ∞ -C-пространством.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.40 [15]. *Всякое σ -конечномерное счетно паракомпактное пространство является ∞ -C-пространством.*

Эти утверждения вместе с предложениями 1.10 и 1.13 имеют естественные следствия для классов w - m -C $\supset m$ -C $\supset \infty$ -C.

Мы знаем (предложение 1.7), что паракомпактное конечномерное пространство является C-пространством. Насколько здесь можно ослабить паракомпактность?

ВОПРОС 5. Будет ли C-пространством всякое слабо паракомпактное конечномерное пространство?

Мы знаем также, что нульмерные пространства не обязаны быть C-пространствами. В то же время очевидным является следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.41. *Всякое коллективно нормальное нульмерное пространство является w -C-пространством.*

Это утверждение допускает естественное распространение на пространства более высоких размерностей. Назовем нормальное пространство *нуль-счетномерным*, если его можно представить в виде объединения счетного числа нульмерных подпространств. Известно, что всякое счетномерное метризуемое пространство нуль-счетномерно. В то же время, не всякий конечномерный бикомпакт нуль-счетномерен (см. [35]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.42. *Всякое нуль-счетномерное коллективно и наследственно нормальное пространство является w -C-пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \bigcup\{X_i : i \in \omega\}$, где $\dim X_i = 0$. Берем в пространстве X последовательность $\Phi_i = \{F_\alpha^i : \alpha \in A\}$, $i \in \omega$, дискретных замкнутых семейств. Поскольку X коллективно и наследственно нормально, существуют такие дискретные семейства $u_i = \{U_\alpha^i : \alpha \in A\}$ окрестностей множеств F_α^i , что

$$X_i \cap \text{Bd } U_\alpha^i = \emptyset. \quad (1.12)$$

Фиксируем элемент $\alpha_0^i \in A_i$ и полагаем $OF_{\alpha_0^i}^i = X \setminus \bigcup\{U_\alpha^i : \alpha \neq \alpha_0^i\}$. Из-за дискретности семейства u_i множество $OF_{\alpha_0^i}^i$ открыто. Полагаем также

$$OF_\alpha^i = U_\alpha^i, \quad \text{если } \alpha \neq \alpha_0^i,$$

и $\Phi_i = \{OF_\alpha^i : \alpha \in A_i\}$. Семейство $O\Phi_i$ является окрестностью семейства Φ_i , которая согласно (1.12) покрывает множество X_i . Следовательно, $\bigcup\{O\Phi_i : i \in \omega\}$ – покрытие пространства X . Предложение 1.42 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1.43. *Всякое подмножество линейно упорядоченного континуума является w - C -пространством.*

В самом деле, всякое такое пространство наследственно коллективно нормально [36] и представляется в виде суммы двух нульмерных множеств.

ВОПРОС 6. Будет ли w - C -пространством всякое коллективно нормальное конечномерное пространство?

ТЕОРЕМА 1.44 (локально конечной суммы для C -пространств, [15]). *Если счетно паракомпактное пространство X может быть представлено в виде объединения локально конечного семейства замкнутых множеств $F_\alpha \in C$, то $X \in C$.*

ТЕОРЕМА 1.45 (локально конечной суммы для w - C -пространств). *Если счетно паракомпактное коллективно нормальное пространство X может быть представлено в виде объединения локально конечного семейства замкнутых множеств $F_\alpha \in w$ - C , то $X \in w$ - C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для натурального k обозначим через Z_k множество всех точек $x \in X$, принадлежащих по крайней мере k элементам семейства $\Phi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$. В силу локальной конечности этого семейства множества Z_k замкнуты, а их пересечение пусто. Следовательно, открытые множества $G_k = X \setminus Z_{k+1}$ образуют покрытие. Поскольку X счетно паракомпактно, существуют замкнутые множества $\Gamma_k \subset G_k$, дающие в объединении все X . Поэтому в силу предложения 1.37 достаточно показать, что каждое множество Γ_k является w - C -пространством. А для этого достаточно доказать нашу теорему в предположении ограниченной кратности семейства Φ .

Делается это индукцией по кратности n . Если $n = 1$, то локально конечное семейство Φ дискретно, а для дискретного семейства теорема суммы выполняется очевидным образом. Сделаем индуктивный переход от n к $n+1$. Обозначим через $A(n+1)$ множество всех подмножеств $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\} \subset A$, состоящих из $n+1$ различных элементов, т.е. $A(n+1) = \exp_{n+1} A \setminus \exp_n A$. Для каждого $a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\} \in A(n+1)$ положим $F_a = F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_{n+1}}$. Если элементы

$a, a' \in A(n+1)$ различны, то множества F_a и $F_{a'}$ не пересекаются. Кроме того, очевидно, что семейство $\{F_a : a \in A(n+1)\}$ локально конечно и, следовательно, дискретно. Поскольку X коллективно нормально, существуют такие окрестности OF_a , что семейство $\{[OF_a] : a \in A(n+1)\}$ дискретно. Более того, если $a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$, то можно считать, что $[OF_a] \subset F_{\alpha_1} \cup \dots \cup F_{\alpha_{n+1}}$, так как последнее множество содержит окрестность множества F_a . Поэтому каждое множество $[OF_a]$ является w - C -пространством по теореме конечной суммы, а $Z = \bigcup \{[OF_a] : a \in A(n+1)\} \in w$ - C – по теореме дискретной суммы. Полагаем $Y = X \setminus \bigcup \{OF_a : a \in A(n+1)\}$. Множество Y замкнуто, а семейство $\Phi|_Y$ имеет кратность $\leq n$. Значит, $Y \in w$ - C по предположению индукции. Следовательно, $X = Y \cup Z \in w$ - C . Теорема 1.45 доказана.

ТЕОРЕМА 1.46 (локально конечной суммы для m - C -пространств, [15]). *Если счетно паракомпактное (или наследственно нормальное) пространство X может быть представлено в виде объединения локально конечного семейства замкнутых множеств $F_\alpha \in m$ - C , то $X \in m$ - C .*

ТЕОРЕМА 1.47 (локально конечной суммы для w - m - C -пространств). *Если счетно паракомпактное (или наследственно нормальное) пространство X может быть представлено в виде объединения локально конечного семейства замкнутых множеств $F_\alpha \in w$ - m - C , то $X \in w$ - m - C .*

Для счетного паракомпактного коллективно нормального X доказательство повторяет доказательство теоремы 1.45. В общем случае надо воспользоваться схемой доказательства теоремы 6.1.15 локально конечной суммы для слабо бесконечномерных пространств из [18].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.48. В силу совпадения классов 2 - $C = w$ - 2 - $C = \text{wid}$, теоремы 1.46 и 1.47 обобщают соответствующую теорему суммы для слабо бесконечномерных пространств, доказанную Н. Хаджиивановым [37] для счетно паракомпактных и Л. Полковским [38] для наследственно нормальных пространств.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, являющееся аналогом леммы 1.26 для C -пространств.

ЛЕММА 1.49 [15]. *Пусть счетно паракомпактное коллективно нормальное пространство X содержит замкнутое множество $F \in C$. Тогда для всякой последовательности u_i , $i \in \omega$, открытых покрытий пространства X существует такая последовательность v_i дизъюнктивных открытых в X семейств, что v_i вписано в u_i и семейство $\bigcup \{v_i : i \in \omega\}$ покрывает множество F .*

Следующее утверждение дополняет теорему 1.8, указывая еще один широкий класс C -пространств.

ТЕОРЕМА 1.50. *Всякое сильно паракомпактное пространство X , малая трансфинитная размерность $\text{ind } X$ которого определена, является C -пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $\text{ind } X$. Если $\text{ind } X = 0$, то по теореме Мориты [39] $\dim X = 0$. Следовательно, $X \in C$ по предложению 1.7.

Пусть теперь $\text{ind } X = \alpha > 0$. Фиксируем последовательность покрытий u_i , $i \in \omega$, из определения 1.2. В покрытие u_0 можно вписать такое покрытие $\Omega = \{Ox : x \in X\}$, что

$$\text{ind Bd } Ox < \alpha. \quad (1.13)$$

Существует звездно-конечное покрытие w , вписанное в покрытие Ω . Оно распадается в дизъюнктивную сумму счетных семейств w_β , $\beta \in B$, тела W_β которых попарно не пересекаются и, следовательно, открыто-замкнуты. Для доказательства теоремы, согласно лемме 1.49, достаточно в покрытие $u_0|W_\beta$ множества W_β вписать такое дизъюнктивное открытое семейство v_β , что

$$W_\beta \setminus \bigcup v_\beta \in C. \quad (1.14)$$

Пусть $w_\beta = \{W_j^\beta : j \in \omega\}$. Поскольку w вписано в Ω , для каждого j существует такая точка x_j^β , что $W_j^\beta \subset Ox_j^\beta$. Положим $V_0^\beta = Ox_0^\beta \cap W_\beta$ и $V_j^\beta = (Ox_j^\beta \setminus \bigcup \{Ox_k^\beta : k < j\}) \cap W_\beta$ при $j \geq 1$. Семейство $v_\beta = \{V_j^\beta : j \in \omega\}$ дизъюнктивно, вписано в $u_0|W_\beta$ и

$$W_\beta \setminus \bigcup v_\beta \subset \bigcup \{\text{Bd } Ox_j^\beta : j \in \omega\}. \quad (1.15)$$

Но из (1.13) по предположению индукции следует, что $\text{Bd } Ox_j^\beta \in C$. Поэтому свойство (1.14) вытекает из (1.15) и теоремы счетной суммы. Теорема 1.50 доказана.

Эта теорема уточняет аналогичную теорему Б. Т. Левшенко [40], доказавшего, что $X \in \text{wid}$.

ВОПРОС 7. Будет ли слабо бесконечномерным (C -пространством) всякое паракомпактное пространство, малая трансфинитная размерность ind которого определена?

Усилением вопроса 7 является

ВОПРОС 8. Будет ли слабо бесконечномерным всякое метрическое пространство X размерности $\text{ind } X = 0$.

Вопрос 7 можно усилить и в другом направлении. Для этого напомним, что регулярное пространство X называется *вполне паракомпактным* [41], если для всякого открытого покрытия u пространства X существует последовательность v_i , $i \in \omega$, звездно-конечных покрытий, объединение которых содержит покрытие, вписанное в u .

ВОПРОС 9. Будет ли слабо бесконечномерным всякое вполне паракомпактное пространство, малая трансфинитная размерность ind которого определена?

ЗАМЕЧАНИЕ 1.51. Аналога вопроса 8 для вполне паракомпактного случая не имеется. В самом деле, Ю. М. Смирнов доказал [42], что вполне паракомпактное метризуемое пространство, малая трансфинитная размерность ind которого определена, счетномерно и, следовательно, является C -пространством согласно теореме 1.8.

Напомним одно определение, введенное в [43]. *Разгородкой* замкнутых множеств A и B пространства X называется такое замкнутое множество C , что существуют открытые множества $U \supset A \setminus B$ и $V \supset B \setminus A$, для которых

$$X = U \sqcup C \sqcup V.$$

Разгородка непересекающихся множеств является перегородкой между ними.

Нормальное пространство X называется *W-пространством* ($X \in W$), если для любой последовательности (A_i, B_i) , $i \in \omega$, пар замкнутых подмножеств X существуют разгородки C_j множеств A_i и B_i , удовлетворяющие условию

$$\cap \{C_i : i \in \omega\} \subset \cup \{A_i \cap B_i : i \in \omega\}.$$

ТЕОРЕМА 1.52 [43]. *Всякое W-пространство слабо бесконечномерно. В классе наследственно нормальных пространств класс W обладает следующими свойствами:*

- 1) удовлетворяет теореме сложения;
- 2) наследуется при переходе к подпространству;
- 3) всякое счетномерное пространство является W-пространством.

ТЕОРЕМА 1.53. *Наследственно нормальное пространство X является W-пространством тогда и только тогда, когда оно наследственно слабо бесконечномерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из сказанного в теореме 1.52. Предположим теперь, что всякое подпространство наследственно нормального пространства X слабо бесконечномерно. Покажем, что $X \in W$. Пусть (A_i, B_i) , $i \in \omega$, – пары замкнутых подмножеств X . Положим

$$A_i^0 = A_i \setminus B_i, \quad B_i^0 = B_i \setminus [A_i^0]. \quad (1.16)$$

В силу наследственной нормальности X существуют такие открытые множества $G_i \supset A_i^0$ и $H_i \supset B_i^0$, что

$$[G_i] \cap [H_i] \subset [A_i^0] \cap [B_i^0]. \quad (1.17)$$

Положим

$$X_0 = X \setminus \bigcup \{[A_i^0] \cap [B_i^0] : i \in \omega\} \quad (1.18)$$

и

$$K_i = [G_i] \cap X_0, \quad L_i = [H_i] \cap X_0. \quad (1.19)$$

Согласно (1.17), замкнутые в X_0 множества K_i и L_i не пересекаются. Поскольку X_0 слабо бесконечномерно, существуют такие непересекающиеся открытые в X_0 множества $U_i^0 \supset K_i$ и $V_i^0 \supset L_i$, что

$$X_0 = \bigcup \{U_i^0 \cup V_i^0 : i \in \omega\}. \quad (1.20)$$

А в силу наследственной нормальности пространства X существуют непересекающиеся канонически открытые в X множества U_i и V_i , удовлетворяющие условию

$$U_i^0 \subset U_i, \quad V_i^0 \subset V_i. \quad (1.21)$$

Кроме того, увеличивая множества V_i , можно считать, что

$$V_i = X \setminus [U_i]. \quad (1.22)$$

Положим $C_i = X \setminus U_i \cup V_i$. Имеем $\bigcap \{C_i : i \in \omega\} = X \setminus \bigcup \{U_i \cup V_i : i \in \omega\} \stackrel{(1.20)}{\subset} X \setminus X_0 \stackrel{(1.18)}{=} \bigcup \{[A_i^0] \cap [B_i^0] : i \in \omega\} \stackrel{(1.16)}{\subset} \bigcup \{A_i \cap B_i : i \in \omega\}$. Остается проверить, что C_i являются разгородками множеств A_i и B_i . Для этого достаточно установить, что $A_i^0 \subset U_i$, $B_i^0 \subset V_i$. Из (1.16) вытекает, что множество X_0 всюду плотно в X . Следовательно, для открытого множества G_i имеем $[G_i] = [G_i \cap X_0]$. Поэтому из (1.19) получаем $[K_i] = [G_i]$. Таким образом,

$$A_i^0 \subset [G_i] = [K_i] \subset [U_i^0] \subset [U_i], \quad \text{т.е.} \quad A_i^0 \subset G_i \subset [U_i].$$

Следовательно, $A_i^0 \subset \text{Int}[U_i] = U_i$. Аналогичным образом, $B_i^0 \subset V_i$. Теорема 1.53 доказана.

§ 2. Отображения, понижающие размерность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Скажем, что $f: X \rightarrow Y$ есть C -отображение ($f \in C$), если $f^{-1}(y) \in C$ для каждой точки $y \in Y$. Аналогично определяются w - C -, m - C -, w - m - C -отображения.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое отображение счетно паракомпактного (или наследственно нормального) пространства X на C -пространство Y . Тогда:

- 1) если $f \in m$ - C , то $X \in m$ - C ;
- 2) если $f \in w$ - m - C , то $X \in w$ - m - C .

Пункт 1) доказан в [15]. Доказательство пункта 2) проходит по схеме доказательства теоремы 6.3.9 из [18], посвященной случаю $m = 2$ (теоремы Хаттори–Ямады [44]).

Пусть $\Phi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ – дискретное семейство подмножеств пространства X . Положим

$$U_\alpha(\Phi) = X \setminus \bigcup \{F_\beta \in \Phi : \beta \neq \alpha\} \quad \text{и} \quad c(\Phi) = \{U_\alpha(\Phi) : \alpha \in A\}. \quad (2.1)$$

Семейство $c(\Phi)$ является открытым покрытием пространства X . Следующее утверждение было уже неявно использовано (см. предложение 1.16).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для того, чтобы коллективно нормальное пространство X было w - C -пространством, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

для любой последовательности (Φ_i) , $i \in \omega$, дискретных семейств замкнутых подмножеств X существует последовательность (v_i) дизъюнктивных открытых семейств, комбинаторно C -вписанная в последовательность $(c(\Phi_i))$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое отображение счетно паракомпактного коллективно нормального (или наследственно коллективно нормального) пространства X на C -пространство Y . Тогда:

- 1) если $f \in C$, то $X \in C$;
- 2) если $f \in w-C$, то $X \in w-C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем лишь для пункта 2) в случае наследственно коллективно нормального X . Пункт 1) для счетно паракомпактного X доказан в [15]. Оставшиеся два варианта аналогичны упомянутым.

