Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Идеалы наследственных колец, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:34:35

ИДЕАЛЫ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КОЛЕЦ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Кольцо называется *инвариантным справа* (квазиинвариантным справа), если каждый его правый идеал (максимальный правый идеал) является идеалом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – наследственное справа кольцо.

(1) A – нётерово справа кольцо тогда и только тогда, когда каждый замкнутый правый идеал кольца A конечно порожден.

(2) A – инвариантное справа кольцо тогда и только тогда, когда для каждого элемента a кольца A существует такое $n = n(a)$, что $a^n A$ – идеал кольца A .

Кольцо A называется *локализуемым справа*, если для любого его максимального правого идеала M существуют такие кольцо A_M и кольцевой гомоморфизм $f_M = f: A \rightarrow A_M$, что все элементы множества $f(A \setminus M)$ обратимы в A_M , $A_M = \{f(a)f(s)^{-1} \mid a \in A, s \in A \setminus M\}$ и $\text{Ker}(f) = \{a \in A \mid as = 0 \text{ для некоторого } s \in A \setminus M\}$. В этом случае A_M называется *правой локализацией* кольца A относительно M , а f_M – *каноническим гомоморфизмом*.

ЛЕММА 1. Пусть каждый замкнутый подмодуль модуля M_A конечно порожден.

(1) Если каждый подмодуль модуля M является прямой суммой конечно порожденных модулей, то M – нётеров модуль.

(2) Если M – наследственный модуль и A – полунаследственное справа кольцо, то M – нётеров модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Допустим противное. Пусть Λ – непустое множество всех подмодулей модуля M , не являющихся конечно порожденными. Тогда Λ содержит объединение любой цепи своих элементов. По лемме Цорна Λ содержит максимальный элемент N . По условию $N = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$, где все N_i – ненулевые конечно порожденные модули. Тогда $N = X \oplus Y$, где X – прямая сумма всех N_i с нечетными индексами и Y – прямая сумма всех N_i с четными индексами. X и Y не являются конечно порожденными. По лемме Цорна существует такой замкнутый подмодуль $\overline{X}$ модуля M , что $\overline{X}$ – существенное расширение модуля X . Тогда $\overline{X} \cap Y = 0$. По условию $\overline{X}$ конечно порожден. Поэтому $X \neq \overline{X}$ и $\overline{X} \oplus Y$ строго содержит максимальный элемент $X \oplus Y$ из Λ . Тогда $\overline{X} \oplus Y$ конечно порожден и Y конечно порожден. Получено противоречие.

(2) следует из (1) и того, что каждый проективный правый модуль над полунаследственным справа кольцом является прямой суммой конечно порожденных модулей [1; 39.13(2)].

ЛЕММА 2. Пусть A – локализуемое справа кольцо.

(1) Если для любого максимального правого идеала M кольца A правая локализация A_M является инвариантным справа кольцом, то A – инвариантное справа кольцо.

(2) Если для любого максимального правого идеала M кольца A правая локализация A_M является цепным справа кольцом, то A – дистрибутивное справа кольцо.

(3) Если A – риккартово справа кольцо, то для любого максимального правого идеала M кольца A правая локализация A_M является локальной областью.

(4) Если A – наследственное справа кольцо, то для любого максимального правого идеала M A_M наследственна справа.

(5) Если M – максимальный правый идеал кольца A и $f_M: A \rightarrow A_M$ – канонический гомоморфизм, причем $A/\text{Ker}(f_M)$ – равномерное справа кольцо, то правая локализация A_M является равномерным справа кольцом.

Лемма 2 следует из утверждений 5.26(6), 6.23(4), 6.25(1), 6.22(14) и 5.23(11) в [2].

ЛЕММА 3. Пусть A – наследственное справа локализуемое справа кольцо.

(1) Для любого его максимального правого идеала M A_M является наследственной справа локальной областью, у которой все правые идеалы свободны.

(2) Если для любого максимального правого идеала M кольца A A_M является равномерным справа кольцом, то A – инвариантное справа дистрибутивное справа кольцо

и для любого максимального правого идеала M A_M является инвариантной справа цепной справа областью главных правых идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 2(3) и 2(4) A_M – наследственная справа локальная область. Каждый правый идеал кольца A_M является проективным модулем над локальным кольцом A_M и поэтому свободен.

