Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Серёгин, Н. Н. Уральцева, Ольга Александровна Ладыженская (к 80-летию со дня рождения), *УМН*, 2003, том 58, выпуск 2, 181–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 02:11:08

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА ЛАДЫЖЕНСКАЯ

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

Седьмого марта 2002 года исполнилось восемьдесят лет Ольге Александровне Ладыженской. Она родилась в маленьком городке Кологриве, на севере Костромской области. Ее отец был учителем математики в средней школе, а мать, трудолюбивая, как большинство эстонцев, вела домашнее хозяйство и ухаживала за мужем и тремя детьми (девочками). Жить было очень тяжело во всех отношениях. Всего было в обрез: и питания, и бумаги, и одежды. Несмотря на все препятствия отец Ольги Александровны Ладыженский Александр Иванович сумел привить любовь и уважение к математике и науке многим своим ученикам, в их числе и трем дочерям. Ольга была младшей и наиболее близкой к отцу. Он во многом определил ее мировоззрение и выбор жизненного пути.

Вся мужская часть старинного дворянского рода Ладыженских, оставшаяся в России, к началу 40-х годов была уничтожена. Александр Иванович погиб в застенках НКВД (в течение недели с 23 по 30 октября 1937), вместе с ним были погибли и другие лучшие учителя города. В 1956 году все они были реабилитированы с формулировкой: «За отсутствием состава преступления».

В 1939 году О. Ладыженская с отличием окончила кологривскую среднюю школу и подала документы на математико-механический факультет Ленинградского университета. Но в приеме ей отказали (ведь она была «дочь врага народа») и вернули документы лишь в сентябре. Однако нашлись добрые люди в другом месте – ее приняли (причем без документов, поверив на слово) в Педагогический институт имени Покровского. Там она закончила два курса, слав заодно наиболее трудные и интересные ей курсы за третий и четвертый год обучения. Война вынудила покинуть Ленинград. Осенью 1941 года она работает воспитателем-преподавателем в детском доме, в городе Городце, а весной 1942 она (вместе с матерью и старшей сестрой) возвращается в Кологрив и получает место своего отца – преподавателя математики в старших классах средней школы. Как и ее отец, она занимается с желающими не только в школе, но и дома (разумеется, бесплатно).

В благодарность мать одного из ее выпускников, вернувшись в Москву, идет к ректору Московского университета и убеждает его выслать Ольге Ладыженской вызов в университет. После

некоторых препирательствах с начальством школы О. А. Ладыженская получает разрешение оставить школу, и в конце октября 1943 она становится студенткой 2-го курса мехмата МГУ (со стипендией и рабочей карточкой, без чего невозможно было бы прожить). Атмосфера в МГУ этого времени была благоприятной для Ольги (ей даже дали Сталинскую стипендию, что было невозможным для нее до этого и спустя два-три года после этого).

Начальство (а тогда деканом был профессор В. В. Голубев) закрывало глаза на то, что способные студенты посещают не все обязательные лекции (но, конечно, сдают экзамены не позднее общего срока), а время проводят в научных семинарах, выбираемых по их желанию. Ольга посещает семинары по алгебре А. Г. Куроша и Б. Н. Делоне, потом семинар по дифференциальным уравнениям, возглавляемый В. В. Степановым. В работе последнего принимали активное участие И. Г. Петровский, А. Н. Тихонов, И. Н. Векуа, их ученики и коллеги. Затем И. М. Гельфанд приглашает Ольгу посещать и его семинар. В конце пребывания на четвертом курсе она загорелась идеей собрать молодежный семинар для более основательного изучения теории дифференциальных уравнений в частных производных. Она уговорила молодого преподавателя А. Д. Мышкиса, аспиранта И. Г. Петровского, пойти с нею к Ивану Георгиевичу и просить его председательствовать на их семинаре. К большому удивлению А. Д. Мышкиса, Петровский согласился, и весь следующий год аккуратно посещал этот “самодеятельный” семинар, помогал разобраться в том или ином вопросе и высказывал свои суждения о той или иной работе или проблеме.

Постоянными участниками этого семинара, кроме О. А. Ладыженской и А. Д. Мышкиса, были М. И. Вишик, О. А. Олейник, Р. А. Александрян, друзья и коллеги Петровского, доценты С. А. Гальперн и М. А. Крейнс. В какой-то степени этот семинар способствовал и написанию И. Г. Петровским его статьи, опубликованной в 1946 году в “Успехах математических наук” и оказавшей большое влияние на многих математиков, желавших работать над развитием теории УрЧП.

О. А. Ладыженская выбрала из нее две проблемы: 1) найти наименее ограничительные условия на поведение решений $u(x, t)$ $2b$ -параболических уравнений при $|x| \rightarrow \infty$, при которых имеет место теорема единственности для задачи Коши и 2) построить для гиперболических уравнений сходящиеся разностные схемы для задачи Коши и, что особенно интересно, для смешанных (или, как принято говорить сегодня, начально-краевых) задач.

В дипломной работе Ольги Александровны (защищенной в МГУ в 1947 году) дано решение первой проблемы, причем не только для уравнения $u_t + u_{xxxx} = 0$, предложенного Петровским, но и для всего класса $2b$ -параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от t . Примечателен предложенный ею метод – выход в комплексную плоскость параметра преобразования Фурье. Он оказался действенным и при изучении классов единственности для более общих уравнений и систем (в работах С. Д. Эйдельмана, И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова и их учеников), а также при получении коэрцитивных оценок решений нестационарных систем параболического типа, системы Стокса и более общих систем гидродинамического типа (работы В. А. Солонникова и ряда других математиков). За дипломную работу она получила похвалы от руководителя, И. Г. Петровского, рецензентов и рекомендацию для опубликования в “Математическом сборнике” (работа вышла в 1950 году).

