Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Селиванов, О заменах времени для процессов Леви, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:24:03

О ЗАМЕНАХ ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

А. В. СЕЛИВАНОВ

В данной заметке рассматривается следующая задача. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ заданы процесс Леви Z и неотрицательный неубывающий càdlàg процесс τ , независимый с Z . Положим $X := Z \circ \tau$, т.е. $X_t = Z_{\tau_t}$, $t \geq 0$. Поставим вопрос о локальной абсолютной непрерывности меры $\tilde{P} := \text{Law}(X_t, t \geq 0)$ относительно меры $P := \text{Law}(Z_t, t \geq 0)$. Эти меры считаем заданными на пространстве Скорохода $D(\mathbb{R}_+)$ с канонической фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Если Z не является составным пуассоновским процессом, то, как вытекает из [1; 30.1, 33.1] и [2; теорема 2], в нетривиальной ситуации нельзя ожидать свойства локальной абсолютной непрерывности меры $\tilde{P}$ относительно P . Далее, легко показать, что если τ — детерминированный не абсолютно непрерывный процесс, то $\tilde{P}^{\text{loc}} \not\ll P$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Z — составной пуассоновский процесс, τ абсолютно непрерывен. Тогда $\tilde{P}^{\text{loc}} \ll P$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Z — составной пуассоновский процесс с мерой Леви ν , τ абсолютно непрерывен, $\tau_t = \int_0^t a_s ds$. Тогда компенсатор процесса $Z \circ \tau$ относительно фильтрации $\mathcal{F}_t^{Z \circ \tau} := \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(Z_{\tau_s}, 0 \leq s \leq t + \varepsilon)$ имеет вид $\mathbb{E}(a_t \mid \mathcal{F}_t^{Z \circ \tau})(\omega) dt \nu(dx)$ с измеримой по паре (t, ω) версией условного математического ожидания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование измеримой по паре (t, ω) версии $\mathbb{E}(a_t \mid \mathcal{F}_t^{Z \circ \tau})(\omega)$ доказано в [3], [4]. Обозначим меру $\mathbb{E}(a_t \mid \mathcal{F}_t^{Z \circ \tau})(\omega) dt \nu(dx)$ через $\eta(\omega; dt, dx)$. Покажем, что η — предсказуемая мера. Действительно, для любого $t \geq 0$ и любой неотрицательной предсказуемой функции $W(\omega, t, x)$

$$(W * \eta)_t(\omega) = \int_{(0, t] \times \mathbb{R}} W(\omega, s, x) \eta(\omega; ds, dx) = \int_{(0, t]} \left[\int_{\mathbb{R}} W(\omega, s, x) \nu(dx) \mathbb{E}(a_s \mid \mathcal{F}_s^{Z \circ \tau})(\omega) \right] ds,$$

если интегралы конечны. В этом случае выражение в квадратных скобках $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}_s^{Z \circ \tau})$ -измеримо, а $(W * \eta)_t$ имеет непрерывные траектории, что влечет предсказуемость меры η .

Далее, обозначим через μ меру скачков процесса $Z \circ \tau$:

$$\mu(\omega; dt, dx) := \sum_{s \geq 0} I(\Delta Z_{\tau_s} \neq 0) \delta_{(s, \Delta Z_{\tau_s})}(dt, dx).$$

Проверим, что

$$\mathbb{E}(W * \mu)_{\infty} = \mathbb{E}(W * \eta)_{\infty} \tag{1}$$

для всякой неотрицательной предсказуемой функции $W = W(\omega; t, x)$. В силу теоремы о монотонных классах достаточно рассмотреть функции W вида $W(\omega; t, x) = I_{(u, v] \times B}(t, x) f((Z \circ \tau)_{u_1}, \dots, (Z \circ \tau)_{u_n})$, где $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u < v$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ — борелевская функция. Тогда

$$\mathbb{E}(W * \mu)_{\infty} = \mathbb{E}f((Z \circ \tau)_{u_1}, \dots, (Z \circ \tau)_{u_n}) \sum_{u < s \leq v} I(\Delta Z_{\tau_s} \neq 0) I(\Delta Z_{\tau_s} \in B).$$