Итак, пусть $\Phi_i = \{F_\alpha^i : \alpha \in A_i\}$, $i \in \omega$, – последовательность дискретных замкнутых в X семейств. Множества $U_\alpha(\Phi_i)$ из (2.1) обозначим через U_α^i . Представим множество ω в виде дизъюнктивной суммы бесконечномерных множеств N_j , $j \in \omega$. Поскольку $f \in w-C$, для каждой точки $y \in Y$ согласно предложению 2.3 существует такая последовательность $v_{i,y}^0 = \{V_\alpha^{i,y} : \alpha \in A_i\}$, $i \in \omega$, дизъюнктивных открытых в $f^{-1}(y)$ семейств, что каждая подпоследовательность $v_{i,y}^0$, $i \in N_j$, комбинаторно C -вписана в последовательность $c(\Phi_i)|f^{-1}(y)$, $i \in N_j$. В силу наследственной коллективной нормальности X каждое семейство $v_{i,y}^0$ можно продолжить до дизъюнктивного открытого в X семейства $v_{i,y} = \{V_\alpha^{i,y} : \alpha \in A_i\}$. При этом, согласно сказанному выше, можно считать, что

$$V_\alpha^{i,y} \subset U_\alpha^i, \quad (2.2)$$

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup \{V_\alpha^{i,y} : i \in N_j, \alpha \in A_i\}, \quad j \in \omega. \quad (2.3)$$

Положим

$$V_{j,y} = \bigcup \{V_\alpha^{i,y} : i \in N_j, \alpha \in A_i\}, \quad j \in \omega. \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) следует

$$f^{-1}(y) \subset V_{j,y}, \quad j \in \omega. \quad (2.5)$$

Поэтому из замкнутости отображения f вытекает существование такой окрестности $G_{j,y}$ точки y , что

$$f^{-1}(G_{j,y}) \subset V_{j,y}, \quad j \in \omega. \quad (2.6)$$

Поскольку $y \in C$, существует такая последовательность (h_j) дизъюнктивных открытых в Y семейств, что

$$h_j \text{ вписано в покрытие } g_j, \quad j \in \omega; \quad (2.7)$$

$$\bigcup \{h_j : j \in \omega\} \text{ является покрытием } Y. \quad (2.8)$$

Уточняя (2.7), для каждого $H \in h_j$ зафиксируем такую точку $y \in y(H)$, что

$$H \subset G_{j,y(H)}. \quad (2.9)$$

Для каждого $i \in N_j$ и $\alpha \in A_i$ положим

$$W_\alpha^i = \bigcup \{f^{-1}(H) \cap V_\alpha^{i,y(H)} : H \in h_j\}. \quad (2.10)$$

Свойство (2.2) влечет

$$W_\alpha^i \subset U_\alpha^i. \quad (2.11)$$

Из дизъюнктности семейств $v_{i,y}$ и h_j вытекает дизъюнктность семейств $w_i = \{W_\alpha^i : \alpha \in A_i\}$. С учетом (2.11) и предложения 2.3 остается показать, что семейство $\bigcup \{w_i : i \in \omega\}$ покрывает X . Для этого, в силу (2.8), достаточно проверить, что

$$f^{-1}(H) \subset \bigcup \{W_\alpha^i : i \in N_j, \alpha \in A_i\} \quad \text{для всякого } H \in h_j.$$

Имеем

$$f^{-1}(H) \stackrel{(2.9)}{\subset} f^{-1}(G_{j,y(H)}) \stackrel{(2.6)}{\subset} V_{j,y(H)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f^{-1}(H) &\subset f^{-1}(H) \cap V_{i,y(H)} \stackrel{(2.4)}{=} \bigcup \{f^{-1}(H) \cap V_\alpha^{i,y(H)} : i \in N_j, \alpha \in A_i\} \\ &\stackrel{(2.10)}{\subset} \bigcup \{W_\alpha^i : i \in N_j, \alpha \in A_i\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.4 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5 [15]. Пусть $\mathcal{P}$ – некоторый класс пространств, содержащий все замкнутые подпространства своих элементов. Замкнутое отображение $f: X \rightarrow Y$ называется d - $\mathcal{P}$ -отображением ($f \in d\text{-}\mathcal{P}$), если $f(F_1) \cap f(F_2) \in \mathcal{P}$ для любых непересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset X$. В частности, при $\mathcal{P} = C$ получаем определение d - C -отображения.

Если $\mathcal{P}$ – некоторый класс пространств, то через $\sigma\mathcal{P}$ обозначим класс всех F_σ -подмножеств пространств из класса $\mathcal{P}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6 [15]. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – d - $\mathcal{P}$ -отображение и $\{U_1, \dots, U_k\}$ – конечное функционально открытое покрытие пространства X . Тогда

$$A \equiv Y \setminus f^\#U_1 \cup \dots \cup f^\#U_k \in \sigma\mathcal{P}.$$

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – d - C -отображение счетно паракомпактного или наследственно нормального пространства X на счетно паракомпактное коллективно нормальное пространство Y . Тогда

- 1) если $Y \in m\text{-}C$ и $f \in m\text{-}C$, то $X \in m\text{-}C$;
- 2) если $Y \in w\text{-}m\text{-}C$ и $f \in w\text{-}m\text{-}C$, то $X \in w\text{-}m\text{-}C$;
- 3) если $Y \in w\text{-}C$ и $f \in w\text{-}C$, то $X \in w\text{-}C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) представляет собой теорему 5.7 из [15]. Рассмотрим пункт 2) для счетно паракомпактного X . Пусть

$$\Phi_i = \{F_1^i, \dots, F_{k_i}^i\}, \quad i \in \omega,$$

– последовательность m -систем пространства X . Без ограничения общности можно считать, что множества F_j^i функционально замкнуты и, следовательно, множества $U_j^i = X \setminus \bigcup \{F_l^i : l \neq j\}$ функционально открыты. Положим

$$B_i = Y \setminus \bigcup \{f^\#U_j^i : 1 \leq j \leq k_i\}. \quad (2.12)$$

В силу предложения 2.6 $B_i \in \sigma C$, а по теореме счетной суммы для C -пространств (см. замечание 1.36) $B_i \in C$. Согласно теореме 2.2, множество

$F_i = f^{-1}(B_i)$ есть w - m - C -пространство. Ввиду леммы 1.26 существуют такие окрестности $O\Phi_i$ систем Φ_i , что семейство $\Omega = \bigcup\{O\Phi_i : i \text{ четно}\}$ покрывает множество $\bigcup\{F_i : i \in \omega\}$. В силу замкнутости f существует такое открытое множество $\Gamma \subset Y$, что

$$\bigcup\{F_i : i \in \omega\} \subset f^{-1}(\Gamma) \subset \bigcup\Omega. \quad (2.13)$$

Положим $Z = Y \setminus \Gamma$ и $L_j^i = Z \cap f(F_j^i)$. Каждое семейство $\lambda_i = \{L_1^i, \dots, L_{k_i}^i\}$ является m -системой. Поскольку $Z \in m$ - C , можно найти такие замкнутые множества $M_j^i \supset L_j^i$, что $M_{j_1}^i \cap M_{j_2}^i = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$ и

$$\bigcup\{M_j^i : 1 \leq j \leq k_i, i \text{ четно}\} = Z. \quad (2.14)$$

Положим $H_j^i = F_j^i \cup f^{-1}(M_j^i)$. Для каждого i семейство $h_i = \{H_1^i, \dots, H_{k_i}^i\}$ дизъюнктно и является укрупнением системы Φ_i . Для четного i берем в качестве $O\Phi_i$ произвольную окрестность Oh_i системы h_i . Из (2.13) и (2.14) вытекает, что $\{O\Phi_i : i \in \omega\}$ – искомая последовательность окрестностей систем Φ_i . Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема 2.7 доказана.

Для приложений теоремы 2.7 надо напомнить некоторые понятия и факты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8 [15]. Замкнутое отображение $f: X \rightarrow Y$ называется d -разреженным, если для любых непересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset X$ множество $f(F_1) \cap f(F_2)$ разрежено, т.е. всякое его непустое подпространство имеет изолированную точку.

Всякое вполне замкнутое отображение (см. [45]) d -разрежено, поскольку для вполне замкнутого отображения f множество $f(F_1) \cap f(F_2)$ из определения 2.8 дискретно.

ТЕОРЕМА 2.9 [15]. *Всякое слабо паракомпактное разреженное пространство нульмерно.*

Поскольку всякое нульмерное паракомпактное пространство есть C -пространство, из теоремы 2.9 вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Всякое d -разреженное отображение на паракомпактное пространство является d - C -отображением.*

Обладая хорошими размерностными свойствами, класс d -разреженных отображений вместе с тем достаточно широк. Композиция совершенных d -разреженных отображений d -разрежена [15]. Поэтому d -разреженным будет не только всякое вполне замкнутое отображение, но и всякая композиция вполне замкнутых совершенных отображений. Более того, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11 [15]. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ – такой непрерывный спектр из бикомпактов, что все соседние проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ d -разрежены. Тогда все его проекции d -разрежены.*

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Если все соседние проекции непрерывного спектра из бикомпактов вполне замкнуты, то все его проекции d -разрежены.*

Из теоремы 2.7 и предложения 2.10 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.13. *Предположим, что счетное паракомпактное или наследственно нормальное пространство X допускает d -разреженное отображение на паракомпактное пространство Y . Тогда*

- 1) *если $Y \in m-C$ и $f \in m-C$, то $X \in m-C$;*
- 2) *если $Y \in w-m-C$ и $f \in w-m-C$, то $X \in w-m-C$;*
- 3) *если $Y \in w-C$ и $f \in w-C$, то $X \in w-C$.*

ТЕОРЕМА 2.14. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ – обратный спектр, состоящий из бикомпактов и d -разреженных отображений, и пусть $X = \lim S$. Тогда*

- 1) *если все $X_\alpha \in m-C$, то $X \in m-C$;*
- 2) *если все $X_\alpha \in w-m-C$, то $X \in w-m-C$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо разобрать только пункт 2), поскольку 1) – это теорема 5.16 из [15]. Фиксируем последовательность

$$\Phi_i = \{F_1^i, \dots, F_{k_i}^i\}, \quad i \in \omega,$$

m -систем бикомпакта X . Существует такое $\alpha \in A$, что семейство $\pi_\alpha(F_1^0), \dots, \pi_\alpha(F_{k_i}^0)$, где $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ – предельная проекция спектра, дизъюнктно. Отображение π_α , очевидно, d -разрежено. Поэтому для каждого $i \geq 1$ множество

$$B_i = \bigcup \{\pi_\alpha(F_{j_1}^i) \cap \pi_\alpha(F_{j_2}^i) : j_1 \neq j_2\}$$

разрежено. Следовательно, множество $B = \bigcup \{B_i : i \geq 1\}$ нульмерно и финально компактно. Тогда существует такое дизъюнктное семейство окрестностей $O\pi_\alpha(F_1^0), \dots, O\pi_\alpha(F_{k_1}^0)$, что

$$B \subset \bigcup \{O\pi_\alpha(F_j^0) : 1 \leq j \leq k_1\}.$$

Положим $Z = X_\alpha \setminus \bigcup \{O\pi_\alpha(F_j^0) : 1 \leq j \leq k_1\}$ и $L_j^i = \pi_\alpha(F_j^i)$. Далее, применяя рассуждения из доказательства п. 2) теоремы 2.7, завершаем доказательство теоремы 2.14.

ТЕОРЕМА 2.15. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ – непрерывный спектр из бикомпактов, все соседние проекции которого d -разрежены и являются $m-C$ -($w-m-C$)-отображениями. Тогда если $X_0 \in m-C$ ($w-m-C$), то $X = \lim S \in m-C$ ($w-m-C$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.11 все проекции π_β^α - d -разрежены. Поэтому, согласно теореме 2.14, достаточно показать, что все $X_\alpha \in m-C$ ($w-m-C$). Делается это индукцией по α . Переход от α к $\alpha + 1$ происходит с применением теоремы 2.7, при переходе к предельному α применяется теорема 2.14.

СЛЕДСТВИЕ 2.16. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ – непрерывный спектр из бикомпактов, все соседние проекции которого вполне замкнуты и слабо бесконечномерны. Тогда если бикомпакт X_0 слабо бесконечномерен, то и предел спектра S слабо бесконечномерен.*

Это утверждение дает положительный ответ на вопрос из [35].

§ 3. Отображения, повышающие размерность

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – такое отображение бикомпакта X на Y , что $|\varphi^{-1}(y)| < \mathfrak{c}$ для каждой точки $y \in Y$. Тогда:

- 1) если $X \in m-C$, то $Y \in m-C$;
- 2) если $X \in w-m-C$, то $Y \in w-m-C$.

Случай 1) рассмотрен в [15; теорема 6.2]. Доказательство в случае 2) проходит по аналогичной схеме с применением нижеследующей леммы 3.2. Для $m = 2$ теорема доказана Е. Г. Скляренко в [46].

ЛЕММА 3.2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое отображение счетно паракомпактного $w-m-C$ -пространства X на Y . Если Y не является $w-m-C$ -пространством, то существуют такие непересекающиеся замкнутые множества $X_0, X_1 \subset X$, что $f(X_0) = f(X_1)$ и $f(X_0) \notin w-m-C$.

Доказательство во многом повторяет доказательство соответствующей леммы 6.1 из [15] для $m-C$ -пространств (см. также лемму 6.3.3 из [18]).

Из теоремы 3.1 при $m = \infty$ вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Счетнократный образ C ($w-C$)-бикомпакта является C ($w-C$)-бикомпактом.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое отображение конечной кратности $\leq n$ счетно паракомпактного пространства X на Y . Тогда если $X \in m-C$ ($X \in w-m-C$), то $Y \in m-C$ ($Y \in w-m-C$).

Случай $m-C$ -пространств рассмотрен в [15; теорема 6.5]. По аналогичной схеме с применением леммы 3.2 проходит доказательство для $w-m-C$ -пространств. Для $m = 2$ теорема доказана Л. Полковским [38].

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутая сюръекция конечной кратности $\leq n$. Тогда:

- 1) если X – паракомпактное C -пространство, то $Y \in C$;
- 2) если X – коллективно нормальное $w-C$ -пространство, то $Y \in w-C$.

Для C -пространств утверждение доказано в [15; теорема 6.8]. В случае $w-C$ -пространств применяется следующая лемма.

ЛЕММА 3.6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое отображение коллективно нормального $w-C$ -пространства X на Y . Если Y не является $w-C$ -пространством, то существуют такие непересекающиеся замкнутые множества $X_0, X_1 \subset X$, что $f(X_0) = f(X_1)$ и $f(X_0) \notin w-C$.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – такое замкнутое отображение метризуемого пространства X на метризуемое пространство Y , что каждый слой $f^{-1}(y)$ либо имеет изолированную точку, либо является множеством мощности $< \mathfrak{c}$. Тогда

- 1) $X \in m-C \Rightarrow Y \in m-C$;
- 2) $X \in w-m-C \Rightarrow Y \in w-m-C$.

Случай m - C -пространств рассмотрен в [15; теорема 6.17]. Для w - m - C -пространств доказательство проходит по аналогичной схеме (см. также [18; теорема 6.3.2]). Теорему 3.7 для $m = 2$ доказал В. Ольшевский (см. [18; теорема 6.3.2]). Первый результат в этом направлении получил Е. Г. Склиаренко [46] (пространство X вполне метризуемо, слои $f^{-1}(y)$ имеют мощность $< \mathfrak{c}$).

ТЕОРЕМА 3.8 [15]. *Если $f: X \rightarrow Y$ есть d - m - C -отображение счетно паракомпактного m - C -пространства X на Y , то $Y \in m$ - C .*

Из теорем 3.8 и 2.9 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.9. *Если $f: X \rightarrow Y$ – сюръективное d -разреженное отображение паракомпактного m - C -пространства, то $Y \in m$ - C .*

Поскольку всякое вполне замкнутое отображение d -разрежено, из теоремы 3.8 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.10. *Если $f: X \rightarrow Y$ – сюръективное вполне замкнутое отображение счетно паракомпактного m - C -пространства, то $Y \in m$ - C .*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Аналоги теоремы 3.8 и следствий 3.9 и 3.10 имеют место для w - m - C -пространств и d - w - m - C -отображений.

§ 4. Трансфинитные продолжения лебеговой размерности и размерность Ind_m

ТЕОРЕМА 4.1. *Для нормального пространства X и $m \in \bar{\mathbb{N}}$ следующие условия равносильны:*

- 1) $\dim X \leq n$;
- 2) *всякое семейство $(u_1, \dots, u_{n+1})$ m -покрытий пространства X несущественно;*
- 3) *всякое семейство $(u_1, \Phi_1), \dots, (u_{n+1}, \Phi_{n+1})$ m -накрывающих пар пространства X несущественно;*
- 4) *всякое семейство $(\Phi_1, \dots, \Phi_{n+1})$ m -систем пространства X несущественно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim X \leq n$. В покрытие $u_1 \wedge \dots \wedge u_{n+1}$ по теореме Остранда можно вписать покрытие, распадающееся в объединение дизъюнктивных семейств $v_1, \dots, v_{n+1}$. При этом каждое из семейств v_i вписано в любое покрытие u_j , в частности, в u_i . Тем самым свойство 2) выполнено.