В 1947 году Ольга Александровна вышла замуж за ленинградца А. А. Киселева и переехала в Ленинград, получив из МГУ рекомендацию для поступления в аспирантуру ЛГУ на математико-механический факультет. Ее научным руководителем по аспирантуре был назначен С. Л. Соболев. С этого времени начинается ее плодотворное общение с академиком В. И. Смирновым, курировавшим тогда несколько направлений в математике, а также в сейсмологии, гидродинамике и аэродинамике. С осени 1947 года по просьбе Ольги Александровны Владимир Иванович возглавил семинар по математической физике, который до сих пор плодотворно работает, объединяя многих математиков города, работающих в области УрЧП и их многочисленных приложений. С самого начала О. А. Ладыженская стала одним из ведущих участников этого семинара.

В качестве диссертационной темы Ольга Александровна выбрала вторую из указанных выше проблем, сформулированных И. Г. Петровским. Но она ставит ее шире – разработать метод конечных разностей так, чтобы с его помощью можно было доказывать разрешимость краевых и начально-краевых задач (включая и задачу Коши) для уравнений и систем всех классических типов. Напомним, что до работ О. А. Ладыженской метод конечных разностей был использован

и исследован для следующих задач: 1) задача Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченных областях, 2) задача Коши для волнового уравнения и одномерного гиперболического (явная схема) и 3) начально-краевая задача и задача Коши для уравнения теплопроводности (явная и неявная схемы). Главные оценки базировались на том, что для рассматриваемых (простейших) схем имеют место точные аналоги энергетических соотношений и принципа максимума. О. А. Ладыженская предложила разностный аналог разложений Фурье для периодических функций, заданных на сетках, и исследовала их сходимость при стремлении к нулю шага решетки в разностных аналогах пространств W_2^k . Используя эти разложения, она проанализировала разнообразные разностные схемы для модельных уравнений, выявила те из них, которые устойчивы при определенных соотношениях шагов по пространственным переменным и по времени, а затем занялась доказательством устойчивости (а тем самым и сходимости) этих схем для уравнений и систем с переменными коэффициентами. Следует отметить, что такой Фурье-анализ простейших разностных схем был вскоре принят на вооружение многими научно-вычислительными центрами нашей страны. В Америке же аналогичный анализ был предложен в Лос-Аламосе Дж. фон Нейманом примерно в то же время. В открытой печати он появился в статье O'Brien, Hymann, Kaplan, опубликованной в 1951 году в книге Рихтмайера.

В течение нескольких первых месяцев пребывания в аспирантуре она рассказывает описанные выше результаты по разностному Фурье-анализу в Москве и Ленинграде, а вскоре после этого предлагает сходящиеся конечно-разностные схемы для задачи Коши для общих квазилинейных систем гиперболических по Петровскому (т.е. гиперболических систем без кратных характеристик). Тем самым она полностью реализовала программу Петровского, дав для этой задачи более простое, чем у него, доказательство теоремы о локальной однозначной разрешимости. Это составило предмет ее кандидатской диссертации, блестяще защищенной в ЛГУ весной 1949 года. К сожалению, ее опубликование в открытой печати затянулось до 1952 года из-за технических сложностей с набором формул. Предложенный же ею Фурье-анализ разностных схем для уравнений с постоянными коэффициентами вскоре стал почти “фольклором” и изложен во многих книгах.

После защиты диссертации она занялась изучением начально-краевых задач (в основном первой, с условием Дирихле на границе) для линейных гиперболических уравнений 2-го порядка. До нее были исследованы, в основном, лишь одномерные уравнения (с одной пространственной переменной). Для многомерных уравнений были лишь результаты по локальной разрешимости, причем в предположении очень большой гладкости всех данных задачи. Даже для волнового уравнения не было ни одного результата по глобальной разрешимости начально-краевых задач при сколько-нибудь “приемлемых” предположениях. Формально применяемые методы Фурье и Лапласа были обоснованы только в случае одной пространственной переменной (одно из достижений В. А. Стеклова).

Проблема обоснования метода Фурье (для гиперболических, параболических и многих других нестационарных уравнений), по существу, состояла в исследовании сходимости разложений произвольных функций в ряды по собственным функциям симметрических эллиптических операторов $\mathcal{L}$. Она привлекала внимание многих исследователей, начиная с момента возникновения самого метода Фурье, и особенно после того, как были доказаны теоремы о наличии системы собственных функций оператора Лапласа в произвольной ограниченной области Ω при любом из классических краевых условий, а также ее полнота и ортогональность в пространстве $L_2(\Omega)$. Отсюда вытекала сходимость в $L_2(\Omega)$ разложений по этим функциям любой функции из $L_2(\Omega)$. Но вопрос о возможности дифференцировать такие ряды (хотя бы два раза) оставался открытым даже для этого простейшего оператора вплоть до 1950 года. В этом году появляется первая публикация О. А. Ладыженской [2], а вслед за нею в 1950–52 гг. публикации [3]–[10], в которых получены исчерпывающие ответы, касающиеся разложений функций из $W_2^k(\Omega)$ в ряды по собственным функциям произвольных симметрических эллиптических операторов 2-го порядка в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, при любом из краевых классических условий на $\partial\Omega$. Это позволило ей дать обоснование метода Фурье и метода Лапласа для нестационарных уравнений вида

$$U_t - \mathcal{L}U = f, \quad U_{tt} - \mathcal{L}U = 0, \quad iU_t - \mathcal{L}U = f.$$

В полученных ею результатах содержалась и разгадка наличия нового интеграла второго порядка для волнового уравнения, обнаруженного в 40-х годах С. Л. Соболевым (а затем и некоторых

других интегралов, найденных его докторантом Д. М. Волковым), и решение проблемы, сформулированной в середине 40-х годов И. М. Гельфандом на его знаменитом семинаре, об описании области определения замыкания в $L_2(\Omega)$ эллиптического оператора $\mathcal{L}$ с условием Дирихле [6]. Это последнее базируется на доказанном О. А. Ладыженской неравенстве

$$\|U\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\mathcal{L}U\|_{L_2(\Omega)} + C_1(\Omega)\|U\|_{L_2(\Omega)}. \quad (1)$$

В нем $\mathcal{L}$ есть эллиптический оператор второго порядка общего вида с гладкими коэффициентами при производных второго порядка, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, а U – произвольная функция из $W_2^2(\Omega)$, равная нулю на границе области или удовлетворяющая невырожденному однородному краевому условию первого порядка.

