Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Попов, Снова об одной конструкции модулей над кольцом многочленов,
УМН, 2003, том 58, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:31:53

СНОВА ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ МОДУЛЕЙ НАД КОЛЬЦОМ МНОГОЧЛЕНОВ

О. Н. Попов

В работе [1] мы рассматривали следующую конструкцию модулей над кольцом многочленов. Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра с 1 над полем $\mathbb{k}$ с базисом $e_1, \dots, e_d$, а $\rho: A \rightarrow M_n(\mathbb{k})$ – ее матричное представление, отвечающее A -модулю M , $\dim_{\mathbb{k}} M = n$. Зададим натуральное $l > 1$ и рассмотрим кольцо многочленов $R = \mathbb{k}[x_{11}, \dots, x_{dl}]$ и модуль $F_l(M)$ над ним, являющийся фактормодулем свободного R -модуля R^n по подмодулю, порожденному столбцами матриц $\text{Id}_j = \sum_i \rho(e_i)x_{ij}$, $j = 1, \dots, l$.

В работе исследовался вопрос, когда получающиеся модули над кольцом многочленов – коэн-маколеевы, и устанавливалось [1; теорема 1, следствие 1], что если алгебра A имеет вид $A = \bigoplus_i S_i \otimes_{Z(S_i)} K_i$, где S_i – простые алгебры над $\mathbb{k}$, $Z(S_i)$ – их центры, а K_i – конечномерные коммутативные алгебры над соответствующими $Z(S_i)$, то все неразложимые A -модули переходят в коэн-маколеевы R -модули, а если при этом $\dim_{Z(S_i)} S_i = n^2$ для всех i , то и все A -модули переходят в коэн-маколеевы.

В теореме 2 показывалось, что над совершенным полем $\mathbb{k}$ указанное выше достаточное условие коэн-маколеевости всех модулей $F_l(M)$ является и необходимым, и ставился вопрос, верно ли это для условия коэн-маколеевости образов неразложимых модулей. В настоящей работе мы даем положительный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА. Пусть поле $\mathbb{k}$ совершенно и алгебра A такова, что для некоторого $l > 1$ для любого конечномерного неразложимого A -модуля M модуль $F_l(M)$ коэн-маколеев. Тогда A является прямой суммой указанного выше вида.

Доказательство является незначительной модификацией доказательства теоремы 2 в [1].

ЛЕММА 1 (ср. [1; лемма 2.3]). Пусть $\overline{\mathbb{k}}$ – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{k}$, A – конечномерная $\mathbb{k}$ -алгебра и $\overline{A} = A \otimes_{\mathbb{k}} \overline{\mathbb{k}}$. Тогда если A удовлетворяет условиям теоремы, то и $\overline{A}$ также им удовлетворяет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 2.3 в [1] (случай Т-алгебр) известно, что любой $\overline{A}$ -модуль является прямым слагаемым $\overline{A}$ -модуля, полученного из некоторого A -модуля расширением скаляров. При этом если $\overline{A}$ -модуль неразложим, то и соответствующий A -модуль можно взять неразложимым, так как по теореме Крулля–Шмидта множество неразложимых модулей, входящих в разложение модуля, полученного расширением скаляров из некоторой прямой суммы, есть объединение соответствующих множеств для слагаемых. Так как для неразложимого A -модуля $F_l^A(M)$ коэн-маколеев, то таков и образ нашего $\overline{A}$ -модуля, аналогично тому, как это делалось в указанном выше месте доказательства леммы 2.3.

ЛЕММА 2 (ср. [1; лемма 2.4]). Пусть

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0 \quad (1)$$

– нерасщепляемая точная последовательность (ТП) A -модулей, где M и P – неизоморфные простые модули, а основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто. Тогда $F_l(N)$ – не коэн-маколеев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим размерности A -модулей над $\mathbb{k}$ соответствующими маленькими латинскими буквами. Согласно доказательству леммы 2.4 из [1], если в этой ситуации выбрать в N $\mathbb{k}$ -базис, согласованный с композиционным рядом (1), то $F_l(N)$ имеет вид

$$F_l(N) = R^n \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle,$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00468).