Проверим импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $u_i = \{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\}$, $\Phi_i = \{F_1^i, \dots, F_{k_i}^i\}$. Существуют такие окрестности $O_1 F_j^i$, что каждое семейство

$$\{[O_1 F_j^i] : j = 1, \dots, k_i\}$$

дизъюнктно и вписано в u_i . Полагаем

$${}^1U_j^i = U_j^i \setminus \bigcup \{[O_1 F_l^i] : l \neq j\} \quad \text{и} \quad u_i^1 = \{{}^1U_1^i, \dots, {}^1U_{k_i}^i\}.$$

Каждое семейство u_i^1 является покрытием X . Согласно 2), существует последовательность $v_i = \{V_1^i, \dots, V_{k_i}^i\}$ дизъюнктивных открытых семейств, комбинаторно

C -вписанная в последовательность (u_i) . Полагая

$$OF_j^i = V_j^i \cup O_1 F_j^i \quad \text{и} \quad O\Phi_i = \{OF_1^i, \dots, OF_{k_i}^i\},$$

получаем окрестности систем Φ_i , реализующие несущественность семейства $(u_1, \Phi_1), \dots, (u_{n+1}, \Phi_{n+1})$.

Свойство 4) является следствием свойства 3), примененного к парам (u_i, Φ_i) , где $u_i = \{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\}$ и $U_j^i = X \setminus \bigcup \{F_l^i : l \neq j\}$. Наконец, из 4_m) следует свойство 4_2), равносильное теореме о перегородках. Теорема 4.1 доказана.

Теперь мы модифицируем некоторые определения и факты, содержащиеся в работах Р. Поля [47] и П. Борста [48].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Через $\text{Fin } \mathbb{N}$ обозначим множество всех непустых конечных подмножеств $\mathbb{N}$, снабженное следующим порядком $\prec$: $\sigma \prec \tau$ означает существование такого $n \in \sigma \setminus \tau$, что

$$\sigma \cap \{1, \dots, n-1\} = \tau \cap \{1, \dots, n-1\}.$$

Этот порядок называется *порядком Брауэра–Клини*.

Легко видеть, что $\prec$ – линейный порядок. Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [47; лемма 1.1]).

ЛЕММА 4.3. *Для убывающей последовательности $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \dots$ элементов $\text{Fin } \mathbb{N}$ существует такая возрастающая последовательность $j(1) < j(2) < \dots$ натуральных чисел, что для каждого k существует l со свойством $\{j(1), \dots, j(k)\} \subset \sigma_l$.*

Последовательность $R = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ попарно различных m -покрытий компакта X называется *m -вписываемой*, если для любого существенного покрытия $u \in \text{cov}_m(X)$ бесконечно множество

$$\{i \in \mathbb{N} : u_i \succ u\}, \quad (4.1)$$

где отношение $v \succ w$ означает, что m -покрытие v комбинаторно вписано в m -покрытие w . Ясно, что все элементы m -вписываемой последовательности существенны.

ЛЕММА 4.4. *Для произвольного конечного семейства существенных m -покрытий $u_1, \dots, u_k$ и пространства X существует m -покрытие u_{k+1} , вписанное в u и отличающееся от всех $u_1, \dots, u_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ни одно из покрытий u_j не вписано в u , то полагаем $u_{k+1} = u$. В противном случае среди покрытий $u_j \succ u$ берем максимальное u_{j_0} . В это покрытие комбинаторно с замыканием вписываем покрытие, которое и обозначаем u_{k+1} . Тогда $u_{k+1} \neq u_{j_0}$, поскольку в противном случае все элементы покрытия u_{j_0} открыто-замкнуты, что противоречит его существенности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Всякий метризуемый компакт обладает m -вписываемой последовательностью R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В множестве $\text{cov}_m X$ выберем счетное конфинальное подмножество $\mathcal{V}$. Обозначим через $\mathcal{V}_0$ множество всех существенных $v \in \mathcal{V}$. Занумеруем элементы $\mathcal{V}_0$ натуральными числами так, что каждый элемент $v \in \mathcal{V}_0$ приобретает бесконечное число номеров: $\mathcal{V}_0 = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$. Теперь строим последовательность $R = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ по рекурсии. Полагаем $u_1 = v_1$. Предполагая, что покрытия $u_1, \dots, u_k$ построены, применяем к последовательности $u_1, \dots, u_k, u$, где $u = v_{k+1}$, лемму 4.4. Предложение 4.5 доказано.

Для произвольной m -вписываемой последовательности R компакта X положим

$$M_R(X) = \{\sigma \in \text{Fin } \mathbb{N} : \text{семейство } \{u_i : i \in \sigma, u_i \in R\} \text{ существенно}\}.$$

Будем рассматривать множество $M_R(X)$ с порядком Брауэра–Клини.

ЛЕММА 4.6. Пусть $R_j = \{u_i^j : i \in \mathbb{N}\}$, $j = 1, 2$, – m -вписываемые последовательности компакта X . Тогда упорядоченное множество $M_{R_1}(X)$ подобно подмножеству из $M_{R_2}(X)$ и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь бесконечностью множества (4.1), выберем такую последовательность $j(1) < j(2) < \dots$, что $u_{j(i)}^2 \succ u_i^1$. Если $\sigma \in M_{R_1}(X)$, то $j(\sigma) \in M_{R_2}(X)$. Отображение $\sigma \rightarrow j(\sigma)$ и осуществляет сохраняющее порядок вложение $M_{R_1}(X) \rightarrow M_{R_2}(X)$.

Лемму 4.6 для $m = 2$ и $m = \infty$ доказали соответственно Р. Поль [47] и В. А. Чатырко [49].

ТЕОРЕМА 4.7. Компакт X является m - C -пространством тогда и только тогда, когда для некоторой (эквивалентно – для каждой) m -вписываемой последовательности R компакта X множество $M_R(X)$ вполне упорядочено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ – m -вписываемая последовательность. Если $X \notin m$ - C , то существует бесконечная существенная последовательность $\{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ m -покрытий X . Существует такая последовательность $j(1) < j(2) < \dots$, что $u_{j(i)} \succ v_i$. Тогда $\sigma_i = \{j(1), \dots, j(i)\} \in M_R(X)$ и $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \dots$. Следовательно, множество $M_R(X)$ не вполне упорядочено.

Наоборот, предположим, что существуют $\sigma_i \in M_R(X)$, для которых $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \dots$. Возьмем последовательность $j(1) < j(2) < \dots$ из леммы 4.3. Тогда бесконечное семейство $\mathcal{U} = \{u_{j(i)} : i \in \mathbb{N}\}$ существенно. В самом деле, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $l \in \mathbb{N}$, что $\{j(1), \dots, j(k)\} \subset \sigma_l$. Следовательно, все начальные отрезки $\{u_{j(1)}, \dots, u_{j(k)}\}$ семейства $\mathcal{U}$ существенны. Отсюда, в силу компактности X , вытекает существенность $\mathcal{U}$.

Для $m = 2$ теорему 4.7 доказал Р. Поль [47], для $m = \infty$ – В. А. Чатырко [49].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Для m - C -компакта X положим

$$\text{index}_m X = \text{type } M_R(X),$$

где R – некоторая (любая) m -вписываемая последовательность в X .

Из счетности множества R и теоремы 4.7 вытекает, что $\text{index}_m X$ – счетное порядковое число, называемое m -индексом Лузина–Серпинского. Функции index_2 и index_∞ , известные как index_w и index_C , определили Р. Поль [47] и В. А. Чатырко [49] соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. Если $m_1 \leq m_2$, то $\text{index}_{m_1} X \leq \text{index}_{m_2} X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ – m_2 -вписываемая последовательность в компакте X . Положим $R_1 = \{u_i \in R : |u_i| \leq m_1\}$ и $N_1 = \{i \in \mathbb{N} : |u_i| \leq m_1\}$. Тогда R_1 – m_1 -вписываемая последовательность в X , а тождественное вложение $N_1 \rightarrow \mathbb{N}$ порождает вложение множества $M_{R_1}(X)$ в $M_R(X)$. Следовательно, $\text{type } M_{R_1}(X) \leq \text{type } M_R(X)$, что и доказывает предложение 4.9.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Если F – замкнутое подмножество m - C -компакта X , то

$$\text{index}_m F \leq \text{index}_m X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ – открытое покрытие компакта F . Полагая $e(u) = \{e(U_1), \dots, e(U_k)\}$, где $e(U_j) = U_j \cup (X \setminus F)$, получаем открытое покрытие компакта X . Получаем оператор $e : \text{cov}_m(F) \rightarrow \text{cov}_m(X)$ вложения. Этот оператор переводит существенные последовательности в существенные. Возьмем множество $N_1 \subset \mathbb{N}$ так, что и N_1 , и $\mathbb{N} \setminus N_1$ бесконечны. Заномеруем элементами из N_1 какую-нибудь m -вписываемую последовательность $R = \{u_i : i \in N_1\}$ компакта F . Семейство $e(R) = \{e(u_i) : i \in N_1\}$ дополним до m -вписываемой последовательности $R_1 = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ компакта X . Для этого достаточно взять существующую согласно предложению 4.5 m -вписываемую последовательность $R_2 = \{v_i : i \in \mathbb{N} \setminus N_1\}$ и положить $R_1 = e(R) \cup R_2$. Тождественное вложение $N_1 \subset \mathbb{N}$ порождает сохраняющее порядок $\prec$ вложение множества $M_R(F)$ в $M_{R_1}(X)$. Предложение 4.10 доказано.

Фиксируем m -вписываемую последовательность $R = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ в гильбертовом кубе $Q = I^\omega$. Для $\sigma \in \text{Fin } \mathbb{N}$ положим

$$\overline{W}_\sigma = \{X \in \text{exp } Q : \text{семейство } \{u_i|X : i \in \sigma\} \text{ существенно}\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.11. Каждое множество $\overline{W}_\sigma$ замкнуто в $\text{exp } Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \notin \overline{W}_\sigma$ и $u_i = \{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\}$. Существуют такие дизъюнктные открытые в Q семейства $v_i = \{V_1^i, \dots, V_{k_i}^i\}$, $i \in \sigma$, что $V_j^i \subset U_j^i$ и $X \subset \bigcup \{V_j^i : i \in \sigma, j \leq k_i\}$. Тогда множество

$$O\langle V_j^i : i \in \sigma, j \leq k_i, V_j^i \cap X \neq \emptyset \rangle$$

будет окрестностью компакта X в $\text{exp } Q$, не пересекающейся с $\overline{W}_\sigma$.

Таким образом, отождествляя множества $\sigma = \{i_1, \dots, i_n\} \in \text{Fin } \mathbb{N}$ с двоично-рациональными дробями

$$r = \frac{1}{2^{i_1}} + \dots + \frac{1}{2^{i_n}},$$

получаем, что семейство

$$\overline{W} = \{\overline{W}_\sigma : \sigma \in \text{Fin } \mathbb{N}, \prec\}$$

является *решетом Лузина* (см. [50; § 3, XV]), состоящим из замкнутых множеств компакта $\exp Q$.

Для компакта $X \in \exp Q$ положим

$$M(X) = \{\sigma \in \text{Fin } \mathbb{N} : X \in \overline{W}_\sigma\}.$$

Напомним [50; § 3, XV], что множество

$$A = A(\overline{W}) = \{X \in \exp Q : \{M(X) \text{ не вполне упорядочено}\}\}$$

является *просеянным* через решетку $\overline{W}$.

Из утверждения 4.11, теоремы 4.7 и вышесказанного вытекает

$$A(\overline{W}) = \{X : X \notin m\text{-}C\}. \quad (4.2)$$

Следовательно, дополнение

$$-A \equiv (\exp Q) \setminus A$$

состоит из $m\text{-}C$ -компактов и, значит,

$$-A = \bigcup \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\},$$

где

$$A_\alpha = \{X : \text{index}_m X = \alpha\}.$$

ТЕОРЕМА А [50; § 39, VIII, теорема 3]. *Для каждого $\alpha < \omega_1$ множество A_α является борелевским.*

ТЕОРЕМА В [50; § 39, VIII, следствие 5a]. *Для каждого аналитического множества, не пересекающегося с множеством, просеянным через решетку, индексы Лузина–Серпинского его точек ограничены счетным порядковым числом.*

ЛЕММА 4.12 (см. [47; лемма 5.2]). *Пусть $Y \subset Q$ – компакт. Тогда множество*

$$E_Y = \{X \in \exp Q : X \text{ вкладывается в } Y\}$$

является аналитическим.

В самом деле, E_Y является проекцией замкнутого в $\exp Q \times C(Q, Q)$ множества

$$\{(X, f) : f(X) \subset Y, f|X \text{ – вложение}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13 (см. [47; лемма 5.2]). *Пусть $Z \subset \exp Q$ – некоторое множество. Для того чтобы существовал $m\text{-}C$ -компакт Y , топологически содержащий все $X \in Z$, необходимо и достаточно, чтобы существовало аналитическое множество $E \subset \exp Q$, содержащее Z и состоящее из $m\text{-}C$ -компактов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть такой компакт Y существует. Тогда множество E_Y по лемме 4.12 является аналитическим и согласно предложению 4.10 содержит все $X \in Z$ и состоит из m - C -компактов.

Наоборот, предположим, что такое аналитическое множество E существует. Пусть $\varphi: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow E$ – непрерывная сюръекция. Положим $G = \{(t, x) : x \in \varphi(t)\}$. Проектирование $\pi: G \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является совершенным отображением с m - C -словами $\pi^{-1}(t)$. Тогда G является m - C -пространством согласно теореме 2.2 (теореме 5.2 из [15]). Далее, G топологически полно как замкнутое подмножество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times Q$. По теореме 3.66 из [15] пространство G имеет расширение Y , являющееся m - C -компактом. Предложение 4.13 доказано.

Из теоремы А и предложений 4.10 и 4.13 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.14 (см. [47; теорема 5.1]). *Для того чтобы существовал m - C -компакт, топологически содержащий все m - C -компакты данного семейства E , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup\{\text{index}_m X : X \in E\} < \omega_1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.15. Пусть L – произвольное множество, и пусть $M \subset \text{Fin } L$. Для $\sigma \in \{\emptyset\} \cup \text{Fin } L$ положим

$$M^\sigma = \{\tau \in \text{Fin } L : \sigma \cup \tau \in M, \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

Для $a \in L$ множество $M^{\{a\}}$ будем обозначать M^a .

Если $\sigma, \tau \in \text{Fin } L$ и $\sigma \cap \tau = \emptyset$, то

$$(M^\sigma)^\tau = M^{\sigma \cup \tau}; \quad (4.3)$$

$$\sigma \in M^\tau \iff \tau \in M^\sigma. \quad (4.4)$$

Порядковое число $\text{Ord } M$ определяется по индукции.

- 1) $\text{Ord } M = 0 \iff M = \emptyset$.
- 2) $\text{Ord } M \leq \alpha \iff \text{Ord } M^a < \alpha$ для любого $a \in L$.
- 3) $\text{Ord } M = \alpha \iff \text{Ord } M \leq \alpha$ и $\text{Ord } M < \alpha$ не выполняется.
- 4) $\text{Ord } M = \infty$ (не существует) $\iff \text{Ord } M > \alpha$ для всякого порядкового числа α .

Ясно, что

$$N \subset M \implies \text{Ord } N \leq \text{Ord } M. \quad (4.5)$$

Множество $M \subset \text{Fin } L$ называется *включающим*, если для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Fin } L$ из $\sigma_1 \in M$ и $\sigma_2 \subset \sigma_1$ вытекает $\sigma_2 \in M$.

ЛЕММА 4.16 [48]. *Если $M \subset \text{Fin } L$ – включающее множество, то $\text{Ord } M = \infty$ тогда и только тогда существует такая последовательность $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ различных элементов из L , что*

$$\sigma_n \equiv \{a_1, \dots, a_n\} \in M$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 4.17 [48]. *Если $M \subset \text{Fin } L$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\text{Ord } M \leq n$ тогда и только тогда, когда $|\sigma| \leq n$ для всякого $\sigma \in M$.*

ЛЕММА 4.18 [48]. Пусть $\mu: L \rightarrow L_1$ – отображение, $M \subset \text{Fin } L$, $M_1 \subset \text{Fin } L_1$. Предположим также, что $\mu(\sigma) \in M_1$ и $|\mu(\sigma)| = |\sigma|$ для всякого $\sigma \in M$. Тогда $\text{Ord } M \leq \text{Ord } M_1$.

Положим

$$M_m(X) = \{\sigma \in \text{Fin cov}_m(X) : \sigma \text{ существенно}\}.$$

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 4.1 и леммы 4.17, является обобщением теорем Борста [48], [51] для $m = 2, \infty$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4.19. Для нормального пространства X имеем

$$\dim X \leq n \iff \text{Ord } M_m(X) \leq n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.20. Для нормального пространства X полагаем

$$\dim_m X = \text{Ord } M_m(X).$$

В случае $\dim_m X = \infty$ будем говорить, что размерность $\dim_m X$ не определена.