О. А. Ладыженская назвала это неравенство “вторым основным неравенством для эллиптических операторов $\mathcal{L}$ ” (а “первым основным неравенством” она назвала неравенство, позволяющее мажорировать $\|U_x\|_{L_2(\Omega)}$ правой частью (1)). Значимость его в теории дифференциальных операторов, в том числе и в спектральной теории, трудно переоценить.

Независимо от О. А. Ладыженской неравенство (1) для первого краевого условия было доказано известным итальянским математиком Каччопполи (1951 г.). Ольга Александровна доказала также аналоги (1) для итераций $\mathcal{L}^m$, $m = 1, 2, \dots$. Она поставила проблему доказать аналоги неравенства (1) для эллиптических операторов $\mathcal{L}$ любого порядка, а также для любых матричных операторов эллиптического типа. В 1956 году ее ученица О. В. Гусева решила эту проблему для случая сильно эллиптических систем (в том числе и скалярных $\mathcal{L}$ любого порядка). В конце 50-х – начале 60-х годов в исследование этой проблемы включились многие математики и получили утвердительный результат для широкого класса систем “обобщенно-эллиптического” типа (Агмон, Даглис и Ниренберг, В. А. Солонников и многие другие).

После получения описанных результатов по методу Фурье и Лапласа, Ольга Александровна вернулась к изучению начально-краевых задач для гиперболических уравнений 2-го порядка общего вида. Для них Фурье-анализ отменял лишь заведомо негодные (неустойчивые, несходящиеся) схемы и оставлял те, которые внушали надежду. Она взяла за основу разностные схемы, для которых имела место устойчивость (априорная оценка) в сеточных нормах, эквивалентных энергетической норме. Это, а также введенные ею интерполяции сеточных функций и доказанные ранее аналоги теорем вложения для сеточных функций позволило ей найти в качестве предела функцию U , которая имела производные лишь первого порядка, квадратично суммируемые по $Q_T = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. Так возникла необходимость ввести обобщенные решения исследуемой задачи, принадлежащие $W_2^1(Q_T)$ (а не $W_2^2(Q_T)$, как было бы желательно). Она это сделала и доказала, что в этом классе решений сохраняется теорема единственности (свойство, которое нежелательно терять при расширении класса решений). Эта теорема примечательна тем, что она доказывалась с помощью простой оригинальной конструкции, не использующей знания разрешимости задач исследуемого типа в классах каких-либо гладких функций. Напротив, такая теорема единственности позволила доказать, что гладкость обобщенных решений из $W_2^1(Q_T)$ повышается при повышении гладкости данных задачи и выполнении необходимых условий согласования. Предложенная О. А. Ладыженской для этого методика вошла в арсенал теории краевых и начально-краевых задач для уравнений разного типа (в их числе и уравнений Навье–Стокса).

Таким образом, при изучении начально-краевых задач для гиперболических уравнений О. А. Ладыженская поняла важность введения понятия “обобщенного решения задачи из того или иного класса (функционального пространства)” и полезность работы не в одном таком классе, а в нескольких или даже в целой шкале функциональных пространств. До нее подобного рода концепция встречалась лишь в эллиптических вариационных задачах. Для нестационарных же задач, например, для задачи Коши

$$\square U = U_{tt} - \Delta U = f, \quad U|_{t=0} = \varphi^0, \quad U_t|_{t=0} = \varphi^1, \quad (2)$$

рассматривались лишь обобщенные решения U , удовлетворяющие тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} U(x, t) \square \eta(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f \eta dx dt \quad (3)$$

при любой бесконечно гладкой пробной функции η , с компактным носителем, лежащим в полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0, \infty) \equiv \mathbb{R}_+^{n+1}$. Ясно, что (3) имеет смысл для любой $U \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Но тождество (3) не дает полного представления о задаче, оно указывает лишь на выполнение волнового уравнения в смысле теории распределения и не дает никакой информации о начальных данных.

Согласно концепции Ладыженской обобщенные решения U задачи (2) из класса $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $p \geq 1$, надо определять как функции, для которых $|U|^p$ суммируемы по любой ограниченной области, лежащей в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и для которых справедливо тождество

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} U \square \eta \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f \eta \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} (U^0(x) \eta_t(x, 0) - U^1(x) \eta(x, 0)) \, dx \quad (4)$$

с любой $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Для начально-краевых задач при определении их обобщенных решений из назначаемого класса $\mathcal{H}$ надо “правильно” переформулировать все уравнения задачи, включая и краевые условия. При этом для некоторых из них можно сохранить и первоначальную форму, как например, уравнение $\operatorname{div} V = 0$ в случае несжимаемых жидкостей с $V \in W_1^1$.

Предложенный О. А. Ладыженской на рубеже 40-х и 50-х годов подход к решению краевых и начально-краевых задач стал общепризнанным к началу 60-х годов, когда начали появляться книги Ж. Лионса и ряда других зарубежных исследователей. В нашей стране он был освоен уже в течение 50-х годов благодаря лекциям О. А. Ладыженской, прочитанным ею в Ленинграде и в других научных центрах страны, а также на Всесоюзных летних школах. Еще большее распространение он имел благодаря ее монографии “Смешанная задача для гиперболического уравнения” [15], вышедшей в 1953 году. Благодаря включенным в нее результатам О. А. Ладыженской по методу конечных разностей книга стала настольной во многих вычислительных учреждениях страны. Она не была переведена на европейские языки, но ее содержание знали в научных центрах разных стран. Еще одной ценной особенностью развитой Ольгой Александровной методики исследования задач для УрЧП является ее “непривязанность” к линейности задачи.