В силу независимости процессов Z и τ можно считать, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{Q}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{Q}_2)$, где процесс Z задан на Ω_1 , а τ — на Ω_2 . Далее, воспользовавшись явным построением составного пуассоновского процесса, можно считать, что $Z_t = \sum_{k=1}^{\pi_t} \xi_k$, где π — пуассоновский

процесс с параметром $\nu(\mathbb{R})$, $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\nu/\nu(\mathbb{R})$, независимые с π . Тогда

$$\begin{aligned} E(W * \mu)_\infty &= E_2 \left[E_1 f(Z_{\tau_{u_1}}(\omega_2)(\omega_1), \dots, Z_{\tau_{u_n}}(\omega_2)(\omega_1)) \sum_{u < s \leq v} I(\Delta Z_{\tau_s}(\omega_2)(\omega_1) \in B \setminus \{0\}) \right] \\ &\stackrel{a)}{=} E_2 \left[E_1 f(\dots) \cdot E_1 \sum_{u < s \leq v} I(\dots) \right] = E_2 \left[E_1 f(\dots) \cdot E_1 \sum_{k=\pi_{\tau_u}(\omega_2)}^{\pi_{\tau_v}(\omega_2)} I(\xi_k \in B) \right] \\ &= E_2 [E_1 f(\dots) \cdot P(\xi_k \in B) E_1(\pi_{\tau_v}(\omega_2) - \pi_{\tau_u}(\omega_2))] \\ &= E_2 \left[E_1 f(\dots) \cdot \frac{\nu(B)}{\nu(\mathbb{R})} \nu(\mathbb{R})(\tau_v - \tau_u) \right] = E \left[f(\dots) \nu(B) \int_u^v a_s ds \right] \\ &= E \left[E \left(f(\dots) \nu(B) \int_u^v a_s ds \mid \mathcal{F}_u^{Z \circ \tau} \right) \right] \stackrel{b)}{=} E \left[f(\dots) \nu(B) \int_u^v E(a_s \mid \mathcal{F}_u^{Z \circ \tau}) ds \right] \\ &= E \left[E \left(f(\dots) \nu(B) \int_u^v E(a_s \mid \mathcal{F}_s^{Z \circ \tau}) ds \mid \mathcal{F}_u^{Z \circ \tau} \right) \right] = E(W * \eta)_\infty, \end{aligned}$$

где E_i , $i = 1, 2$, – математические ожидания на пространстве $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, Q_i)$; в а) мы воспользовались независимостью приращений процесса $Z_{\tau_t}(\omega_2)$ для любого фиксированного ω_2 ; в б) применена теорема Фубини и тот факт, что $f(Z_{\tau_{u_1}}, \dots, Z_{\tau_{u_n}})$ есть $\mathcal{F}_u^{Z \circ \tau}$ -измеримая величина. Заметим, что в силу неотрицательности выражений под знаком математических ожиданий $E(W * \eta)_\infty$ и $E(W * \mu)_\infty$ вместе либо конечны, либо бесконечны.

Итак, равенство (1) проверено, и тем самым установлено утверждение теоремы 2.

Теперь теорема 1 является следствием из общей теории интегралов Хеллингера, а именно, из [5; IV.4.16] с учетом [5; I.3.13]. Заметим, что из [5; IV.4.16] с помощью теоремы 2 легко следует результат о взаимном положении самих мер $\tilde{P}$ и P .

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 показывает, что даже если случайная величина a_t не имеет первого момента, то $E(a_t \mid \mathcal{F}_t^{Z \circ \tau})$ конечно для $(Q(d\omega) \times dt)$ -п.в. (ω, t) .

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко доказать, что компенсатор процесса $Z \circ \tau$ относительно произвольной фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, с которой согласованы процессы $Z \circ \tau$ и τ , есть $a_t(\omega) dt \nu(dx)$. Таким образом, теорема 2 является в некотором смысле аналогом теоремы об обновляющих процессах (см. [6; теорема 7.12]).

В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность и признательность к.ф.-м.н. А. С. Черному за огромную помощь и научное руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К.-И. Sato. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. [2] P. L. Brockett, H. G. Tucker // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7. № 1. P. 13–27. [3] М. П. Ершов // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 17. № 1. С. 167–172. [4] П. А. Мейер. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973. [5] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994. [6] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.