Согласно теореме 4.19 инвариант $\dim_m$ является трансфинитным продолжением лебеговой размерности на бесконечномерные пространства.

Из леммы 4.16 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.21. Размерность $\dim_m X$ определена тогда и только тогда, когда X есть S - m - C -пространство.

Для $m = 2, \infty$ это утверждение доказал Борст [48], [51].

Следствием леммы 4.18 является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.22. Если $m_1 \leq m_2$, то

$$\dim_{m_1} X \leq \dim_{m_2} X.$$

Снова применяя лемму 4.18 и оператор $e: \text{cov}_m(F) \rightarrow \text{cov}_m(X)$ из доказательства предложения 4.10, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.23. Если $F \subset X$ – замкнутое подмножество, то

$$\dim_m F \leq \dim_m X.$$

Пусть теперь снова L – непустое множество и $M \subset \text{Fin } L$. Для $a \in L$ положим

$$M[a] = \{\tau \in M : a \in \tau\}, \quad M[\bar{a}] = \{\tau \in M : a \notin \tau\}.$$

Ясно, что $M = M[a] \sqcup M[\bar{a}]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.24 [49]. Назовем непустое множество $M \subset \text{Fin } \mathbb{N}$ широким, если:

- (a) M – включающее;
- (b) для всякого $a \in \mathbb{N} \cap M$ найдется бесконечно много таких различных $a_1 \in \mathbb{N} \cap M$, что
 - (b₁) $a_1 \neq a$;
 - (b₂) $M^a[\bar{a}_1] \subset M[a_1]$.

ЛЕММА 4.25 [48]. Для включающего множества $M \subset \text{Fin } \mathbb{N}$ условие $\text{Ord } M \neq \infty$ равносильно тому, что M вполне упорядочено порядком Брауэра–Клини.

ТЕОРЕМА 4.26 [49]. Если $\text{Ord } M \neq \infty$ для некоторого широкого множества $M \subset \text{Fin } \mathbb{N}$, то

$$\text{type } M = \omega^{\text{Ord } M}.$$

ЛЕММА 4.27 [49]. Пусть $L_1 \subset L_2$, $M_i \subset \text{Fin } L_i$ – такие непустые включающие множества, что $M_1 \subset M_2$. Пусть также выполнены следующие условия:

- 1) для любого $a_2 \in L_2 \cap M_2$ найдется бесконечно много таких различных элементов $a_1 \in L_1 \cap M_1$, что $a_1 \neq a_2$ и $M_2^{a_2}[\bar{a}_1] \subset M_2^{a_1}$;
- 2) для любого $\sigma \in M_1$ условия $M_2^\sigma \neq \emptyset$ и $M_1^\sigma \neq \emptyset$ равносильны;
- 3) для любых различных элементов $a_1, \dots, a_k \in L_1$ если $\sigma = \{a_1, \dots, a_k\} \in M_2$, то $\sigma \in M_1$.

Тогда $\text{Ord } M_1 = \text{Ord } M_2$.

Для $L \subset \text{cov}_m(X)$ положим

$$M_L = \{\sigma \in \text{Fin } L : \sigma \text{ существенно}\}.$$

Следующее утверждение для $m = \infty$ доказано в [49; лемма 10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.28. Пусть X – m -С-компакт, $\dim X \neq 0$ и $R = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ – m -вписываемая последовательность. Тогда

(а) $\text{Ord } M_R(X) = \text{Ord } M_R = \text{Ord } M_m(X)$;

(б) множество $M_R(X) \subset \text{Fin } \mathbb{N}$ широкое и вполне упорядочено порядком Брауэра–Клини.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Равенство $\text{Ord } M_R(X) = \text{Ord } M_R$ вытекает из леммы 4.18 после естественного отождествления последовательности $R = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ и множества $\mathbb{N}$.

Теперь положим $L_1 = R$, $L_2 = \text{cov}_m X$, $M_1 = M_R$ и $M_2 = M_m(X)$. Множество M_1 непусто, так как $\dim X \neq 0$. Далее, M_1, M_2 – включающие множества и $M_1 \subset M_2$. Поэтому для доказательства равенства $\text{Ord } M_R = \text{Ord } M_m(X)$ достаточно проверить выполнение свойств 1)–3) из леммы 4.27.

1) По определению m -вписываемой последовательности для любого $u \in M_m(X) \cap \text{cov}_m X$ существует бесконечно много таких чисел i , что $u_i \succ u$, $u_i \neq u$ и все u_i попарно различны. Покажем, что $M_2^u[\bar{u}_i] \subset M_2^{u_i}$. Пусть $\tau \in M_2^u[\bar{u}_i]$. Это означает, что $\tau \in M_2^u$ и $u_i \notin \tau$. Из $\tau \in M_2^u$ вытекает существенность семейства $\tau \cup u$, что, в силу вписанности u_i в u , влечет существенность $\tau \cup u_i$. Следовательно, $\tau \in M_2^{u_i}$.

2) Пусть $\sigma \in M_1$ и $M_2^\sigma \neq \emptyset$, т.е. найдется $\tau \in M_2^\sigma$. Пользуясь m -вписываемостью последовательности R , можно, поэлементно вписывая покрытия в элементы из τ , подобрать такое $\tau_1 \in M_1$, что $\tau_1 \cap \sigma = \emptyset$. Из существенности $\tau \cup \sigma$ ($\tau \in M_2^\sigma$) вытекает существенность более мелкого семейства $\tau_1 \cup \sigma$. Следовательно, $\tau_1 \in M_1^\sigma$.

3) Очевидно.

Итак, $\text{Ord } M_R = \text{Ord } M_m(X)$.

(b) По теореме 4.21 имеем $\text{Ord } M_m(X) \neq \infty$. Следовательно, из уже доказанного пункта (a) получаем $\text{Ord } M_R(X) \neq \infty$. Поэтому согласно лемме 4.25 множество $M_R(X)$ вполне упорядочено порядком Брауэра–Клини. Наконец, из m -вписываемости последовательности R вытекает, что множество $M_R(X) \equiv M$ удовлетворяет определению 4.24. Предложение 4.28 доказано.

Из предложений 4.5 и 4.28, теорем 4.21 и 4.26 и определений 4.8 и 4.20 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.29. Если X – m - C -компакт и $\dim X \neq 0$, то

$$\text{index}_m X = \omega^{\dim_m X}.$$

Для $m = 2$ эту теорему доказал П. Борст [49], а для $m = \infty$ – В. А. Чатыр-ко [49].

Следствием теорем 4.14 и 4.29 является

ТЕОРЕМА 4.30. Для того чтобы существовал m - C -компакт, топологически содержащий все m - C -компакты данного семейства E , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup\{\dim_m X : X \in E\} < \omega_1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.31. Трансфинитную классификацию допускают и w - m - C -компакты. Разумеется, каждый w - m - C -компакт X слабо бесконечномерен и для него определены размерностные функции $\text{index}_2 X$ и $\dim_2 X$. Но можно ввести функции index_{wm} и $\dim_{wm}$ так, что для компакта X они определены тогда и только тогда, когда $X \in w$ - m - C . Надо повторить все предыдущие рассуждения, заменив m -покрытия на m -системы (см. определение 1.11). Ситуация здесь несколько проще, поскольку, как и в случае дизъюнктивных пар замкнутых множеств, всякое семейство $\{\Phi_i\}$ m -систем, содержащее две одинаковые системы, несущественно. Приведем основные результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.32. Последовательность $S = \{\Phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ m -систем компакта X называется M -разделяющей, если для всякой m -системы Φ бесконечно множество $\{i \in \mathbb{N} : \Phi \succ \Phi_i\}$.

Отметим, что здесь мы не требуем попарной различности систем Φ_i . Поэтому m -разделяемость S равносильна тому, что семейство S конфинально в множестве $\varphi_m(X)$ всех m -систем, упорядоченном отношением, обратным отношению вписанности. У нас нет необходимости доказывать аналог леммы 4.6, хотя, разумеется, он имеет место.

Для произвольной m -разделяющей последовательности $S = \{\Phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ компакта X полагаем

$$M_S(X) = \{\sigma \in \text{Fin } \mathbb{N} : \text{семейство } \{\Phi_i : i \in \sigma, \Phi_i \in S\} \text{ существенно}\}.$$

ТЕОРЕМА 4.33. Компакт X является w - m - C -пространством тогда и только тогда, когда для некоторой (эквивалентно – для всякой) m -разделяющей последовательности S в X множество $M_S(X)$ вполне упорядочено порядком Брауэра–Клини.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.34. Для w - m - C -компакта X положим

$$\text{index}_{wm} X = \text{type } M_s(X),$$

где S – некоторая (всякая) m -разделяющая последовательность в X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.35. Если $m_1 \leq m_2$, то $\text{index}_{wm_1} X \leq \text{index}_{wm_2} X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.36. Если F – замкнутое подмножество m - C -компакта X , то

$$\text{index}_{wm} F \leq \text{index}_{wm} X.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.37. Пусть $Z \subset \exp Q$ – некоторое множество. Для того чтобы существовал w - m - C -компакт Y , топологически содержащий все $X \in Z$, необходимо и достаточно, чтобы существовало аналитическое множество $E \subset \exp Q$, содержащее Z и состоящее из w - m - C -компактов.

ТЕОРЕМА 4.38. Для того чтобы существовал w - m - C -компакт, топологически содержащий все w - m - C -компакты данного семейства E , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup\{\text{index}_{wm} X : X \in E\} < \omega_1.$$

Положим

$$M_{wm}(X) = \{\sigma \in \text{Fin } \varphi_m(X) : \sigma \text{ существенно}\}.$$

ТЕОРЕМА 4.39. Для нормального пространства X имеем

$$\dim X \leq n \iff \text{Ord } M_{wm}(X) \leq n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.40. Для нормального пространства X полагаем

$$\dim_{wm} X = \text{Ord } M_{wm}(X).$$

В случае $\dim_{wm} X = \infty$ будем говорить, что размерность $\dim_{wm} X$ не определена.

ТЕОРЕМА 4.41. Размерность $\dim_{wm} X$ пространства X определена тогда и только тогда, когда X есть S - w - m - C -пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.42. Если $m_1 \leq m_2$, то

$$\dim_{wm_1} X \leq \dim_{wm_2} X.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.43. Если $F \subset X$ – замкнутое подмножество, то

$$\dim_{wm} F \leq \dim_{wm} X.$$

Пусть $\Phi = \{F_1, \dots, F_k\}$ – m -система пространства X . Определим покрытие $\mu(\Phi) = \{U_1, \dots, U_k\}$, полагая

$$U_i = X \setminus \bigcup\{F_j : j \neq i\}. \quad (4.6)$$

Получаем отображение $\mu: \varphi_m(X) \rightarrow \text{cov}_m(X)$. Отметим, что покрытия $\mu(\Phi)$ являются частным случаем (для конечных Φ) покрытий $s(\Phi)$ из (2.1).

ЛЕММА 4.44. Если конечное семейство m -систем $\sigma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_s\}$ существенно, то семейство покрытий $\mu(\sigma) = \{\mu(\Phi_1), \dots, \mu(\Phi_s)\}$ существенно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi_l = \{F_1^l, \dots, F_{k_l}^l\}$ и $\mu(\Phi_l) = \{U_1^l, \dots, U_{k_l}^l\}$. Предположим, что $\mu(\sigma)$ несущественно. Тогда существуют такие дизъюнктные открытые семейства

$$v_l = \{V_1^l, \dots, V_{k_l}^l\}, \quad 1 \leq l \leq s,$$

что

$$[V_j^l] \subset U_j^l \quad (4.7)$$

и

$$\bigcup \{V_j^l : 1 \leq l \leq s, 1 \leq j \leq k_l\} = X. \quad (4.8)$$

Из (4.6) и (4.8) вытекает, что

$$[V_{j_1}^l] \cap F_{j_2}^l = \emptyset \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2.$$

Следовательно, существуют такие окрестности $O_1\Phi_l = \{O_1F_1^l, \dots, O_1F_{k_l}^l\}$, что

$$O_1F_{j_1}^l \cap V_{j_2}^l = \emptyset \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2.$$

Поэтому, полагая $OF_j^l = O_1F_j^l \cup V_j^l$, получаем окрестности $O\Phi_l = \{OF_1^l, \dots, OF_{k_l}^l\}$ систем Φ_l , тела которых согласно (4.8) покрывают X . Получили противоречие с существенностью семейства σ . Лемма 4.44 доказана.

Таким образом, отображение μ удовлетворяет условиям леммы 4.18, согласно которой

$$\text{Ord } M_{wm}(X) \leq \text{Ord } M_m(X).$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.45. Для любого нормального пространства X и всякого m имеем $\dim_{wm} X \leq \dim_m X$.

В отличие от размерности $\dim_m$ можно доказать аналог теоремы Борста [48; теорема 3.2.4] для $\dim_{wm}$. А именно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.46. Если трансфинитная размерность $\text{Ind } X$ определена, то

$$\dim_{wm} X \leq \text{Ind } X.$$

ТЕОРЕМА 4.47. Если X — w - m - C -компакт и $\dim X \neq 0$, то

$$\text{index}_{wm} X \leq \omega^{\dim_{wm} X}.$$

ТЕОРЕМА 4.48. Для того чтобы существовал w - m - C -компакт, топологически содержащий все w - m - C -компакты данного семейства E , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup\{\dim_{wm} X : X \in E\} < \omega_1.$$

Пусть $(u, \Phi) = (\{U_1, \dots, U_k\}, \{F_1, \dots, F_k\})$ — m -накрывающая пара и $O\Phi = \{OF_1, \dots, OF_k\}$ — окрестность m -системы Φ , вписанная в u . Тогда множество $P = X \setminus OF_1 \cup \dots \cup OF_k$ называется перегородкой пары (u, Φ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.49. Большая трансфинитная индуктивная размерность Ind_m ($m \geq 2$ или $m = \infty$) в классе всех нормальных пространств определяется по индукции следующим образом.

- 1) $\text{Ind}_m X = -1 \iff X = \emptyset$.
- 2) $\text{Ind}_m X \leq \alpha$, где α – порядковое число, если для всякой m -накрывающей пары (u, Φ) существует ее перегородка P размерности $\text{Ind}_m P < \alpha$.
- 3) $\text{Ind}_m X = \infty$, если неравенство $\text{Ind}_m X \leq \alpha$ не выполняется ни для какого порядкового числа α .

В последнем случае будем говорить также, что размерность $\text{Ind}_m X$ не определена.

Из определения 4.49 вытекают соотношения

$$\text{Ind } X = \text{Ind}_2 X \leq \text{Ind}_3 X \leq \dots \leq \text{Ind}_m X \leq \dots \leq \text{Ind}_\infty X. \quad (4.9)$$

Следующее утверждение достаточно очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.50. Пусть в пространстве X выполнена теорема конечной суммы для замкнутых слагаемых конечной размерности $\text{Ind} \leq n - 1$. Тогда $\text{Ind } F = \text{Ind}_\infty F$ для всякого замкнутого множества $F \subset X$ размерности $\text{Ind } F \leq n$.

СЛЕДСТВИЕ 4.51. Если $\text{Ind } X = 0$, то $\text{Ind}_\infty X = 0$.

ТЕОРЕМА 4.52. Пусть наследственно нормальный бикомпакт X является объединением своих подпространств X_i , $i \in \omega$, размерность $\text{Ind}_m X_i$ которых определена. Тогда $\text{Ind}_m X < \infty$.

Доказательство проходит по схеме доказательства теоремы 3 из [35]. При этом используется следующая стандартно доказываемая лемма.

ЛЕММА 4.53. Пусть Y – непустое подмножество наследственно нормального пространства X размерности $\text{Ind}_m Y = \alpha$. Тогда для произвольной m -накрывающей пары (u, Φ) пространства X существует такая перегородка P этой пары, что $\text{Ind}_m(P \cap Y) < \alpha$.

Из следствия 4.51 и теоремы 4.52 вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.54. Для любого счетномерного метризуемого компакта определены размерности Ind_m для всех m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.55. Семейство $\mathcal{U} = \{u_\alpha : \alpha \in A\} \subset \text{cov}_m(X)$ называется существенным на $Y \subset X$, если для любых открытых дизъюнктивных семейств v_α , вписанных в u_α , имеем $Y \setminus \bigcup \{v_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset$.