Стоит заметить, что написание книги было вынужденным. О. А. Ладыженская собиралась защищать помещенный в ней материал как вторую, докторскую диссертацию. Сделать это в Ленинграде было уже невозможно – слишком плоха была ее репутация у властей. Обратились в Москву, к И. Г. Петровскому, тогда уже ректору МГУ. Результаты работы ему понравились (хотя, как рассказывает Ольга Александровна, ей каждый раз надо было показывать Ивану Георгиевичу, что на избранном ею пути получаются и классические решения) и он принял диссертацию к защите. Однако вскоре выяснилось, что и его возможностей не хватает для проведения защиты. В этой ситуации В. И. Смирнов посоветовал издать диссертацию в виде книги. Он написал к ней предисловие, отметив оригинальность подхода и ценность полученных автором результатов. Книга была охотно принята к опубликованию и вышла в свет в середине 1953 года (в нее не был включен диссертационный материал, относящийся к параболическим уравнениям). Но до этого в марте умер Сталин, и лед тронулся. Петровский позвонил Ладыженской и сообщил, что вскоре будет ее защита. Защита прошла прекрасно, при четырех, вместо положенных трех, оппонентах. Осенью того же года она получила и диплом доктора физико-математических наук.

В 1954 году она делает одно очень важное дополнение к своим результатам по разрешимости линейных начально-краевых задач – доказывает для них теорему единственности в классе обобщенных решений из $L_2(Q_T)$. Сделано это было для уравнений всех классических типов, а также для класса “абстрактно-параболических” уравнений, включающего в себя систему Стокса. Такая сильная теорема (причем доказанная с использованием лишь тех свойств, которые выделяют тип задачи) дала ей возможность доказать теоремы о разрешимости “почти даром”, с использованием лишь соответствующих априорных оценок. Более того, этот подход позволил открыть новую главу в изучении операторных уравнений с неограниченными операторами. Она рассмотрела задачу Коши для уравнений вида:

$$S_1(t) \frac{dU(t)}{dt} + S_2(t) U(t) = f(t), \quad U(0) = U^0 \quad (5)$$

и

$$S_1(t) \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + S_2(t) \frac{dU(t)}{dt} + S_3(t)U = f(t), \quad U(0) = U^0, \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = U^1, \quad (6)$$

где S_k суть неограниченные операторы в гильбертовом пространстве H , $f: [0, T] \rightarrow H$ – известная функция, U^0 и U^1 – известные элементы H , а функция $U: [0, T] \rightarrow H$ подлежит определению. При тех или иных условиях на S_k она доказывает однозначную разрешимость задач (5), (6). В статье [25] дан обзор результатов, полученных по разрешимости задач (5) и (6), а в работе [38] демонстрируется, что дают ее результаты по задачам (5), (6) для разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем всех классических типов, а также системы Стокса.

Прозрачность методов, заложенных в указанных работах О.А. по задачам (5), (6), равно как и сама идея вложить начально-краевые задачи для УрЧП в рамки задачи Коши для уравнений с неограниченными операторами, привлекли большое число специалистов по функциональному анализу. Появилось целое новое направление, посвященное изучению абстрактных уравнений. Другим источником этого направления явилась работа Т. Като (того же времени, что и первая работа О.А. Ладыженской [16] по описанному направлению). В ней исследуется задача (5) с $S_1(t) = I$ в банаховом пространстве. Выполнимость условий теоремы Като в то время была доказана только для одномерных параболических уравнений. Позже, после доказательства коэрцитивных оценок в $L_p(\Omega)$, выполнимость условий теорем Като была проверена и для более широкого класса параболических уравнений.

После защиты докторской диссертации Ольга Александровна возвращается к нелинейным гиперболическим системам, в основном, к уравнениям общей теории относительности. Она обсуждает с В.А. Фоком, какие задачи интересно исследовать для таких систем. Фок охлаждает ее намерение доказать для них локальную разрешимость задачи Коши (задачи, которой она посвятила свою первую диссертацию), считая такую задачу надуманной. Задачи же, в которых задается то или иное поведение искомых функций на пространственно-временных бесконечностях, не были еще поняты и исследованы даже для линейных скалярных гиперболических уравнений. Кроме того, с физической точки зрения наибольший интерес представляют системы Эйнштейна в среде, содержащей какие-либо жидкие или газообразные образования. В связи с этим, О.А. Ладыженская стала выяснять, что же сделано по основным системам гидродинамики – уравнениям Эйлера и уравнениям Навье–Стокса. Оказалось, что результатов по разрешимости краевых или начально-краевых задач для них в учебниках или монографиях нет (за исключением случая стационарных потенциальных течений). Не нашла она таких результатов и в обзорных статьях. Ведущие специалисты нашей страны по гидродинамике ответили ей, что никаких строгих результатов по разрешимости задач при наличии препятствий (границ) нет, но они верят в существование решений при малых числах Рейнольдса. При больших же числах Рейнольдса решения разрушаются и уравнения для них перестают выполняться. Получив такое напутствие, О.А. Ладыженская начала свое собственное исследование систем гидродинамики с объекта, который с математической точки зрения показался ей наиболее доступным – с уравнений Навье–Стокса для несжимаемых жидкостей. Сначала разумно было изучить их простейшую линеаризацию – систему Стокса. Сначала она рассмотрела стационарный случай

$$-\nu \Delta U + \nabla q = f, \quad \operatorname{div} U = 0, \quad U|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7)$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $n = 2$ или 3 (двумерная или трехмерная задача соответственно). В ней $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть поле скоростей, $q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ – давление, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – известное поле внешних сил, а $\nu = \operatorname{Const} > 0$ – коэффициент вязкости. О.А. Ладыженская редуцировала задачу (7) к тождеству

$$\nu \int_{\Omega} U_x \eta_x dx = \int_{\Omega} f \eta dx. \quad (8)$$

Внешне оно имеет тот же вид, что и тождество для классической задачи Дирихле

$$-\Delta U = f, \quad U|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Отличие же состоит в том, что в случае задачи (9) U и η в (8) являются элементами пространства

$$\mathring{W}_2^1(\Omega) = \{U \mid U_x \in L_2(\Omega), U|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (10)$$

причем (8) должно выполняться при произвольном элементе $\eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. В случае же задачи (7) надо потребовать, чтобы U и η принадлежали подпространству

$$H(\Omega) = \{U \mid U \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \operatorname{div} U = 0\} \quad (11)$$

пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, причем η – произвольный элемент $H(\Omega)$, а U – искомый элемент того же пространства. Существование U , подчиняющегося тождеству (8), в обоих случаях выводится из теоремы Рисса о представимости линейного функционала, если относительно f предположить, например, что f в случае ограниченной области Ω принадлежит $L_2(\Omega)$ (на самом деле достаточно знать, что f есть элемент пространства, дуального к $H(\Omega)$). После этого О. А. Ладыженская доказывает, что в случае $f \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$, найденное U имеет вторые производные из $L_{2,\text{loc}}(\Omega)$ и для него существует $q \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$, такое, что система (7) выполняется при почти всех $x \in \Omega$. Для этого последнего она сформулирована и доказала следующую важную теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если поле $w \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ортогонально всем полям $\eta \in J^\infty(\Omega)$, то w является градиентным полем, т.е. $w = \nabla p$.*

Здесь $J^\infty(\Omega)$ есть множество всех бесконечно дифференцируемых соленоидальных (бездивергентных) полей с компактными в Ω носителями.