где A, B, C – матрицы из различных независимых переменных размеров $m \times lm, m \times lp, p \times lp$ соответственно. Рассмотрим в матрице $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ подматрицу D , состоящую из $m + lp$ последних столбцов. Тогда идеал максимальных миноров матрицы D имеет максимально возможную высоту $(m + lp) - (m + p) + 1 = (l - 1)p + 1$, поскольку можно задать такой порядок на мономах (упорядочить переменные лексикографически по паре индексов матричного элемента и взять от этого $\deglex$), что старший член любого минора будет состоять из произведения переменных по главной диагонали (которое в D ненулевое для всех максимальных миноров), так что старшие члены будут зависеть от непересекающихся наборов переменных и образовывать регулярную последовательность длины $(l - 1)p + 1$, так что и сами миноры будут образовывать такую последовательность.

Значит, размерность Крулля модуля $F_l(N)$ не превосходит $\dim R - (l - 1)p - 1$, что равно размерности Крулля модуля $F_l(P) = R^p / \langle C \rangle$, как известно из [2]. Так как ковариантный функтор $F_l(\cdot)$ точен справа [1; начало § 1], то размерность Крулля $F_l(N)$ не менее таковой для $F_l(P)$ и, значит, равна $(l - 1)p + 1$. Рассмотрим в $F_l(N)$ подмодуль, порожденный первыми m базисными векторами. Тогда в его аннуляторе помимо указанной выше регулярной последовательности длины $(l - 1)p + 1$ лежит и минор из первых m столбцов матрицы A , который не имеет общих переменных с элементами этой регулярной последовательности, так как они могут зависеть лишь от элементов последних m столбцов матрицы A , которая имеет $lm \geq 2m$ столбцов. Так что размерность Крулля этого подмодуля строго меньше $\dim R - (l - 1)p - 1$, и его глубина также меньше этого числа, равного глубине $F_l(P)$ [2]. Тогда из поведения глубины в коротких точных последовательностях [3; гл. 4, А.4, предложение 6 и далее] получаем, что и глубина $F_l(N)$ меньше его размерности Крулля, так что он не коэн-маколеев.

Из доказанной леммы следует, что в условиях теоремы разные простые модули над $\bar{A}$ не образуют нетривиальных расширений. Отсюда в [1] выводится, что это верно и над A , а затем – что при разложении алгебры A в прямую сумму неразложимых алгебр над каждым слагаемым имеется единственный простой модуль. Заметим, как в [1; конец п. 2.2], что так как неразложимый модуль над A является модулем над одним из слагаемых и конструкция F_l от него над слагаемым отличается лишь меньшим числом переменных в R (при той же самой матрице), то каждое из слагаемых удовлетворяет условиям теоремы. Докажем, что верно даже большее:

ЛЕММА 3 (ср. [1; предложение 2.6]). *В условиях теоремы для неразложимой алгебры A $F_l(M)$ коэн-маколеев для любого A -модуля M .*

В [1] такие алгебры назывались Т-алгебрами.

Эта лемма следует из того, что прямая сумма коэн-маколеевых модулей одинаковой размерности Крулля коэн-маколеева (коэн-маколеевость – это равенство размерности Крулля и глубины, о поведении которых в коротких точных последовательностях см. [3; гл. III, Б.1, гл. I, В.1, предложение 10] и [3; гл. 4, А.4, предложение 6 и далее]), а размерность Крулля $F_l(M)$ такая же, как и для образа простого модуля (единственного по доказанному выше), что легко выводится индукцией по длине из точности справа функтора $F_l(\cdot)$.

Таким образом, мы свели нашу теорему к теореме 2 о Т-алгебрах, доказанной в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Н. Попов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 115–134. [2] W. Bruns, U. Vetter. Determinantal Rings. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Math. V. 1327.) [3] Ж.-П. Серр // Математика. Сб. перев. 1963. Т. 7. № 5. С. 3–93.