Для $Y \subset X$ полагаем

$$M_m(X, Y) = \{\sigma \in \text{Fin}(\text{cov}_m(X)) : \sigma \text{ существенно на } Y \text{ и } |\sigma| = |\sigma|Y|\}. \quad (4.10)$$

Обобщением теоремы 3.1.6 из [48] является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.56. Если F – замкнутое подмножество пространства X , то

$$\dim_m F = \text{Ord } M_m(X, F) \leq \dim_m X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство вытекает из (4.5). Чтобы проверить левое равенство, воспользуемся леммой 4.27. Положим

$$L_1 = \{e(u) : u \in \text{cov}_m(F)\},$$

где e – оператор из доказательства предложения 4.10;

$$L_2 = \text{cov}_m(X); \quad M_1 = \{e(\sigma) : \sigma \in M_m(F)\}; \quad M_2 = M_m(X, F).$$

Проверим выполнение свойств 1)–3) леммы 4.27. Пусть $a_2 = \{U_1, \dots, U_k\} \in L_2 \cap M_2$. Согласно (4.10), покрытие a_2 существенно на F . Это означает, что в семейство $a_2|F = \{U_1 \cap F, \dots, U_k \cap F\}$ нельзя вписать дизъюнктное покрытие множества F . Возьмем последовательность покрытий $w_i = \{W_1^i, \dots, W_k^i\}$, $i \in \omega$, множества F , удовлетворяющих условиям:

$$[W_j^0] \subset U_j \cap F; \quad [W_j^{i+1}] \subset W_j^i. \quad (4.11)$$

Покрытия w_i существенны, будучи измельчениями существенного покрытия $a_2|F$. Из их существенности и условий (4.11) вытекает, что все они различны и отличаются от $a_2|F$. Покажем, что покрытия $e(w_i)$ годятся на роль элементов $a_1 \in L_1 \cap M_1$ из свойства 4.27.1).

Пусть $\sigma = \{u_1, \dots, u_s\} \in M_2^{a_2}[e(w_i)]$. Это означает, что

$$\{a_2, u_1, \dots, u_s\} \in M_m(X, F) \quad (4.12)$$

и

$$e(w_i) \notin \{a_2, u_1, \dots, u_s\}.$$

Доказать же надо, что

$$\{e(w_i), u_1, \dots, u_s\} \in M_m(X, F). \quad (4.13)$$

Но это очевидно, поскольку семейство (4.13) получается из (4.12) заменой покрытия a_2 на такое покрытие $e(w_i)$, что $e(w_i)|F = w_i \succ a_2|F$.

Теперь проверим 4.27.2). Пусть $M_2^\sigma \neq \emptyset$. Тогда существует такое покрытие $u \in L_2 \setminus \sigma$, что $\{u\} \in M_2^\sigma$. Если $u = \{U_1, \dots, U_k\}$, то у последовательности w_i , $i \in \omega$, удовлетворяющей условиям (4.11), найдется такое w_i , что $e(w_i) \notin e(\sigma)$. Тогда $\{e(w_i)\} \in M_1^\sigma$. Если же $M_1^\sigma \neq \emptyset$, то существует такое существенное покрытие $u \in \text{cov}_m(F)$, что $\{e(u)\} \in M_1^\sigma$. В этом случае автоматически $\{e(u)\} \in M_2^\sigma$.

Наконец, условие 4.27.3) выполнено тривиальным образом.

Предложение 4.56 доказано.

Аналогом предложения 3.2.1 из [48] является следующее утверждение.

ЛЕММА 4.57. Пусть (u_1, Φ_1) – m -накрывающая пара пространства X и P – ее перегородка. Тогда

$$(M_m(X))^{u_1} \subset M_m(X, P) \quad (4.14)$$

и, значит,

$$\text{Ord}(M_m(X))^{u_1} \leq \dim_m P. \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma = \{u_2, \dots, u_s\} \in (M_m(X))^{u_1}$. Тогда по определению $\{u_1, u_2, \dots, u_s\} \in M_m(X)$. Следовательно, для любых открытых дизъюнктивных семейств v_i , вписанных в u_i , семейство

$$\bigcup \{v_i : i = 1, \dots, s\} \text{ не покрывает } X. \quad (4.16)$$

В частности, свойство (4.16) выполнено и для семейства $v_1 = O\Phi_1$, где $P = X \setminus \bigcup O\Phi_1$. Поэтому семейство $\bigcup \{v_2, \dots, v_s\}$ не покрывает P . Но это и означает, что $\{u_2, \dots, u_s\}$ существенно на P , т.е. $\sigma \in M_m(X, P)$. Итак, свойство (4.14) проверено. Свойство (4.15) вытекает из (4.14) и предложения 4.56. Лемма 4.57 доказана.

Следующее утверждение для $m = 2$ было доказано в [48].

ТЕОРЕМА 4.58. Пусть X – нормальное пространство и $m \geq 2$ или $m = \infty$. Тогда

$$\dim_m X \leq \text{Ind}_m X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $\text{Ind}_m X = \alpha$. Случай $\alpha = -1$ очевиден. Пусть $\text{Ind}_m X = \alpha \geq 0$. Берем произвольное m -покрытие $u = \{U_1, \dots, U_k\}$. Ему соответствует m -накрывающая пара (u, Φ) , где m -система Φ состоит из пустых множеств. Поскольку $\text{Ind}_m X = \alpha$, существуют такие попарно непересекающиеся открытые множества $V_i \subset U_i$, что $\text{Ind}_m P < \alpha$ для $P = X \setminus V_1 \cup \dots \cup V_k$. Согласно предположению индукции, $\dim_m P \leq \text{Ind}_m P$. Тогда из леммы 4.57 получаем, что $\text{Ord}(M_m(X))^u < \alpha$. Следовательно, $\text{Ord}(M_m(X)) \leq \alpha$. Теорема 4.58 доказана.

П. Борст [52] привел пример метризуемого компакта X с размерностями

$$\dim_2 X = \omega_0 < \text{Ind}_2 X = \omega_0 + 1.$$

Следующие два утверждения являются аналогами соответствующих теорем Ю. М. Смирнова (см. [22], [42]) для размерности Ind .

ТЕОРЕМА 4.59. Если для бикompакта X веса $wX \leq \omega_\alpha$ определена размерность Ind_m , то $\text{Ind}_m X < \omega_{\alpha+1}$.

ТЕОРЕМА 4.60. Если для метрического пространства X определена размерность Ind_m , то $\text{Ind}_m X < \omega_1$.

§ 5. Факторизационные теоремы и компактификации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ назовем m -существенно накрывающим, если $f^{-1}(M_m(Y)) \subset M_m(X)$, т.е. для всякого существенного семейства $(u_1, \dots, u_k) \in \text{Fin}(\text{cov}_m(X))$ семейство $(f^{-1}(u_1), \dots, f^{-1}(u_k))$ существенно.

Аналогично, $f: X \rightarrow Y$ называется w - m -существенно накрывающим, если $f^{-1}(L_m(Y)) \subset L_m(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – m -существенно (w - m -существенно) накрывающее отображение. Тогда если $X \in m\text{-}C$ ($X \in w\text{-}m\text{-}C$), то $Y \in m\text{-}C$ ($Y \in w\text{-}m\text{-}C$). Более того, $\dim_m Y \leq \dim_m X$ ($\dim_{wm} Y \leq \dim_{wm} X$).

Утверждение вытекает из теорем 4.21, 4.41 и леммы 4.18, условиям которой удовлетворяют отображения

$$\mu = f^{-1}: \text{cov}_m(Y) \rightarrow \text{cov}_m(X)$$

и

$$\mu = f^{-1}: \varphi_m(Y) \rightarrow \varphi_m(X).$$

ТЕОРЕМА 5.3 (факторизационная теорема для $\dim_m$). Пусть $f: X \rightarrow Z$ – отображение бикompакта X на бикompакт Z . Тогда существуют такой бикompакт Y и такие отображения $g: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$, что $f = h \circ g$, $\dim_m Y \leq \dim_m X$ и $wY = wZ$.

Аналогично формулируется

ТЕОРЕМА 5.4 (факторизационная теорема для $\dim_{wm}$). Пусть $f: X \rightarrow Z$ – отображение бикompакта X на бикompакт Z . Тогда существуют такой бикompакт Y и такие отображения $g: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$, что $f = h \circ g$, $\dim_{wm} Y \leq \dim_{wm} X$ и $wY = wZ$.

Доказательства теорем 5.3 и 5.4 проходят по одной схеме (поэтому мы ограничимся теоремой 5.3). Отображение f надо разложить в τ -спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$, где $\tau = wZ$ (детали см. ниже), найти такое α , что предельная проекция $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ является m -существенно накрывающей, положить $Y = X_\alpha$, $g = \pi_\alpha$ и применить предложение 5.2.

Спектр S . Положим $\kappa = wX$ и $A_1 = \{\alpha \subset \kappa : |\alpha| = \tau\}$.

Множество A_1 упорядочим отношением включения: $\beta \leq \alpha \iff \beta \subset \alpha$. Вложим X в тихоновский куб I^κ . Положим $X_\alpha = p_\alpha(X)$, $\pi_\beta^\alpha = p_\beta^\alpha|_{X_\alpha}$, где $p_\alpha: I^\kappa \rightarrow I^\alpha$ и $p_\beta^\alpha: I^\alpha \rightarrow I^\beta$ – проектирования на грани. Вложение $X \rightarrow I^\kappa$ можно выбрать так, что для некоторого $\alpha_0 \in A_1$ отображение $\pi_{\alpha_0}: X \rightarrow X_{\alpha_0}$ гомеоморфно отображению $f: X \rightarrow Z$. Полагаем $A = \{\alpha \in A_1 : \alpha_0 \leq \alpha\}$ и $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$. Тогда $X = \lim S$, а отображения $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ являются предельными проекциями τ -спектра S .

Поиск существенно накрывающих отображений. (a) Отметим прежде всего, что если семейство $(v_1, \dots, v_n)$ вписано в существенное семейство $(u_1, \dots, u_n)$, то оно также существенно. Поэтому условие существенной накрываемости достаточно проверить для множества

$$M_m^0(Y) = \{\sigma \in \text{Fin}(\text{cov}_m^0(Y)) : \sigma \text{ существенно}\},$$

где $\text{cov}_m^0(Y)$ – семейство покрытий, конфинальное в $\text{cov}_m(Y)$. В качестве $\text{cov}_m^0(Y)$ можно взять множество $\text{cov}_m(Y, \mathcal{T}_0)$ всех m -покрытий, элементы которых принадлежат большой базе $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}(Y)$ пространства Y с $|\mathcal{T}_0| = wY$.

(b) Для пространства Y положим

$$I_m(Y) = \{\sigma \in \text{Fin}(\text{cov}_m(Y)) : \sigma \text{ несущественно}\}.$$

Если $f: X \rightarrow Y$ – отображение, а $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}(Y)$, то

$$I_m(f)(\mathcal{T}_0) = \{\sigma \in \text{Fin}(\text{cov}_m(Y, \mathcal{T}_0)) : f^{-1}(\sigma) \text{ несущественно}\}.$$

Отображение f m -существенно накрывающее тогда и только тогда, когда существует такая большая база $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}(Y)$, что

$$I_m(f)(\mathcal{T}_0) \subset I_m(Y). \quad (5.1)$$

(с) Очевидно, что если X есть предел спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A\}$ и $\sigma \in I_m(X)$, то существует такое $\alpha \in A$, что $\pi_\alpha^\# \sigma \in I_m(X_\alpha)$.

(d) Приступаем к поиску. Фиксируем большую базу $\mathcal{T}$ бикompакта $X_{\alpha_0} = Z$ мощности τ . Для каждого $\sigma \in I_m(\pi_{\alpha_0})(\mathcal{T}_0)$ согласно (с) существует такое $\alpha(\sigma) \in A$, что

$$\pi_{\alpha(\sigma)}^\# \pi_{\alpha_0}^{-1}(\sigma) \in I_m(X_{\alpha(\sigma)}). \quad (5.2)$$

Существует элемент $\alpha_1 \in A$, мажорирующий все $\alpha(\sigma)$. Тогда

$$\pi_{\alpha_1}^\# \pi_{\alpha_0}^{-1}(\sigma) \in I_m(X_{\alpha_1}) \quad \forall \sigma \in I_m(\pi_{\alpha_0})(\mathcal{T}_0). \quad (5.3_0)$$

Семейство $(\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1})^{-1}(\mathcal{T}_0)$ дополняем до большой базы $\mathcal{T}_1$ бикompакта X_{α_1} мощности τ . Повторяя описанную выше процедуру, находим такое $\alpha_2 > \alpha_1$, что

$$\pi_{\alpha_2}^\# \pi_{\alpha_1}^{-1}(\sigma) \in I_m(X_{\alpha_2}) \quad \forall \sigma \in I_m(\pi_{\alpha_1})(\mathcal{T}_1). \quad (5.3_1)$$

Поступая аналогичным образом, находим такую растущую последовательность элементов $\alpha_i \in A$, что

$$\pi_{\alpha_{i+1}}^\# \pi_{\alpha_i}^{-1}(\sigma) \in I_m(X_{\alpha_{i+1}}) \quad \forall \sigma \in I_m(\pi_{\alpha_i})(\mathcal{T}_i), \quad (5.3_i)$$

где $\mathcal{T}_i$ – большая база бикompакта X_{α_i} , содержащая семейство $(\pi_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i})^{-1}(\mathcal{T}_{i-1})$.

(e) Полагаем $\alpha = \lim \alpha_i$,

$$\mathcal{T}^0 = \bigcup \{(\pi_{\alpha_i}^\alpha)^{-1}(\mathcal{T}_i) : i \in \omega\}.$$

Тогда $\mathcal{T}^0$ будет большой базой бикompакта $X_\alpha \equiv Y$, удовлетворяющей условию

$$I_m(\pi_\alpha)(\mathcal{T}^0) \subset I_m(Y). \quad (5.3_\alpha)$$

Факторизационная теорема 5.3 доказана.

Для пространства Y положим

$$\begin{aligned} \varphi_m^0(Y) &= \{\Phi \in \varphi_m(Y) : \text{элементы } \Phi \text{ канонически замкнуты}\}; \\ M_{wm}^0(Y) &= M_{wm}(Y) \cap \text{Fin } \varphi_m^0(Y). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.5. Для пространства Y имеем

$$\dim_{wm} Y = \text{Ord } M_{wm}^0(Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тожественное вложение $M_{wm}^0(Y) \rightarrow M_{wm}(Y)$ дает неравенство $\text{Ord } M_{wm}^0(Y) \leq \dim_{wm} Y$. Теперь для $\Phi = \{F_1, \dots, F_k\} \in \varphi_m(Y)$ зафиксируем такую систему $\mu(\Phi) = \{F'_1, \dots, F'_k\} \in \varphi_m^0(Y)$, что $F_i \subset F'_i$. Получаем отображение $\mu: \varphi_m(Y) \rightarrow \varphi_m^0(Y)$, удовлетворяющее условию

$$\mu(M_{wm}(Y)) \subset M_{wm}^0(Y).$$

Более того, если $\sigma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \in L_m(Y)$, то для $\mu(\sigma) = \{\mu(\Phi_1), \dots, \mu(\Phi_n)\}$ имеем $|\sigma| = |\mu(\sigma)|$, поскольку семейство $\mu(\sigma)$, содержащее две одинаковые системы, не может быть существенным. Таким образом, отображение μ удовлетворяет условиям леммы 4.18, согласно которой $\text{Ord } M_{wm}(Y) \leq \text{Ord } M_{wm}^0(Y)$. Лемма 5.5 доказана.

ТЕОРЕМА 5.6. *Для нормального пространства X имеем*

$$\dim_{wm} X = \dim_{wm} \beta X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F \subset \beta X$ – канонически замкнутое множество, то $F = [F \cap X]_{\beta X}$. Наоборот, если $F \subset X$ канонически замкнуто, то $F = [F]_{\beta X} \cap X$. Поэтому с учетом нормальности X отображение

$$\{F_1, \dots, F_k\} \rightarrow \{[F_1]_{\beta X}, \dots, [F_k]_{\beta X}\}$$

порождает изоморфизм

$$\text{Ord } M_{wm}^0(X) \rightarrow \text{Ord } M_{wm}^0(\beta X).$$

Применение леммы 5.5 завершает доказательство.

Для пространства Y положим

$$\begin{aligned} \text{cov}_m^0(Y) &= \{u \in \text{cov}_m(Y) : \text{элементы } u \text{ канонически открыты}\}; \\ M_m^0(Y) &= M_m(Y) \cap \text{Fin}(\text{cov}_m^0(Y)). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.7. *Для пространства Y имеем*

$$\dim_m Y = \text{Ord } M_m^0(Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что пары

$$\begin{aligned} (\text{cov}_m^0(Y), \text{cov}_m(Y)) &= (L_1, L_2), \\ (M_m^0(Y), M_m(Y)) &= (M_1, M_2) \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям леммы 4.27. Очевидно, $M_m^0(Y)$, $M_m(Y)$ – включающие множества. Для любого существенного покрытия $u \equiv a_2 \in \text{cov}_m(Y)$ в качестве элементов a_1 берем бесконечную последовательность канонически открытых покрытий

$$u_1 \prec u_2 \prec \dots,$$

где каждое следующее комбинаторно с замыканием вписано в предыдущее (включая вписанность $u \prec u_1$). Из существенности u вытекает существенность u_i и их попарная различность. После этого проверка условия 1) состоит в расшифровке определений.