Эта теорема стала краеугольным камнем во всех исследованиях системы уравнений Навье–Стокса (и многих других систем гидродинамического типа), которые начались с работ О. А. Ладыженской и продолжаются до сих пор. С этой же теоремы начинается и монография [57], в которой изложены основные результаты О. А. Ладыженской по уравнениям Стокса и Навье–Стокса, полученные ею в 50-е годы. В ней также излагаются: результат Е. Хопфа по глобальному существованию слабых решений основной начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса (1951 г.), результаты Одквиста по классической разрешимости задачи (7) (1930–31 гг.) и оценка нормы $\|U_{xx}, \nabla q\|_{L_2(\Omega)}$ через $\|f\|_{L_2(\Omega)}$ в задаче (7), доказанная учеником О. А. Ладыженской В. А. Солонниковым. В книге имеется и исторический обзор результатов по разрешимости уравнений Навье–Стокса, полученных до ее работ. Это, в основном, результаты Ж. Лерэ. Для двумерных задач он доказал: 1) глобальную однозначную разрешимость задачи Коши, 2) локальную по времени однозначную разрешимость первой начально-краевой задачи в ограниченных выпуклых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и 3) глобальную по t разрешимость таких задач при достаточно малых данных.

Для трехмерных задач он исследовал только задачу Коши и получил для нее результаты того же типа, что и для двумерных задач в пп. 2) и 3), а также глобальное существование по крайней мере одного “турбулентного” решения v , удовлетворяющего системе интегральных уравнений, формально получаемой из системы Навье–Стокса. Во всех случаях (кроме двумерной задачи Коши, обладающей кроме энергетического соотношения, принципом максимума для поля вихрей) Ж. Лерэ верил, что решения могут коллапсировать, разрушаться, и он начал изучение мер множеств точек в Q_T , где это может происходить. Лерэ работал в стиле своего времени – использовал и развивал теорию гидродинамических потенциалов. Для задачи Коши она имела в работах предшественников (Озина и других) и позволяла свести всю задачу к исследованию интегральных уравнений простого вида. Напротив, сведение к такого рода уравнениям начально-краевой задачи даже для двумерного случая потребовало большой изобретательности и большого труда.

Прошло более двадцати лет до получения следующих результатов по однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса. Сначала появилась работа О. А. Ладыженской с А. А. Киселевым [34], в которой была доказана однозначная разрешимость первой начально-краевой задачи в произвольной трехмерной области. Она выполнена в духе работ Ладыженской, без использования каких-либо специальных представлений для решений,

но с использованием свободы выбора класса обобщенных решений задачи, в котором сохраняется теорема единственности. В качестве такого класса они выбрали для поля скоростей V класс $W_2^1(Q_T) \cap L_\infty((0, T), L_4(\Omega))$ с $V_{xt} \in L_2(Q_T)$ и доказали в этом классе однозначную разрешимость на положительном интервале времени $(0, T^*)$, длина которого определяется нормой в $W_2^2(\Omega)$ начального поля V^0 и нормами в $L_2(Q_T)$ известных функций f и f_t . Если эти нормы не превосходят некоторого числа, то $T^* = \infty$. Для таких v по теореме 1, описанной выше, восстанавливается давление p .

Отправляясь от таких решений, можно получать как более плохие, так и более гладкие решения в зависимости от гладкости данных. В работе цитируются все предшествующие работы по данной проблеме. О работе Е. Хопфа высказано суждение, что введенный им класс “слабых” решений слишком широк – в нем теряется теорема единственности. Позже Ольга Александровна подтвердит это мнение, построив пример двух разных “слабых” решений Хопфа одной и той же трехмерной задачи для уравнений Навье–Стокса при специального вида граничных условиях [108]. Более того, построенные в [108] решения V принадлежат пространствам $L_{m,s}(Q_T)$ с любыми $m, s \geq 1$, подчиняющимися условиям

$$\frac{n}{m} + \frac{2}{s} > 1. \quad (12)$$

Вскоре после работы [34] 1957 года О. А. Ладыженская публикует работу [42], в которой доказывает глобальную однозначную разрешимость основной начально-краевой задачи для случая двумерных течений. Тем самым она опровергает мнение Ж. Лерэ (да и многих гидродинамиков), что такие течения могут коллапсировать. Успех в решении этой известной проблемы был связан и с разработанной ею общей концепцией исследования начально-краевых задач, о которой мы говорили выше, и с открытием нового типа неравенств, которые вскоре стали называться мультипликативными. Для исследования двумерных течений ей потребовалось неравенство

$$\|U\|_{4,\Omega} \leq \beta \|U_x\|_{2,\Omega}^{1/2} \|U\|_{2,\Omega}^{1/2}. \quad (13)$$

Оно справедливо для любой $U \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, причем константа β не зависит ни от U , ни от Ω . Метод, предложенный О. А. Ладыженской (индукция по размерности с вынесением за интеграл максимума модуля части интегранта), позволил доказать и более общие мультипликативные неравенства, из которых для изучения уравнений Навье–Стокса важны неравенства

$$\|U\|_{m,\Omega} \leq \beta(m, n) \|U_x\|_{2,\Omega}^\alpha \|U\|_{2,\Omega}^{1-\alpha} \quad (14)$$

с $m \in [2, \frac{2n}{n-2}]$ при $n > 2$ или с $m \in [2, \infty)$ при $n = 2$ и с $\alpha = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{m})$.