(2) Пусть M – максимальный правый идеал. Так как каждый равномерный свободный модуль циклический, то из (1) следует, что равномерное справа кольцо A_M является локальной областью главных правых идеалов. Поэтому A_M – инвариантная справа цепная справа область. По леммам 2(1) и 2(2) A – инвариантное справа дистрибутивное справа кольцо.

ЛЕММА 4. Пусть A – кольцо и для каждого элемента a кольца A существует такое натуральное число $n = n(a)$, что $a^n A$ – идеал кольца A .

(1) A – квазиинвариантное справа нормальное кольцо и для любого максимального правого идеала M кольца A подмножество $A \setminus M$ перестановочно справа.

(2) Для любого вполне первичного идеала N кольца A область A равномерна справа.

(3) Если A – риккартово справа кольцо, то A – локализуемое справа кольцо и для любого его максимального правого идеала M правая локализация A_M является равномерной справа локальной областью.

(4) Если A наследственно справа, то A – инвариантное справа дистрибутивное справа кольцо и для любого максимального правого идеала M правая локализация A_M является инвариантной справа цепной справа областью главных правых идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если $e = e^2 \in A$, то $e^n = e$ и $(1 - e)^n = 1 - e$ для всех $n \geq 1$. Тогда из условия следует, что eA и $(1 - e)A$ – идеалы. Поэтому A нормально. Пусть M – максимальный правый идеал. Докажем, что M – идеал. Пусть B – наибольший идеал, лежащий в M . Допустим, что $B \neq M$. Так как A/B полупрimitивно, то не все элементы ненулевого правого идеала M/B нильпотентны. Поэтому существует $m \in M$, что $m^n \notin B$ для всех n . По условию существует такое натуральное число n , что $m^n A$ – идеал. Тогда $B + m^n A$ – такой идеал, что $B \subsetneq B + m^n A \subseteq M$. Получено противоречие. Поэтому A квазиинвариантно справа. Пусть $S = A \setminus M$. Докажем, что S перестановочно справа. Пусть $a \in A$ и $s \in S$. По условию существует такое k , что $as^k = s^k b$ для некоторого $b \in A$. Так как M – максимальный правый идеал, являющийся идеалом, то A/M – тело. Поэтому $s^k \in S$, $as^k = ss^{k-1}b \in aS \cap sA$ и T перестановочно справа.

(2) Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – ненулевые элементы области A/N и $h: A \rightarrow A/N$ – естественный эпиморфизм. Существуют такие $a, b \in A \setminus N$, что $h(a) = \bar{a}$ и $h(b) = \bar{b}$. По условию существуют такие m и n , что $a^m A$ и $b^n A$ – идеалы. Так как $h(A)$ – область и $a, b \in A \setminus N$, то $h(a^m A)$ и $h(b^n A)$ – ненулевые идеалы области $h(A)$. Поэтому $h(a^m A)h(b^n A) \neq 0$. Тогда $h(a^m A) \cap h(b^n A) \supseteq h(a^m A)h(b^n A) \neq 0$ и область $h(A)$ равномерна справа.

(3) Риккартово справа нормальное кольцо A редуцировано [2; 5.28]. По [2; 5.19(4)] A локализуемо справа. Пусть M – максимальный правый идеал и $f: A \rightarrow A_M$ – канонический кольцевой гомоморфизм. По лемме 2(3) A_M – локальная область. Так как A_M – область, то $A/\text{Ker}(f)$ – область. По (2) $A/\text{Ker}(f)$ равномерна справа. По лемме 2(5) область A_M равномерна справа.

(4) По (3) A локализуемо справа и для любого максимального правого идеала M A_M является равномерной справа локальной областью. По лемме 3(2) A – инвариантное справа дистрибутивное справа кольцо и для любого максимального правого идеала M правая локализация A_M является инвариантной справа цепной справа областью главных правых идеалов.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Теорема следует из лемм 1(2) и 4(4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Wisbauer, Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991. [2] A. A. Tuganbaev, Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht: Kluwer, 1998.

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Принято редколлегией
03.02.2003