Для открытого множества U через $\bar{U}$ обозначим его “канонизацию”: $\bar{U} = \text{Int}[U]$. На основе этого определяется “канонизация” $\bar{u}$ покрытия u и “канонизация” $\bar{\sigma}$ семейства покрытий σ . Ясно, что

$$\sigma \in M_m(Y) \iff \bar{\sigma} \in M_m^0(Y). \quad (5.4)$$

Импликация $\implies$ из (5.4) дает нам условие 2) леммы 4.27. Условие 3) очевидно. Лемма 5.7 доказана.

ТЕОРЕМА 5.8. Для нормального пространства X имеем

$$\dim_m X = \dim_m \beta X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для канонически открытого в X множества U множество $\text{ex}(U) \equiv \beta X \setminus [X \setminus U]_{\beta X}$ канонически открыто в βX . Для покрытия $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ пространства X семейство $\text{ex}(u) = \{\text{ex}(U_1), \dots, \text{ex}(U_k)\}$ является покрытием βX в силу нормальности X . Легко видеть, что

$$\sigma \in M_m^0(X) \iff \text{ex}(\sigma) \in M_m^0(\beta X). \quad (5.5)$$

Из (5.5) получаем $\text{Ord } M_m^0(X) = \text{Ord } M_m^0(\beta X)$. Применение леммы 5.7 завершает доказательство.

Из теорем 4.21, 5.8 и 5.3 вытекает

ТЕОРЕМА 5.9. Всякое S - m - C -пространство X имеет m - C -компактификацию bX веса $wbX = wX$ и размерности $\dim_m bX \leq \dim_m X$.

Из теорем 4.41, 5.6 и 5.4 вытекает

ТЕОРЕМА 5.10. Всякое S - w - m - C -пространство X имеет w - m - C -компактификацию bX веса $wbX = wX$ и размерности $\dim_{wm} bX \leq \dim_{wm} X$.

Изложенные выше результаты для $m = 2$ получили К. Июкои [53] и В. А. Чатырко [54], а для $m = \infty$ – В. А. Чатырко [55], [56].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. Распространить утверждения теорем 5.9 и 5.10 на m - C - и w - m - C -пространства нельзя. В самом деле, обозначим через Q_ω подмножество гильбертова куба $Q = I^\omega$, состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля. Пространство Q_ω слабо бесконечномерно и даже является C -пространством, но, как показал Е. Г. Склиренко [5], не имеет слабо бесконечномерных компактификаций.

Напомним, что счетная последовательность открытых множеств Γ_n , $n \in \omega$, пространства X называется *сходящейся*, если для всякой дискретной в X последовательности точек x_i , $i \in \omega$, существуют такие i_0 и n , что $x_i \in \Gamma_n$ для всех $i \geq i_0$. Если последовательность Γ_n сходится, то множество $\Phi = X \setminus \bigcup \{\Gamma_n : n \in \omega\}$ называется *пределом* этой последовательности. Ясно, что предел всякой сходящейся последовательности счетно компактен.

Обобщением теоремы Е. Г. Склиренко о строении S -слабо бесконечномерных пространств (см. [5], [46]) является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.12. Наследственно паракомпактное пространство X является S - m - C (S - w - m - C)-пространством тогда и только тогда, когда в X существует сходящаяся последовательность открытых конечномерных множеств Γ_n , предел которой есть m - C (w - m - C)-бикompакт.

Для S - m - C -пространств эта теорема доказана в [15].

ТЕОРЕМА 5.13. Пусть X – полное метрическое пространство, каждое компактное подмножество которого есть m - C (w - m - C)-пространство. Тогда существует бикompактное расширение bX , также являющееся m - C (w - m - C)-пространством и имеющее вес $wbX = wX$.

СЛЕДСТВИЕ 5.14. *Всякое полное метрическое m - C (w - m - C)-пространство имеет m - C (w - m - C)-компактификацию.*

СЛЕДСТВИЕ 5.15. *Всякое полное метрическое C (w - C)-пространство имеет C (w - C)-компактификацию.*

С учетом предложения 1.34 и замечаний 1.35 и 1.36 теорема 5.13 вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.16 [57]. *Всякое полное метрическое пространство X имеет бикompактное расширение в X веса wX , на рост которого является объединением счетного числа конечномерных бикompактов.*

На трансфинитную размерность Ind_m распространяются результаты о размерности $\text{Ind} = \text{Ind}_2$, полученные Б. А. Пасынковым в [58].

ТЕОРЕМА 5.17. *Для произвольного нормального пространства X*

$$\text{Ind}_m X = \text{Ind}_m \beta X.$$

ТЕОРЕМА 5.18. *Если $\text{Ind}_m \beta X \leq \alpha$ для тихоновского пространства X , то существует такое бикompактное расширение bX , что*

$$wbX = wX, \quad \text{Ind}_m bX \leq \alpha.$$

Теорема 5.18 вытекает из следующей факторизационной теоремы.

ТЕОРЕМА 5.19. *Пусть $f: X \rightarrow Z$ – отображение между бикompактами, и пусть $F \subset X$ – замкнутое множество размерности $\text{Ind}_m F \leq \alpha$. Тогда существуют такой бикompакт Y и такие непрерывные отображения $g: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$, что*

- 1) $f = h \circ g$;
- 2) $wY \leq wZ$;
- 3) $\text{Ind}_m f(F) \leq \alpha$.

Доказательство этой теоремы проходит по схеме доказательства теоремы 3 из [17; приложение].

Из теорем 5.17 и 5.18 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.20. *Для нормального пространства X существует такое бикompактное расширение bX , что $wbX = wX$ и $\text{Ind}_m bX \leq \text{Ind}_m X$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.21. Существуют нульмерные бикompакты, содержащие нормальные подпространства X положительной размерности $\text{Ind} X$ (первый такой пример построил Даукер [59]). Значит, равенство размерностей не является необходимым в следствии 5.20.

§ 6. Существенные отображения и m -компакты Хендерсона

Основным инструментом исследования m - C - и w - m - C -пространств являются k -оды и их произведения. Пусть $A_k = \{a_1, \dots, a_k\}$ – конечное множество, состоящее из $k \geq 2$ точек. Конус $\text{con}(A_k)$ называется k -одом. По другому k -од можно описать как простейшее дерево $T(k)$ с k вершинами и (при $k \geq 3$)

единственной точкой ветвления – вершиной конуса $\text{con}(A_k)$, которая будет называться *центром* $T(k)$ и обозначаться через c .

Компакт $T(k)$ можно рассматривать как объединение k радиусов $[c; a_j]$ единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ с центром в точке c . Отрезки $[c; a_j]$ называются *ребрами* k -ода $T(k)$, а точки a_j – его *вершинами*. При рассмотрении нескольких k -одов с различным числом вершин центр k -ода $T(k)$ будем обозначать через c_k , а его вершины – $a_1^k, \dots, a_k^k$. Каждый k -од, очевидно, является абсолютным ретрактом.

Пусть $\kappa = (k_1, \dots, k_i, \dots)$ – m -последовательность, а $\kappa_n = (k_1, \dots, k_n)$ – ее начальный отрезок. Положим

$$T_\kappa = \Pi\{T(k_i) : k_i \in \kappa\}, \\ T_{\kappa_n} = \Pi\{T(k_i) : k_i \in \kappa_n\}.$$

Иногда, если последовательность κ фиксирована, мы будем применять более простые обозначения: $T_\kappa = T$, $T_{\kappa_n} = T_n$.

Через

$$q_i : T \rightarrow T(k_i), \quad q^n : T \rightarrow T_n, \quad q_i^n : T_n \rightarrow T(k_i)$$

мы будем обозначать проектирования произведения на сомножитель и на подпроизведение соответственно. Ясно, что q^n совпадает с *диагональным произведением* отображений q_i :

$$q^n = \bigtriangleup_{k_i \in \kappa_n} q_i. \quad (6.1)$$

Положим

$$\Gamma_j^i = \{t = (t_l) \in T : t_i = a_j^{k_i}\}. \quad (6.2)$$

Множество Γ_j^i будем называть (i, j) -*гранью* компакта T . Аналогично определяется (i, j) -*грань* ${}^n\Gamma_j^i$ компакта T_n при $i \leq n$:

$${}^n\Gamma_j^i = \{t = (t_l) \in T_n : t_i = a_j^{k_i}\} = (q_i^n)^{-1}(a_j^{k_i}). \quad (6.3)$$

Множество

$$\partial T_n = \bigcup \{{}^n\Gamma_j^i : i \leq n, j \leq k_i\}$$

называется *комбинаторной границей* компакта T_n . Можно показать, что

$$\text{компакт } T_n \text{ гомеоморфен конусу } \text{con}(\partial T_n). \quad (6.4)$$

Если последовательность κ постоянна: $\kappa = \{k, k, \dots, k, \dots\}$, то компакты T_n являются степенями k -ода $T(k)$ и обозначаются $T^n(k)$.

Следующее утверждение заменяет собой лемму Урысона при исследовании m - C - и w - m - C -пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1 (лемма о продолжении отображений в k -оды). Пусть $\Phi = \{F_1, \dots, F_k\}$ – дизъюнктивная система замкнутых подмножеств пространства X , $O\Phi = \{OF_1, \dots, OF_k\}$ – ее окрестность. Тогда существует такое непрерывное отображение $f : X \rightarrow T(k)$, что $f(F_j) = a_j^k$ и $f^{-1}(c_k; a_j^k) \subset OF_j$. Если, кроме того, перегородка $P = X \setminus OF_1 \cup \dots \cup OF_k$ и множества F_j функционально замкнуты, то можно предполагать, что

$$F_j = f^{-1}(a_j^k), \quad P = f^{-1}(c_k). \quad (6.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Для $m \in \overline{\mathbb{N}}$ и m -последовательности $\kappa_n = (k_1, \dots, k_n)$ непрерывное отображение $f: X \rightarrow T_{\kappa_n}$ называется w -несущественным, если существует непрерывное отображение $g: X \rightarrow \partial T_{\kappa_n}$, совпадающее с f на множестве $f^{-1}(\partial T_{\kappa_n})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Для $m \in \overline{\mathbb{N}}$ и m -последовательности $\kappa = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ непрерывное отображение $f: X \rightarrow T_\kappa$ называется w -существенным, если для всякого $n \geq 1$ отображение

$$q^n \circ f: X \rightarrow T_{\kappa_n}$$

w -существенно.

ТЕОРЕМА 6.4. Для $m \in \overline{\mathbb{N}}$ нормальное пространство X является S - w - m - C -пространством тогда и только тогда, когда выполнено условие

(*) для любой m -последовательности $\kappa = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ всякое отображение $f: X \rightarrow T_\kappa$ w -несущественно.

Для $m = 2$ теорему 6.4 доказал Б. Т. Левшенко [4].

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Бикомпакт X является w - C -пространством тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\kappa = (k_i)$, $k_i \geq 2$, всякое отображение $f: X \rightarrow T_\kappa$ w -несущественно.

Доказательство теоремы 6.4 основано на (6.4) и следующих двух утверждениях, представляющих самостоятельный интерес.

ЛЕММА 6.6. Пусть $\sigma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$, $\Phi_i = (F_1^i, \dots, F_{k_i}^i)$, – существенное семейство систем замкнутых множеств пространства X . Тогда w -существенно всякое отображение

$$f = \bigtriangleup_{i=1}^n f_i: X \rightarrow T(k_1) \times \dots \times T(k_n),$$

подчиненное условиям $f_i^{-1}(a_j^{k_i}) = F_j^i$.

ЛЕММА 6.7. Если w -существенно отображение

$$f = \bigtriangleup_{i=1}^n f_i: X \rightarrow T(k_1) \times \dots \times T(k_n),$$

то в X существенно семейство $\sigma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$, где

$$\Phi_i = (f_i^{-1}(a_1^{k_i}), \dots, f_i^{-1}(a_{k_i}^{k_i})).$$

В 1968 г. Д. Хендерсон [60] для $\alpha < \omega_1$ определил AR -компакты J^α размерности $\text{Ind } J^\alpha = \alpha$, их границы $\partial J^\alpha = T^\alpha$ и существенные отображения $f: X \rightarrow J^\alpha$. Он доказал, что если нормальное пространство X допускает существенное отображение на J^α , то $\text{Ind } X \geq \alpha$. Там же Хендерсон поставил два вопроса:

- 1) Допускает ли X существенное отображение на J^α , если $\text{Ind } X \geq \alpha$?
- 2) Будет ли сильно бесконечномерным метризуемый компакт X , если он допускает существенное отображение на каждый компакт J^α , $\alpha < \omega_1$?

Обе проблемы решил Р. Поль [47]. Положительный ответ на второй вопрос вытекает из того, что $\text{index } X \geq \alpha$, если X допускает существенное отображение на J^α . Отрицательно отвечая на первый вопрос, Р. Поль доказал существование слабо бесконечномерного компакта, который содержит подкомпакты любой трансфинитной размерности $< \omega_1$.

П. Борст и Я. Дийкстра [61] построили σ -конечномерный компакт X размерности $\text{Ind } X = \omega_0 + 1$, который не допускает существенного отображения на J^{ω_0+1} . При этом оказалось, что $\dim_2 X = \omega_0$. Затем Борст построил пример [53], показывающий, что неравенство $\dim Y \geq \alpha$ не является достаточным для того, чтобы компакт Y допускал существенное отображение на J^α . В той же статье [52] он получил исчерпывающие результаты, характеризующие размерность $\dim_2$ в терминах существенных отображений на компакты Хендерсона. Все эти результаты переносятся на размерность $\dim_{wm}$. Приводимые ниже утверждения о размерности $\dim_{wm}$ при $m = 2$ превращаются в теоремы Борста. Начнем мы с обобщения конструкции Хендерсона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. Фиксируем целое $m \geq 2$. Для всякого трансфинита $\alpha < \omega_1$ по индукции определим компакты J_m^α , семейства $\mathcal{C}_\alpha^m$, $\alpha \geq 1$, их замкнутых подмножеств и точки $p_\alpha = p_\alpha^m$ следующим образом.

- 0) $J_m^0 = \{p_0\}$.
- 1) $J_m^1 = T(m)$, $\mathcal{C}_1^m = \{J_m^1\}$, $p_1 = a_1$.
- 2) $J_m^{\alpha+1} = J_m^\alpha \times T(m)$, $\mathcal{C}_{\alpha+1}^m = \{C \times T(m) : C \in \mathcal{C}_\alpha^m\}$, $p_{\alpha+1} = p_\alpha \times \{a_1\}$.
- 3) Если α предельно, то для всякого $\beta < \alpha$ возьмем экземпляр A_α^β множества $T(m) \setminus \{a_2\}$, пересекающийся с J_m^β по концевой точке $a_1 = p_\beta$, и положим $J_m^\alpha = A(\bigoplus_{\beta < \alpha} J_m^\beta \cup A_\alpha^\beta)$ ($A(X)$ – александровская компактификация локально компактного пространства X). Далее, $\mathcal{C}_\alpha^m = \{i_\alpha^\beta(C) : C \in \mathcal{C}_\beta^m, \beta < \alpha\}$, а p_α – компактифицирующая точка. Здесь для каждого $\beta < \alpha$ через $i_\alpha^\beta = {}^m i_\alpha^\beta$ обозначено естественное вложение $J_m^\beta \rightarrow J_m^\alpha$.

Компакты J_m^α называются m -компактами Хендерсона, а элементы семейств $\mathcal{C}_\alpha^m$ – камерами компактов J_m^α . Камеры гомеоморфны компактам T_n и канонически замкнуты в J_m^α .

Компакты J_2^α совпадают с компактами Хендерсона J^α [60]. Определение компактов J_m^α можно распространить на все порядковые числа α .

ТЕОРЕМА 6.9. Для целых $k, m \geq 2$ и $\alpha < \omega_1$ имеем

$$\dim_{wk} J_m^\alpha = \dim_k J_m^\alpha = \text{Ind } J_m^\alpha = \text{Ind}_\infty J_m^\alpha = \alpha.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.10. Пусть d – один из размерностных инвариантов, указанных в теореме 6.9. Тогда

$$dJ_m^\alpha = dJ_{m+1}^\alpha = \alpha.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.11. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow J_m^\alpha$ называется *существенным*, если оно w -существенно на прообразе $f^{-1}(C)$ всякой камеры $C \in \mathcal{C}_\alpha^m$.

ТЕОРЕМА 6.12. Если X допускает существенное отображение в J_m^α , то $\dim_{wm} X \geq \alpha$.

Обратить эту теорему нельзя.

ПРИМЕР 6.13. Для каждого $m \geq 2$ существует компакт X_m размерности $\dim_{wm} X_m = \omega_0 + 1$, который не допускает существенного отображения в $J_m^{\omega_0+1}$.

Компакт X_2 построен Борстом (см. [52; пример 5.2.4]).

ТЕОРЕМА 6.14. Если $\dim_{wm} X \geq \alpha + 1$, то X допускает существенное отображение в J_m^α .