В частности, для $n = 3$ вместо (13) имеем

$$\|U\|_{4,\Omega} \leq \beta \|U_x\|_{2,\Omega}^{3/4} \|U\|_{2,\Omega}^{1/4}. \quad (15)$$

Из (13) и полученных ранее результатов О. А. Ладыженской по задаче (5) следовала теорема единственности в классе слабых решений Хопфа для двумерных задач. Позднее Ж. Лионс и Г. Проди дали другое доказательство этого факта. Они использовали неравенство (13), но не использовали доказанный Ладыженской результат о том, что для систем Стокса с $f = \sum_{k=1}^n \partial f_k / \partial x_k$, $f_k \in L_2(Q_T)$, и $U^0 \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ обобщенные решения V из класса $L_2(Q_T)$ обладают свойством $V \in \mathbb{C}([0, T], \overset{\circ}{J}(\Omega))$ и удовлетворяют энергетическому равенству. В первом издании монографии [57] автор не уделяет особого внимания получению теорем единственности для уравнений Навье–Стокса в наиболее широких классах обобщенных решений, и лишь кратко упоминает, что для $n = 2$ единственность есть, например, в классе слабых решений Хопфа, а для $n = 3$ в классе $V \subset L_{4,8}(Q_T)$. Позже она включила более общие результаты по теоремам единственности во 2-е русское издание монографии по уравнениям Навье–Стокса, опубликованное в 1970 году. Они таковы:

ТЕОРЕМА 2. Если V есть слабое решение Хопфа и $V \in L_{m,s}(Q_T)$ с какими-либо m, s , удовлетворяющими условиям

$$\frac{n}{m} + \frac{2}{s} = 1, \quad m \in (n, \infty], \quad s \in [2, \infty) \quad (16)$$

или

$$m = n + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad s = \infty, \quad (17)$$

где n – размерность Ω , то для него справедливо энергетическое равенство и в классе таких решений имеет место теорема единственности.

Заметим, что в случае $n = 2$ любое решение Хопфа принадлежит $L_{m,s}(Q_T)$ с m, s , удовлетворяющими условию (16).

Эта теорема единственности была усилена Серрином и Сафером, предположившими, что только одно из возможных слабых решений Хопфа принадлежит $L_{m,s}(Q_T)$ с m, s , удовлетворяющими (16) или (17).

Другое усиление теоремы 2 дано О. А. Ладыженской в работе [93] 1967 г. А именно, она доказала гладкость (и тем самым единственность) обобщенных решений V , принадлежащих $L_{m,s}(Q_T)$ с m, s , удовлетворяющими условию (16) или (17), не предполагая, что V есть решение Хопфа. Но для этого пришлось потребовать, чтобы граница $\partial\Omega$ была гладкой (класса C^2) и Ω – ограниченной (правда, отмечено, что результат верен и для $\Omega = \mathbb{R}^n$). Но основным результатом работы [93] является

ТЕОРЕМА 3. Если V есть обобщенное решение задачи

$$V_t - \nu \Delta V + V \cdot \nabla V + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} V = 0, \quad V|_{t=0} = V^0, \quad V|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \quad (18)$$

в $Q_T = \Omega \times [0, T]$ из класса $L_{m,s}(Q_T)$ с m, s , удовлетворяющими одному из условий (16) или (17), и если $f \in L_2(Q_T)$, $V^0 \in H(\Omega) \subset \dot{W}_2^1(\Omega)$, а Ω есть ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с $\partial\Omega \subset C^2$, то V принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$, ему соответствует давление p с $\nabla p \in L_2(Q_T)$ и V, p удовлетворяют всем условиям задачи (18).

Итак, теорема гарантирует, что у решения V есть обобщенные производные V_x, V_{xx} и V_t из $L_2(Q_T)$, и V и соответствующее ему p удовлетворяют системе Навье–Стокса для почти всех $(x, t) \in Q_T$. Ясно, что большей гладкостью при указанных условиях на f и v^0 решение обладать не может. Но при увеличении гладкости f и v^0 растет и гладкость V и p , что следует уже из результатов линейной теории, описанных в монографии [57].

Теорема 3 по существу была повторена несколькими математиками и, к сожалению, без указания ее автора – О. А. Ладыженской. Значимость же теоремы 3 несомненна – она дает хороший ориентир для ученых, желающих попробовать свои силы в решении 6-й проблемы тысячелетия, объявленной Clay Mathematics Institute в Кембридже.

Большое внимание этой теореме уделено и в статье О. А. Ладыженской, помещенной в данном выпуске УМН. В этой статье, а также во 2-м издании ее монографии [113], сформулирована условная теорема, сводящая решение 6-й проблемы тысячелетия к получению априорной оценки нормы $L_{m,s}(Q_T)$ для всех решений некоторого однопараметрического семейства задач, связанных с задачей (18).

Мы не будем перечислять другие результаты О. А. Ладыженской по исследованию гладкости решений задачи (18), по предельному переходу при $\nu \rightarrow 0$ от уравнений Навье–Стокса к уравнениям Эйлера и многие другие. Не все они включены в 1-е и 2-е издания ее монографии. (Обратим внимание иностранных ученых, что 2-е издание Gordon и Breach соответствует 1-му русскому изданию, 2-е же русское издание переведено только в Японии и Китае.) Во 2-е русское издание включен большой параграф, посвященный методу конечных разностей. И здесь О. А. Ладыженская была первой, предложившей сходящиеся разностные схемы для решения краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса.

