Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Шварцман, О примере Д. Мамфорда и факториальности алгебр автоморфных форм для плоских групп рода 0, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:34:00

О ПРИМЕРЕ Д. МАМФОРДА И ФАКТОРИАЛЬНОСТИ АЛГЕБР АВТОМОРФНЫХ ФОРМ ДЛЯ ПЛОСКИХ ГРУПП РОДА 0

О. В. ШВАРЦМАН

В начале 60-х годов прошлого века Д. Мамфорд доказал, что локальное кольцо особой точки гиперповерхности $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ в $\mathbb{C}^3$ является факториальным [1]. Известная переформулировка его результата звучит так: пусть $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ – бинарная группа додекаэдра в своем естественном представлении в $\mathbb{C}^2$. Тогда алгебра I полиномиальных инвариантов группы G факториальна [2]. Цель заметки – дать простое объяснение этому явлению и поставить пример Мамфорда в начало бесконечной цепочки ему подобных.

1. Определения и обозначения. Пусть Γ – дискретная группа автоморфизмов связного односвязного одномерного комплексного многообразия X , т.е. сферы Римана $\mathbb{P}^1$, плоскости $\mathbb{C}$ или верхней полуплоскости H . Такую группу мы будем называть плоской группой рода 0, если факторпространство X/Γ является сферой Римана.

Всюду в дальнейшем Γ – плоская группа рода 0. Как абстрактная, такая группа определяется (с точностью до изоморфизма) целочисленным набором $(n_1, \dots, n_s)$, $2 \leq n_i < \infty$, $i = 1, \dots, s$, который называется ее сигнатурой [3].

Мы будем работать с линейными Γ -расслоениями L над X . Пусть $L^\vee$ – двойственное Γ -расслоение. Через A_m обозначим пространство голоморфных сечений расслоения $(L^\vee)^{\otimes m}$ и рассмотрим градуированную алгебру голоморфных сечений $A(L) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} A_m$. Подалгебру Γ -инвариантных сечений $A(L)^\Gamma$ обозначим через $I(L)$.

Если $X = \mathbb{C}$ или H , то расслоение L тривиально, а Γ -расслоение L задается коциклом $a(\gamma, x) \in C(\Gamma, O^*(X))$. Изоморфным Γ -расслоениям отвечают эквивалентные коциклы. При этом алгебра $I(L)$ естественно отождествляется с алгеброй голоморфных $(a - \Gamma)$ -автоморфных форм на X . Точнее: $A_m^\Gamma = \{f \in O(X) \mid f(\gamma x) = a^m(\gamma, x)f(x)\}$.

Классы $[L]$ изоморфных Γ -расслоений над X (с операцией тензорного умножения) образуют абелеву группу $\text{Pic}(\Gamma, X)$.

2. Формулировка результатов.

ТЕОРЕМА. Пусть в сигнатуре $(n_1, \dots, n_s)$ группы Γ все показатели n_i попарно взаимно просты. Тогда существует такое Γ -расслоение L , что класс $[L]$ порождает группу $\text{Pic}(\Gamma, X)$ и алгебра $I(L)$ является факториальной алгеброй конечного типа размерности 2.

СЛЕДСТВИЕ. Результат Мамфорда получается в случае, когда $X = \mathbb{P}^1$, сигнатура Γ равна $(2, 3, 5)$, а L – каноническое Γ -расслоение K на $\mathbb{P}^1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Число сигнатур, для которых расслоение L из теоремы совпадает с каноническим Γ -расслоением K , конечно.

3. набросок доказательства теоремы. Ниже перечислены нужные нам факты, первый из которых хорошо известен (см. [4]–[6]), а два других получаются из него путем простых вычислений. Напомним, что сигнатура группы Γ равна $(n_1, \dots, n_s)$.

Факт 1. $\text{Pic}(\Gamma, X) = \langle t_1, \dots, t_s \mid n_1 t_1 = \dots = n_s t_s \rangle$.

Факт 2. Группа $\text{Pic}(\Gamma, X) \simeq \mathbb{Z}$ (напомним, что $(n_i, n_j) = 1$, $i \neq j$).

Для одной из образующих этой группы, обозначим ее через $[L]$, $I(L)$ является алгеброй конечного типа размерности два.

Факт 3.

$$[K] = n_1 \cdots n_s \left(s - 2 - \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i} \right) [L]. \quad (*)$$

С учетом этих фактов осталось доказать следующую лемму.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛЕММА. Алгебра $I(L)$ факториальна.

В случае $X = \mathbb{C}$ или H доказательство особенно прозрачно.

Пусть a – коцикл, задающий Γ -расслоение L . Тот факт, что класс $[L]$ порождает $\text{Pic}(\Gamma, X)$, означает, что класс $[a]$ порождает группу классов коциклов $H^1(\Gamma, O^*(X))$.

Далее, рассмотрим орбиту $\{\Gamma z\}$ произвольной точки $z \in X$ и через $f_z(x)$ обозначим голоморфную функцию на X , которая обращается в нуль только в точках орбиты и все нули которой просты. Функция $a'(\gamma, x) = \frac{f_z(\gamma x)}{f_z(x)}$ является коциклом. Следовательно, $[a'] = [a]^k$ для некоторого $k > 0$.

Умножив f_z на подходящую обратимую голоморфную функцию, мы получим автоморфную форму Φ_z из алгебры $I(L)$ с нулями (простыми) ровно в точках орбиты Γz . Такая форма является простым элементом алгебры $I(L)$. Пусть теперь φ – любая непостоянная форма из $I(L)$, которая обращается в нуль на конечном числе орбит $\{\Gamma z_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Если q_i – кратность нуля на орбите $\{\Gamma z_i\}$, то с точностью до константы форма φ единственным образом представима в виде произведения $\prod_1^N \Phi_{z_i}^{q_i}$ простых множителей.

4. Доказательство следствия. Бинарная группа додекаэдра G является центральным $\mathbb{Z}_2$ -расширением группы Γ с сигнатурой $(2, 3, 5)$. Следовательно, алгебра полиномиальных G -инвариантов изоморфна алгебре $I(O(-2))$.

С другой стороны, как несложно проверить, Γ -расслоение $O(-2)$ изоморфно каноническому Γ -расслоению K . Результат Мамфорда получается путем применения теоремы с учетом формулы $(\star)$.

5. Доказательство утверждения. По формуле $(\star)$

$$[K] = [L] \iff \frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_1 \dots n_s} = s - 2.$$

Но число решений такого диофантова уравнения конечно [7].

ПРИМЕР. Алгебра классических автоморфных форм для фуксовой группы сигнатуры $(2, 3, 7)$ факториальна, но не является свободной алгеброй.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Mumford // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1961. № 9. P. 5–22. [2] F. Hirzebruch // Semin. Bourbaki. 1962/63. № 250. [3] Х. Цишанг, Э. Форт, Х.-Д. Колдевай. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988. [4] I. Dolgachev // Contemp. Math. 1999. V. 224. P. 65–99. [5] A. Grothendieck // Semin. Bourbaki. December, 1956. [6] R. Godement // Semin. Bourbaki. March, 1954. [7] О. В. Шварцман // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. № 4. С. 66–73.

Математический колледж
Независимого московского университета
E-mail: ossip@schwarz.mccme.ru

Принято редколлегией
03.02.2003