Для пространства X положим

$$\text{Ess}_m X = \sup\{\alpha < \omega_1 : X \text{ допускает существенное отображение в } J_m^\alpha\}.$$

Из теорем 6.12 и 6.14 получаем

$$\text{Ess}_m X \leq \dim_{wm} X \leq \text{Ess}_m X + 1. \quad (6.6)$$

ТЕОРЕМА 6.15. Если $\alpha < \omega_1$ – предельное число, то

$$\dim_{wm} X \geq \alpha \iff \text{Ess}_m X \geq \alpha.$$

ТЕОРЕМА 6.16. Пусть X – метризуемый компакт, C – канторово множество и $\alpha < \omega_1$. Тогда

$$\dim_{wm} X \geq \alpha \iff \text{Ess}_m(X \times C) \geq \alpha.$$

§ 7. Наследственно сильно бесконечномерные компакты

Приведем некоторые элементарные свойства существенности и несущественности по отношению к подпространству (см. определение 4.55). Все рассматриваемые пространства метризуемы и сепарабельны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X называется допустимым для X , если

- 1) $A \in \mathcal{A}, B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{A}$;
- 2) для всякого $A \in \mathcal{A}$ существует окрестность $OA \in \mathcal{A}$;
- 3) для дизъюнктивных открытых множеств $G_i \in \mathcal{A}, i \in \omega$, их объединение $\bigcup_i G_i$ принадлежит $\mathcal{A}$.

Всюду в этом параграфе $\mathcal{U} \subset \text{cov}_m(X)$ – счетное множество. Через $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ обозначим семейство всех подмножеств пространства X , на которых семейство $\mathcal{U}$ несущественно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Для сепарабельного метрического пространства X семейство $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ допустимо для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 7.1.1) очевидно. Проверим 7.1.2). Пусть $\mathcal{U} = \{u_i : i \in \omega\}$ и $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$. Поскольку $\mathcal{U}$ несущественно на A , существуют такие дизъюнктивные открытые семейства v_i , вписанные в u_i , что

$$A \subset V \equiv \bigcup \left\{ \bigcup v_i : i \in \omega \right\}.$$

Множество V и будет искомой окрестностью OA .

Теперь 7.1.3). Пусть $u_i = \{U_1^i, \dots, U_{k_i}^i\}$, а $\{G_j : j \in \omega\} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ – дизъюнктное открытое семейство. Для каждого j существует такое дизъюнктное открытое семейство $v_i^j = \{^jV_1^i, \dots, ^jV_{k_i}^i\}$, что

$$^jV_l^i \subset U_l^i \quad \text{и} \quad G_j \subset \bigcup_{i,l} ^jV_l^i.$$

Полагая $V_l^i = \bigcup_j (G_j \cap ^jV_l^i)$ и $v_i = \{V_1^i, \dots, V_{k_i}^i\}$, получаем дизъюнктные открытые семейства v_i , вписанные в u_i и удовлетворяющие условию

$$\bigcup_j G_j = \bigcup \left\{ \bigcup v_i : i \in \omega \right\}.$$

Предложение 7.2 доказано.

Последовательность множеств $Y_1, Y_2, \dots \subset X$ назовем *открыто-дискретной*, если у множеств Y_i существуют дизъюнктные окрестности G_i . Из предложения 7.2 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Если $\mathcal{U}$ несущественно на каждом элементе открыто-дискретного семейства $Y_1, Y_2, \dots \subset X$, то $\mathcal{U}$ несущественно на $\bigcup_i Y_i$.*

Для $Y \subset X$ полагаем

$$H_c(\mathcal{U}, Y) = \bigcup \{C : C \text{ – компонента множества } Y, \\ \text{на которой } \mathcal{U} \text{ несущественно}\};$$

$$H_q(\mathcal{U}, Y) = \bigcup \{Q : Q \text{ – квазикомпонента множества } Y, \\ \text{на которой } \mathcal{U} \text{ несущественно}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Если множество Y замкнуто в X , то $\mathcal{U}$ несущественно на $H_c(\mathcal{U}, Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – компонента Y , на которой $\mathcal{U}$ несущественно. По предложению 7.2 можно найти такое открыто-замкнутое в Y множество V_C , что $C \subset V_C$ и $\mathcal{U}$ несущественно на V_C . В покрытие $\{V_C : C \subset H_c(\mathcal{U}, Y)\}$ множества $H_c(\mathcal{U}, Y)$ можно вписать счетное открыто-замкнутое покрытие. Тогда $\mathcal{U}$ существенно на $H_c(\mathcal{U}, Y)$ согласно предложению 7.3.

Следующее утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. *Если $\mathcal{U}_i$ несущественно на Y_i , то $\bigcup_i \mathcal{U}_i$ несущественно на $\bigcup_i Y_i$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. *Пусть множество $Y \subset X$ открыто в $[Y]$. Тогда $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ несущественно на*

$$H_q(\mathcal{U}_1, Y) \cap H_q(\mathcal{U}_2, Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : [Y] \rightarrow [0, 1]$ – непрерывная функция с $Y = f^{-1}(0, 1]$. Положим $K_n = f^{-1}[1/(n+1); 1/n]$, $n = 1, 2, \dots$. Имеют место включения

$$H_q(\mathcal{U}_i, Y) \cap K_n \subset H_c(\mathcal{U}_i, K_n), \quad i = 1, 2. \quad (7.1)$$

В самом деле, пусть $x \in H_q(\mathcal{U}_i, Y) \cap K_n$. Тогда x принадлежит некоторой квазикомпоненте Q множества Y , на которой $\mathcal{U}_i$ существенно. Пусть теперь C – компонента множества K_n , содержащая точку x . Поскольку K_n замкнуто в Y , имеем $C \subset Q$. Итак, условие (7.1) проверено.

По предложению 7.4 семейство $\mathcal{U}_i$ несущественно на $H_c(\mathcal{U}_i, K_n)$. Значит, согласно предложению 7.3 $\mathcal{U}_1$ несущественно на $Y_1 = \bigcup \{H_c(\mathcal{U}_1, K_{2n-1}) : n \geq 1\}$, а $\mathcal{U}_2$ несущественно на $Y_2 = \bigcup \{H_c(\mathcal{U}_2, K_{2n}), n \geq 1\}$. По предложению 7.5 $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ несущественно на $Y_1 \cup Y_2$, а из (7.1) вытекает, что

$$H_q(\mathcal{U}_1, Y) \cap H_q(\mathcal{U}_2, Y) \subset Y_1 \cup Y_2.$$

Предложение 7.6 доказано.

ТЕОРЕМА 7.7. Пусть X – компакт и $\mathcal{U} \subset \text{cov}_m(X)$ – счетное семейство, существенное на X . Тогда существует такое открытое множество $G \subset X$, что $\mathcal{U}$ несущественно на G и для всякого множества $Y \subset X \setminus G$ положительной размерности существует бесконечное семейство $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, которое существенно на Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $\mathcal{U}$ в виде дизъюнктивной суммы бесконечных подсемейств:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{V}_2 \cup \dots.$$

Пусть $\mathcal{F}$ – счетное семейство непрерывных функций $X \rightarrow [0, 1]$, разделяющее точки X , а $\mathcal{K}$ – такое счетное семейство канторовых подмножеств отрезка $[0, 1]$, что каждый невырожденный интервал отрезка $[0, 1]$ содержит некоторое $K \in \mathcal{K}$. Запишем произведение $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$ в виде последовательности $(f_1, K_1), (f_2, K_2), \dots$.

Пусть $g_i: K_i \rightarrow \text{exp } X$ – непрерывная сюръекция. Положим $Y_i = \bigcup \{f_i^{-1}(t) \setminus g_i(t) : t \in K_i\} = f_i^{-1}(K_i) \setminus \bigcup \{f_i^{-1}(t) \cap g_i(t) : t \in K_i\}$. Множество $\bigcup \{f_i^{-1}(t) \cap g_i(t) : t \in K_i\}$ замкнуто в X и, следовательно, Y_i открыто в $[Y_i]$. По предложению 7.6 семейство $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{V}_i$ несущественно на $Z_i = H_q(\mathcal{U}_i, Y_i) \cap H_q(\mathcal{V}_i, Y_i)$. Значит, $\mathcal{U}$ несущественно на $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots$. По предложению 7.2 существует окрестность G множества Z , на которой $\mathcal{U}$ несущественно. Покажем, что G – искомое множество.

Пусть $Y \cap G = \emptyset$ и $\dim Y > 0$. Отображение $x \rightarrow (f(x))_{f \in \mathcal{F}}$ вкладывает X в $\prod_{f \in \mathcal{F}} f(X)$. Значит, Y вложено в $\prod_{f \in \mathcal{F}} f(Y)$. Поэтому $\dim f(Y) > 0$ для некоторого $f \in \mathcal{F}$. Следовательно, $f(Y)$ содержит невырожденный интервал и вместе с ним некоторое канторово множество $K \in \mathcal{K}$. Возьмем i , для которого $(f_i, K_i) = (f, K)$, и покажем, что либо $\mathcal{U}_i$, либо $\mathcal{V}_i$ существенно на Y .

Предположим, что это не так. Тогда по предложению 7.2 существует окрестность $V \supset Y$, на которой оба семейства $\mathcal{U}_i$ и $\mathcal{V}_i$ несущественны. Из сущестственности $\mathcal{U}$ на X вытекает, что $X \setminus V \neq \emptyset$. Следовательно, существует такое $t \in K_i$, что $g_i(t) = X \setminus V$. Положим $D_i = f_i^{-1}(t) \setminus g_i(t)$. Очевидно, что $D_i = \bigcap \{f_i^{-1}(U) \cap Y_i : U \text{ содержит } t \text{ и открыто-замкнуто в } K_i\}$.

Множества $f_i^{-1}(U) \cap Y_i$ открыто-замкнуты в Y_i . Следовательно, всякая квазикомпонента множества Y_i , пересекающаяся с D_i , содержится в D_i . Семейства $\mathcal{U}_i$ и $\mathcal{V}_i$ несущественны на D_i , так как $D_i \subset V$. Значит, $D_i \subset H_q(\mathcal{U}_i, Y_i) \cap$

$H_q(\mathcal{Y}_i, Y_i)$, т.е. $D_i \subset Z_i$. Поскольку $f_i(Y) \supset K_i$, множество D_i пересекается с Y . Тогда, тем более, $Z_i \cap Y \neq \emptyset$. Но это противоречит тому, что $Y \cap G = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 7.8. *Предположим, что компакт X не является m - C -пространством. Тогда X содержит такой компакт $Z \notin m$ - C , что никакое множество $Y \subset Z$ положительной размерности не является m - C -пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $X \notin m$ - C , существует множество $\mathcal{U}_0 = \{u_0, u_1, \dots\} \subset \text{cov}_m(X)$, существенное на X . Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \setminus \{u_0\}$. Семейство $\mathcal{U}$ также существенно на X . Возьмем открытое множество $G \subset X$, удовлетворяющее теореме 7.7, и положим $Z = X \setminus G$. Нам надо показать только, что $\dim Z > 0$. Предположим, что $\dim Z \leq 0$. Пусть $u_0 = \{U_1^0, \dots, U_k^0\}$. Существует дизъюнктное открытое семейство $v_0 = \{V_1^0, \dots, V_k^0\}$, вписанное в u_0 и покрывающее Z . Положим $F = X \setminus V_1^0 \cup \dots \cup V_k^0$. Поскольку $F \subset G$ и $\mathcal{U}$ несущественно на G , существуют такие дизъюнктные открытые семейства v_i , вписанные в u_i , $i = 1, 2, \dots$, что $F \subset \bigcup\{\bigcup v_i : i \geq 1\}$. Тогда семейство $\bigcup\{v_i : i \geq 0\}$ является покрытием X , что противоречит существенности $\mathcal{U}$ на X . Теорема 7.8 доказана.

Теорема 7.7 для $m = 2$ и $m = \infty$ доказана М. Левиным [62]. Теорему 7.8 для $m = 2$ получил Л. Рубин [63] после того, как Дж. Уолш [64] построил первый пример наследственно бесконечномерного пространства. Для $m = \infty$ и замкнутых Y теорему 7.8 доказал Р. Поль [65]. Первым же, кто доказал теорему типа 7.8, был А. В. Зарелуа: $m = 2$, а Y замкнуто [66].

Так же, как и теорема 7.8, доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.9. *Предположим, что компакт X не является w - m - C -пространством. Тогда X содержит такой компакт $Z \notin w$ - m - C , что никакое множество $Y \subset Z$ положительной размерности не является w - m - C -пространством.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.10. Если сильно бесконечномерные пространства назвать 2-сильно бесконечномерными, то по аналогии возникают m (w - m)-сильно бесконечномерные пространства. Поэтому теоремы 7.8 и 7.9 можно сформулировать так:

во всяком m (w - m)-сильно бесконечномерном компакте содержится наследственно m (w - m)-сильно бесконечномерный компакт.

Добавление. Промежуточные размерности бикомпактов

Всякий метризуемый бикомпакт X конечной размерности $\dim X > 0$ содержит одномерные континуумы. То же самое относится и к бикомпактам, трансфинитные размерности ind и Ind которых определены. Из результатов §7 вытекает, что всякий метризуемый компакт X , не являющийся C -пространством, содержит бесконечномерный компакт Z , не имеющий подпространств конечной положительной размерности. В частности, слабо бесконечномерный компакт Борста E_{ω_0} из [8] содержит компакт Z_0 , не имеющий подпространств конечной положительной размерности. Будучи слабо бесконечномерным, компакт Z_0 имеет трансфинитную размерность $\dim_2 Z_0 = \alpha < \omega_1$, но не содержит компактов Y размерности $\dim_2 Y = \dim Y = 1$.

ВОПРОС А.1. Существует ли бесконечномерный метризуемый C -компакт X , не содержащий подкомпактов Y размерности $0 < \dim_\infty Y < \dim_\infty X$?

Более слабой версией этого вопроса является

ВОПРОС А.2. Существует ли бесконечномерный метризуемый C -компакт X , не содержащий одномерных континуумов?

Возникает следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.3. Пусть d – размерностный инвариант, принимающий конечные или трансфинитные значения. Для пространства X полагаем

$$d\text{-sc}(X) = \{\alpha : \exists \text{ замкнутое } F \subset X \text{ размерности } d(F) = \alpha\}.$$

Множество $d\text{-sc}(X)$ называется d -шкалой пространства X . Если

$$d\text{-sc}(X) = \{\alpha : \alpha \leq d(X)\},$$

то d -шкала $d\text{-sc}(X)$ называется *элементарной*. d -шкала $d\text{-sc}(X)$ называется *сложной*, если она не элементарна и $1 \in d\text{-sc}(F)$ для всякого замкнутого множества $F \subset X$ размерности $d(F) \geq 1$. Условившись, что $\dim X = \omega_0$, если $\dim X = \infty$, отнесем к числу функций d и лебегову размерность. *Шкалой* пространства X называется его $\dim$ -шкала $\dim\text{-sc}(X) \equiv \text{sc}(X)$.

Компакт Хендерсона [67] является первым примером метризуемого компакта с неэлементарной шкалой. Бикомпакт без промежуточных размерностей из [68] – первый пример конечномерного бикомпакта с неэлементарной шкалой.

ВОПРОС А.4. Существует ли метризуемый компакт со сложной шкалой?

ЗАМЕЧАНИЕ А.5. Из теоремы 7.8 ($m = \infty$) вытекает, что метризуемый компакт со сложной шкалой обязан быть C -пространством. Теорема А.8 показывает, что для неметризуемых бикомпактов это не так.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.6. Шкала $\text{sc}(X)$ называется *устойчивой*, если $\text{sc}(X) = \text{sc}(F)$ для всякого замкнутого множества $F \subset X$ размерности $\dim F = \dim X$. Шкала $\text{sc}(X)$ называется *монотонно устойчивой*, если

$$\text{sc}(F) = [-1; \dim(F)] \cap \text{sc}(X)$$

для всякого замкнутого множества $F \subset X$.

ТЕОРЕМА А.7. Для всякого множества $s \subset [1; \omega_0]$, содержащего -1 и 0 , существует C -бикомпакт $X(s)$ с первой аксиомой счетности, для которого s является монотонно устойчивой шкалой.

ТЕОРЕМА А.8. Для всякого множества $s \subset [1; \omega_0]$, содержащего -1 , 0 и ω_0 , существует сильно бесконечномерный бикомпакт $Y(s)$ с первой аксиомой счетности, для которого s является монотонно устойчивой шкалой и всякое несчетномерное замкнутое подмножество которого сильно бесконечномерно.

ТЕОРЕМА А.9 (СН). Для всякого множества $s \subset [-1, \omega_0]$, содержащего -1 и 0 , существует совершенно нормальный C -бикомпакт $X_0(s)$, для которого s является монотонно устойчивой шкалой.

ТЕОРЕМА А.10 (СН). Для всякого множества $s \subset [-1, \omega_0]$, содержащего -1 , 0 и ω_0 , существует совершенно нормальный сильно бесконечномерный бикомпакт $Y_0(s)$, для которого s является монотонно устойчивой шкалой и всякое несчетномерное замкнутое подмножество которого сильно бесконечномерно.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Как отмечено во введении, статья не является полным обзором теории слабо бесконечномерных пространств. Однако мы приводим список дополнительной литературы [69]–[102], который позволит читателю более обстоятельно ознакомиться с рассматриваемой тематикой.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. С применением теоремы 6.4 автор недавно доказал, что класс S - w - ∞ - C совпадает с классом S -wid.