Но вернемся к 50-м годам и ее замечательным результатам по разрешимости стационарных задач для уравнений Навье–Стокса. В работах Одквиста и затем в работе Лерэ первой половины

30-х годов была рассмотрена задача Дирихле для стационарных уравнений Навье–Стокса в ограниченных областях Ω , а также задача обтекания конечного тела потоком, стремящимся к постоянному при $|x| \rightarrow \infty$. Эти задачи были сведены Одквистом к системам интегральных уравнений с суммируемыми ядрами. Полученные им оценки соответствующих функций Грина позволили доказать однозначную разрешимость задач при малости числа Рейнольдса. Но Лерэ стремился доказать их разрешимость при любых числах Рейнольдса (т.е. без каких-либо ограничений малости на данные задачи). Для этого он начал развивать метод Шмидта продолжения по параметру. Роль параметра играет коэффициент вязкости ν , а роль числа Рейнольдса при фиксированности остальных данных принадлежит числу ν^{-1} . При ν , больших некоторого ν_0 , задача имеет единственное решение, но при уменьшении ν можно, вообще говоря, натолкнуться на точки ветвления. Прохождение через такие точки требует специального анализа. Лерэ выделил некоторые классы интегральных уравнений, для которых такой анализ возможен. По-видимому, он предполагал в дальнейшем применить его в случае интегральных уравнений, возникших для уравнений Навье–Стокса. Для этого он дал априорную оценку интеграла Дирихле $\int_{\Omega} V_x^2(x, \nu) dx$ для всех возможных решений при любых $\nu > 0$. Кроме этого, им были установлены и некоторые другие априорные оценки решений и некоторые теоремы вложения. Однако намеченная им программа не была доведена до желаемого конца и вопрос о глобальной разрешимости стационарных задач еще долгое время оставался открытым. Специалисты же по гидродинамике были едины во мнении, что при больших числах Рейнольдса нет ламинарных (т.е. гладких) решений.

И тем не менее, О. А. Ладыженская доказала глобальную разрешимость задачи

$$-\nu \Delta V + V \nabla V + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} V = 0, \quad V|_{\partial\Omega} = 0 \quad (19)$$

в любых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, причем при очень малых ограничениях на f и гладкость $\partial\Omega$ [44], 1958 г. и [49], 1959 г. И здесь решающую роль сыграл ее подход к исследованию краевых задач и удачный выбор “первого шага”: пространства, в котором проще всего найти решение задачи. Таким пространством оказалось пространство $H(\Omega)$, являющееся замыканием множества $J^\infty(\Omega)$ в норме интеграла Дирихле. Аналитически же это базировалось на известном с начала 20-го века энергетическом соотношении

$$\nu \int_{\Omega} V_x^2 dx = \int_{\Omega} fV dx, \quad (20)$$

которое легко получается из (19) скалярным умножением на V и интегрированием по Ω . Из (20) следует априорная оценка для $\|V_x\|_{2,\Omega}$, при помощи которой О. А. Ладыженская доказывает существование по крайней мере одного решения V , принадлежащего $H(\Omega)$. Затем проводится исследование гладкости V в зависимости от гладкости f и $\partial\Omega$. Мы не будем перечислять всего, что сделано О. А. Ладыженской по исследованию стационарных задач. Отметим лишь, что в них она была пионером, проложившим путь к их изучению. После простейшего случая (19) она рассмотрела неоднородные краевые условия и задачи обтекания. В 70-х годах она вместе с В. А. Солонниковым открыла новое направление в изучении стационарных течений в областях с некомпактными границами, в том числе и в областях типа труб, решения которых с ненулевым суммарным расходом обязательно имеют неограниченный интеграл Дирихле $\int_{\Omega} V_x^2 dx$. Успех в исследовании глобальной разрешимости таких задач во многом обязан предложенной О. А. Ладыженской постановке условий на бесконечности, отличной от имевшейся ранее.

Первые же публикации Ольги Александровны по уравнениям Навье–Стокса мгновенно привлекли внимание многих сильных специалистов разных стран. Их число увеличилось во много раз при появлении в 1961 году ее монографии. Тем не менее после ее публикаций 1957 и 1958 гг. за прошедшие годы появилось не так много качественно новых результатов по глобальной однозначной разрешимости трехмерной задачи (18). Среди них наиболее впечатляющим является результат О. А. Ладыженской о глобальной однозначной разрешимости задачи Коши и некоторой начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в классе вращательно-асимметричных течений с нулевой угловой скоростью (упоминание о нем имеется в [87], а доказательство в [100]).

Опишем еще одно направление исследований в теории УрЧП, созданное О. А. Ладыженской. Отчасти оно было навеяно письмом к ней академика М. А. Леонтовича, попросившего объяснить ему, что же сделано строго в отношении устойчивости и неустойчивости известных решений в плоском канале, в цилиндрических трубах и конечных цилиндрах. Важной отправной точкой для нее было высказывание физиков и механиков, что траектории диссипативных систем “забывают” свое начальное состояние и их поведение при больших временах определяется постоянно действующими факторами (т.е. формой области Ω и полем внешних сил). Что значит “забывают”? Ведь каждая траектория определяется точкой, из которой она исходит (речь идет о системе первого порядка по t). Система Навье–Стокса является диссипативной системой, и для нее О. А. Ладыженская доказала глобальную однозначную разрешимость двумерной задачи (18), например, при $f = f(x)$, не зависящих от t . Постоянными факторами в данной задаче являются форма Ω , сила f и коэффициент ν . О. А. Ладыженская поставила перед собой задачу: найти и описать

ω -предельное множество для всего фазового пространства $X \equiv \overset{\circ}{J}(\Omega)$. При этом фиксированы ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ν и $f \in L_2(\Omega)$. Обозначим через V_t , $t > 0$, разрешающие операторы задачи (18). В соответствии с результатами О. А. Ладыженской по задаче (18) семейство $\{V_t, t \in \mathbb{R}_+^1 = [0, \infty), X \equiv \overset{\circ}{J}(\Omega)\}$ образует непрерывную полугруппу, и каждое ограниченное множество $B \subset X$ за конечное время втягивается в шар $B_{R_0} = \{U \mid \|U\|_{2,\Omega} \leq R_0\} \subset X$ радиуса $R_0 > (\lambda_1 \nu)^{-1} \|f\|_{2,\Omega}$, где λ_1 есть первое собственное значение оператора Стокса для области Ω , и остается там при всех больших t . О. А. Ладыженская берет пересечение

$$\mathcal{M} \equiv \bigcap_{t \geq 0} V_t(B_{R_0}), \quad (21)$$

и, как она пишет, $\mathcal{M}$ улавливает те и только те состояния системы, которые может увидеть экспериментатор по истечении бесконечного промежутка времени. Ясно, что $V_{t_2}(B_{R_0}) \subset V_{t_1}(B_{R_0})$ при $t_2 > t_1$ и для случая конечномерного фазового пространства X пересечение (21) дает ω -предельное множество для всего X , точнее, множество, равномерно притягивающее любое ограниченное множество пространства X . Такие множества Ольга Александровна назвала впоследствии B -аттракторами. Но в случае бесконечномерного фазового пространства пересечение (21) может оказаться пустым даже для замкнутых множеств $V_t(B_{R_0})$ и, тем самым, вся конструкция может оказаться несодержательной.