Список литературы

- [1] П. С. Александров, “О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **6** (1942), 227–282.
- [2] А. Н. Дранишников, “Гомологическая теория размерности”, *УМН*, **43:4** (1988), 11–55; англ. пер.: A. N. Dranishnikov, “Homological dimension theory”, *Russian Math. Surveys*, **43:4** (1988), 11–63.
- [3] П. С. Александров, “Предисловие к русскому переводу”, в кн.: В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948.
- [4] Б. Т. Левшенко, “О сильно бесконечномерных пространствах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех., astron., физ., хим.*, 1959, № 5, 219–228.
- [5] Е. Г. Скляренко, “О размерностных свойствах бесконечномерных пространств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23** (1959), 197–212.
- [6] D. W. Henderson, “Each strongly infinite-dimensional compactum contains a hereditarily infinite-dimensional compact subset”, *Amer. J. Math.*, **89:1** (1967), 122–123.
- [7] R. Pol, “A weakly infinite-dimensional compactum which is not countable-dimensional”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **82:4** (1981), 634–636.
- [8] P. Borst, *A weakly infinite-dimensional compactum not having Property C*, Preprint, Vrije Universiteit, Amsterdam, 2005; *Fund. Math.* (to appear).
- [9] W. E. Haver, “A covering property for metric spaces”, *Topology conference* (Blackburg, VA, 1973), *Lecture Notes in Math.*, **375**, Springer, Berlin, 1974, 108–113.
- [10] D. F. Addis, J. H. Gresham, “A class of infinite-dimensional spaces. I. Dimension theory and Alexandroff’s problem”, *Fund. Math.*, **101:3** (1978), 195–205.
- [11] F. D. Ancel, “Proper hereditary shape equivalences preserve property C ”, *Topology Appl.*, **19:1** (1985), 71–74.
- [12] V. Gutev, V. Valov, “Continuous selections and C -spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130:1** (2002), 233–242.
- [13] V. V. Uspenskij, “A selection theorem for C -spaces”, *Topology Appl.*, **85:1–3** (1998), 351–374.
- [14] V. Valov, “Continuous selections and finite C -spaces”, *Set-Valued Anal.*, **10:1** (2002), 37–51.
- [15] В. В. Федорчук, “О некоторых классах слабо бесконечномерных пространств”, *Фундам. и прикл. матем.* (в печати).

- [16] V. V. Fedorchuk, “Questions on weakly infinite-dimensional spaces”, *Open problems in topology II*, ed. E. M. Pearl, Elsevier, Amsterdam, 2007 (to appear).
- [17] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности*, Наука, М., 1973.
- [18] R. Engelking, *Theory of dimensions, finite and infinite*, Sigma Ser. Pure Math., **10**, Heldermann, Lemgo, 1995.
- [19] R. Pol, H. Toruńczyk, “Topics in dimension theory”, *Recent progress in general topology, II* (Prague, Czech Republic, 2001), eds. M. Hušek, J. van Mill, Elsevier, Amsterdam, 2002, 395–421.
- [20] P. Urysohn, “Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes”, *Fund. Math.*, **7** (1925), 30–137.
- [21] W. Hurewicz, “Über unendlich-dimensionale Punktmengen”, *Proc. Akad. Amsterdam*, **31** (1928), 916–922.
- [22] Ю. М. Смирнов, “Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23** (1959), 185–196.
- [23] В. В. Федорчук, “О некоторых вопросах топологической теории размерности”, *УМН*, **57:2** (2002), 139–178; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “On some problems of topological dimension theory”, *Russian Math. Surveys*, **57:2** (2002), 361–398.
- [24] Б. А. Пасынков, В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, “Теория размерности”, *Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия*, **17**, ВИНТИ, М., 1979, 229–306; англ. пер.: B. A. Pasynkov, V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov, “Dimension theory”, *J. Sov. Math.*, **18** (1982), 789–841.
- [25] P. Urysohn, “Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (suite)”, *Fund. Math.*, **8** (1926), 225–359.
- [26] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.
- [27] W. E. Haver, “Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **40:1** (1973), 280–284.
- [28] R. H. Bing, “Metrisation of topological spaces”, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 175–186.
- [29] K. Nagami, “Paracompactness and strong screenability”, *Nagoya Math. J.*, **8** (1955), 83–88.
- [30] P. A. Ostrand, “Covering dimension in general spaces”, *General Topology and Appl.*, **1:3** (1971), 209–221.
- [31] В. А. Чатырко, “Слабо бесконечномерные пространства”, *УМН*, **46:3** (1991), 161–177; англ. пер.: V. A. Chatyrko, “Weakly infinite-dimensional spaces”, *Russian Math. Surveys*, **46:3** (1991), 191–210.
- [32] М. Катетов, “О продолжении локально конечных покрытий”, *Colloq. Math.*, **6** (1958), 145–151.
- [33] C. H. Dowker, “Homotopy extension theorems”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **6:1** (1956), 100–116.
- [34] E. Michael, “Point-finite and locally finite coverings”, *Canad. J. Math.*, **7** (1955), 275–279.
- [35] В. В. Федорчук, “Бесконечномерные бикомпакты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:5** (1978), 1162–1178; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “Infinite-dimensional compact Hausdorff spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **13:2** (1979), 445–460.
- [36] L. A. Steen, “A direct proof that a linearly ordered space is hereditarily collectionwise normal”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24:4** (1970), 727–728.
- [37] Н. Хаджииванов, “О бесконечномерных пространствах”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **19** (1971), 491–500.
- [38] L. Polkowski, “Some theorems on invariance of infinite dimension under open and closed mappings”, *Fund. Math.*, **119:1** (1983), 11–34.

- [39] K. Morita, "On the dimension of normal spaces. II", *J. Math. Soc. Japan*, **2** (1950), 16–33.
- [40] Б. Т. Левшенко, "О бесконечномерных пространствах", *Докл. АН СССР*, **139**:2 (1961), 286–289; англ. пер.: B. T. Levšenko, "On infinite dimensional spaces", *Soviet Math. Dokl.*, **2**, 915–918.
- [41] А. В. Зарелуа, "О теореме Гуревича", *Докл. АН СССР*, **14**:4 (1961), 777–780; англ. пер.: A. V. Zarelua, "On a theorem of Hurewicz", *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 1534–1537.
- [42] Ю. М. Смирнов, "О трансфинитной размерности", *Матем. сб.*, **58(100)**:4 (1962), 415–422.
- [43] А. И. Вайнштейн, "Об одном классе бесконечномерных пространств", *Матем. сб.*, **79(121)**:3(7) (1969), 433–443; англ. пер.: A. I. Vainšteĭn, "On a class of infinite-dimensional spaces", *Math. USSR-Sb.*, **8**:3 (1969), 409–418.
- [44] Y. Hattori, K. Yamada, "Closed pre-images of C -spaces", *Math. Japon.*, **34**:4 (1989), 555–561.
- [45] В. В. Федорчук, "Вполне замкнутые отображения и их приложения", *Фундам. и прикл. матем.*, **9**:4 (2003), 105–235; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, "Fully closed mappings and their applications", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **136**:5 (2006), 4201–4292.
- [46] Е. Г. Скляренко, "Две теоремы о бесконечномерных пространствах", *Докл. АН СССР*, **143** (1962), 1053–1056; англ. пер.: E. G. Sklyarenko, "Two theorems on infinite-dimensional spaces", *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 547–550.
- [47] R. Pol, "On classification of weakly infinite-dimensional compacta", *Fund. Math.*, **116**:3 (1983), 169–188.
- [48] P. Borst, "Classification of weakly infinite-dimensional spaces. I. A transfinite extension of the covering dimension", *Fund. Math.*, **130**:1 (1988), 1–25.
- [49] В. А. Чатырко, "Классификация компактов со свойством C ", *Сиб. матем. журн.*, **33**:6 (1992), 216–220; англ. пер.: V. A. Chatyrko, "Classification of compacta with the property C ", *Siberian Math. J.*, **33**:6 (1992), 1144–1148.
- [50] K. Kuratowski, *Topology*, vol. I, Academic Press, New York–London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1966; рус. пер.: К. Куратовский, *Топология*, т. I, Мир, М., 1966.
- [51] P. Borst, "Some remarks concerning C -spaces", *Topology Appl.*, **154**:3 (2007), 665–674.
- [52] P. Borst, "Classification of weakly infinite-dimensional spaces II. Essential mappings", *Fund. Math.*, **130**:2 (1988), 73–99.
- [53] K. Yokoi, "Compactification and factorization theorems for transfinite covering dimension", *Tsukuba J. Math.*, **15**:2 (1991), 389–395.
- [54] V. A. Chatyrko, "On the transfinite dimension $\dim$ ", *Questions Answers Gen. Topology*, **9**:2 (1991), 177–194.
- [55] V. A. Chatyrko, "Classification of metric compacta with property C ", *Questions Answers Gen. Topology*, **10**:1 (1992), 51–62.
- [56] V. A. Chatyrko, "On factorization theorem for transfinite dimension $\dim_C$ ", *Sci. Math.*, **3**:3 (2000), 357–366.
- [57] R. Engelking, R. Pol, "Compactifications of countable-dimensional and strongly countable-dimensional spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:3 (1988), 985–987.
- [58] Б. А. Пасынков, "О размерности нормальных пространств", *Докл. АН СССР*, **201**:5 (1971), 1049–1052; англ. пер.: B. A. Pasynkov, "On the dimension of normal spaces", *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1784–1787.
- [59] C. H. Dowker, "Local dimension of normal spaces", *Q. J. Math.*, **6**:1 (1955), 101–120.
- [60] D. W. Henderson, "A lower bound for transfinite dimension", *Fund. Math.*, **63** (1968), 167–173.

- [61] P. Borst, J. J. Dijkstra, “Essential mappings and transfinite dimension”, *Fund. Math.*, **125**:1 (1985), 41–45.
- [62] M. Levin, “Inessentiality with respect to subspaces”, *Fund. Math.*, **147**:1 (1995), 93–98.
- [63] L. R. Rubin, “Hereditarily strongly infinite dimensional spaces”, *Michigan Math. J.*, **27**:1 (1980), 65–73.
- [64] J. J. Walsh, “Infinite dimensional compacta containing no n -dimensional ($n \geq 1$) subsets”, *Topology*, **18**:1 (1979), 91–95.
- [65] R. Pol, “On light mappings without perfect fibers on compacta”, *Tsukuba J. Math.*, **20**:1 (1996), 11–19.
- [66] A. В. Зарелуа, “Построение сильно бесконечномерных компактов с помощью колец непрерывных функций”, *Докл. АН СССР*, **214** (1974), 264–267; англ. пер.: A. V. Zarelua, “Construction of strongly infinite-dimensional compacta using rings of continuous functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **15** (1974), 106–110.
- [67] D. W. Henderson, “Finite dimensional subsets of infinite dimensional spaces”, *Topology Seminar* (Wisconsin, 1965), Ann. of Math. Stud., **60**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1966, 141–146.
- [68] В. В. Федорчук, “Бикомпакты без промежуточных размерностей”, *Докл. АН СССР*, **213** (1973), 795–797; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “Bicompact spaces without intermediate dimensions”, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1973), 1808–1811.
- [69] F. D. Ancel, “The role of countable dimensionality in the theory of cell-like relations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **287**:1 (1985), 1–40.
- [70] P. Borst, “Spaces having a weakly-infinite-dimensional compactification”, *Topology Appl.*, **21**:3 (1985), 261–268.
- [71] P. Borst, “On weakly infinite-dimensional subspaces”, *Fund. Math.*, **140**:3 (1992), 225–235.
- [72] V. A. Chatyrko, “On the transfinite dimension $\dim$ and essential mappings”, *Topology Proc.*, **20** (1995), 67–73.
- [73] A. Chigogidze, V. Valov, “The extension dimension and C -spaces”, *Bull. London Math. Soc.*, **34**:6 (2002), 708–716.
- [74] М. М. Чобан, “Отображения и размерностные свойства пространств”, *Топология*, Тр. МИАН, **154**, Наука, М., 1983, 296–305; англ. пер.: М. М. Choban, “Mappings and dimension properties of spaces”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **154** (1984), 317–326.
- [75] A. N. Dranishnikov, “Stable cohomotopy dimension and weakly infinite dimensional spaces”, *Topology Appl.*, **47**:1 (1992), 79–81.
- [76] R. Engelking, *General topology*, Sigma Ser. Pure Math., **6**, Heldermann, Berlin, 1989.
- [77] В. В. Федорчук, “Формула Гуревича для слабо бесконечномерных вполне замкнутых отображений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, № 4, 54–55.
- [78] D. J. Garity, “Property C and closed maps”, *Topology Appl.*, **26**:2 (1987), 125–130.
- [79] D. J. Garity, D. M. Rohm, “Property C , refinable maps and dimension raising maps”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98**:2 (1986), 336–340.
- [80] J. H. Gresham, “A class of infinite-dimensional spaces. II. An extension theorem and the theory of retracts”, *Fund. Math.*, **107**:3 (1980), 237–245.
- [81] N. G. Hadziivanov, “A lower bound for the cardinal dimension of certain G_δ sets in Tychonoff cube”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **28** (1975), 151–152.
- [82] M. Levin, “A short construction of hereditarily infinite dimensional compacta”, *Topology Appl.*, **65**:1 (1995), 97–99.
- [83] M. Levin, J. T. Rogers, “A generalization of Kelley’s theorem for C -spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:5 (2000), 1537–1541.

- [84] А. Лелек, “О размерности наростов при компактных расширениях”, *Докл. АН СССР*, **160** (1965), 534–537; англ. пер.: A. Lelek, “On the dimension of remainders in compact extensions”, *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 136–140.
- [85] И. М. Лейбо, “О замкнутых отображениях бесконечно-мерных пространств”, *Докл. АН СССР*, **199** (1971), 533–535; англ. пер.: I. M. Leibo, “On closed mappings of infinite-dimensional spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1111–1113.
- [86] M. Levin, L. R. Rubin, P. J. Schapiro, “The Mardešić factorization theorem for extension theory and C -separation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:10 (2000), 3099–3106.
- [87] E. Pol, “A weakly infinite-dimensional space whose product with the irrationals is strongly infinite-dimensional”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98**:2 (1986), 349–352.
- [88] E. Pol, “Spaces whose n th power is weakly infinite-dimensional but whose $(n+1)$ th power is not”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117**:3 (1993), 871–876.
- [89] R. Pol, “A remark on A -weakly infinite-dimensional spaces”, *Topology Appl.*, **13**:1 (1982), 97–101.
- [90] R. Pol, “Countable dimensional universal sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **297**:1 (1986), 255–268.
- [91] R. Pol, “Selected topics related to countable-dimensional metrizable spaces”, *General topology and its relations to modern analysis and algebra*, VI (Prague, 1986), Res. Exp. Math., **16**, Heldermann, Berlin, 1988, 421–436.
- [92] L. Polkowski, “A sum theorem for A -weakly infinite-dimensional spaces”, *Fund. Math.*, **119**:1 (1983), 7–10.
- [93] T. Radul, “Absorbing spaces for C -compacta”, *Topology Appl.*, **83**:2 (1998), 127–133.
- [94] D. M. Rohm, “Products of infinite-dimensional spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **108**:4 (1990), 1019–1023.
- [95] L. R. Rubin, “Noncompact hereditarily strongly infinite dimensional spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**:1 (1980), 153–154.
- [96] L. R. Rubin, R. M. Schori, J. J. Walsh, “New dimension-theory techniques for constructing infinite-dimensional examples”, *General Topology Appl.*, **10**:1 (1979), 93–102.
- [97] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36**:3 (1981), 3–62; англ. пер.: E. V. Shchepin, “Functors and uncountable powers of compacta”, *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 1–71.
- [98] J. Segal, T. Watanabe, “Universal maps and infinite-dimensional spaces”, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **39**:3–4 (1991), 225–228.
- [99] Е. Г. Склиаренко, “Несколько замечаний о бесконечномерных пространствах”, *Докл. АН СССР*, **126** (1959), 1203–1206.
- [100] V. V. Uspenskij, “A note on question of R. Pol concerning light maps”, *Topology Appl.*, **103**:3 (2000), 291–294.
- [101] K. Yamada, “Mapping and product theorems for infinite-dimensional spaces”, *Glas. Mat. Ser. III*, **23**(43):1 (1988), 193–202.
- [102] А. В. Зарелуа, “О наследственно бесконечномерных пространствах”, *Theory of sets and topology*, in honour of Felix Hausdorff, 1868–1942, VEB Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1972, 509–525.

В. В. Федорчук (V. V. Fedorchuk)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: fedorch@tsi.ru

Поступила в редакцию

25.08.2006