Но, как доказывает О. А. Ладыженская в ее первой, основополагающей работе [126] 1972 года, операторы V_t при $t > 0$ обладают свойством не только непрерывности, но и компактности (это важное свойство операторов V_t О. А. Ладыженская включит в определение полугрупп первого класса). Это соответствует свойству “мгновенного сглаживания”, давно известному для уравнений теплопроводности. Им же обладает, как оказалось, и система Навье–Стокса.

Итак, О. А. Ладыженская доказала, что множество $\mathcal{M}$ непусто и компактно. Оно притягивает равномерно любое ограниченное подмножество фазового пространства. Далее, О. А. Ладыженская доказывает, что $V_t \mathcal{M} = \mathcal{M}$, $\forall t > 0$ (т.е. $\mathcal{M}$ инвариантно относительно преобразований V_t). Все стационарные, периодические, квазипериодические и почти периодические (по t) решения лежат в $\mathcal{M}$. В качестве наиболее важного свойства множества $\mathcal{M}$ (которые она поставила в заглавие работы) она выделила следующее: система Навье–Стокса ведет себя на $\mathcal{M}$ как конечномерная динамическая система, т.е. через каждую точку $a \in \mathcal{M}$ проходит полутраектория $V(t; a) = V_t(a)$, $t \in \mathbb{R}_+^1$, лежащая в $\mathcal{M}$, и она единственным образом продолжается до полной траектории $V(t; a)$, $t \in \mathbb{R}^1$, тоже лежащей в $\mathcal{M}$. Более того, полные траектории непрерывно зависят от $a \in \mathcal{M}$. Такая продолжимость полутраекторий (решений задачи (18)) на отрицательные времена присуща только точкам $\mathcal{M}$. Наконец, О. А. Ладыженская находит следующую числовую характеристику “конечномерности” $\mathcal{M}$. По Ω , f , ν находится число N такое, что если проекции $\mathcal{P}^N V(t; a')$, $\mathcal{P}^N V(t; a'')$ двух полных траекторий $V(t; a')$ и $V(t; a'')$, лежащих в $\mathcal{M}$, на конечномерное подпространство $\mathcal{P}^N X$, натянутое на N первых собственных функций оператора Стокса Δ , совпадают, то совпадают и сами траектории.

В конце статьи [126] О. А. Ладыженская выражает свое мнение, что именно $\mathcal{M}$ является тем множеством, на котором надо изучать инвариантные меры, свойства перемешивания и другие свойства, исследуемые в классической теории динамических систем.

В заключении статьи говорится, что предложенный в работе подход применим ко многим другим задачам с диссипацией, в частности, к задачам параболического типа. Он действительно открывал новую главу в теории УрЧП – теорию устойчивости “в целом”, теорию аттракторов. Но в отличие от описанных выше работ О. А. Ладыженской по разрешимости задачи (18), вызвавших мгновенную реакцию в разных странах (появление большого числа публикаций), работа [126] была понята не скоро, она долгое время не имела продолжения. Только спустя четыре года появилась первая реакция на нее – работа Малле-Парэ, посвященная оценке хаусдорфовой размерности инвариантных (точнее, полуинвариантных) множеств. Там сказано, что его абстрактная теорема гарантирует некоторую мажоранту для хаусдорфовой размерности множества $\mathcal{M}$, построенного в [126], а также сказано, что в [126] доказано конечномерность $\mathcal{M}$. Это последнее не вполне точно: Ольга Александровна не ставила перед собой вопрос об оценке хаусдорфовой размерности $\mathcal{M}$ – она иначе охарактеризовала “конечномерность” $\mathcal{M}$, хотя позже она показала, как с помощью имевшихся в [126] оценок и соображений оцениваются хаусдорфова и фрактальная размерности $\mathcal{M}$ [159].

Прошло еще четыре года и появилась статья Фойаша и Темама и многие другие публикации этих же авторов, а также работы М. И. Вишика с его коллегами. В них повторяется часть результатов [126] (без упоминания об этой работе), доказываются аналогичные результаты для параболических уравнений, выявляются и новые свойства $\mathcal{M}$, связанные с наличием у рассматриваемых задач функций Ляпунова.

О. А. Ладыженская публикует обзорную статью [179] в УМН. В ней она пишет о нелогичности называть множество $\mathcal{M}$ “максимальным аттрактором”, ибо таковым является все X . Множество же $\mathcal{M}$ является минимальным аттрактором или лучше называть его “глобальным минимальным B -аттрактором”. Эпитет “минимальный” при этом указывает на то, что любое подмножество $\mathcal{M}$ уже не притягивает все X , а буква B подчеркивает, что любое ограниченное подмножество (bounded set) X притягивается к $\mathcal{M}$ равномерно. Критикует О. А. Ладыженская и постановки задач о нахождении аттракторов, в которых заранее предписываются аттрактору те или иные свойства (например, свойство компактности). Конечно, в тех случаях, когда ответ уже известен (как в случае задачи (18)), можно с самого начала искать компактный аттрактор – ответ будет прежний, но при изучении новой, еще неисследованной задачи, не следует себя “связывать” теми или иными предписаниями свойств еще не найденного объекта. И при создании теории аттракторов для УрЧП – этого нового раздела в теории УрЧП, Ольга Александровна остается верной своему принципу – максимально разумной свободе выбора. Для задачи (18) постановка была такая: найти минимальное подмножество пространства X , к которому равномерно притягивается любое ограниченное подмножество X . Никаких других свойств искомому множеству она не предписывала, и эта широта подхода тоже обусловила успех развития теории аттракторов.

Лишь с 1988 года О. А. Ладыженская получила возможность принимать приглашения из разных стран и ездить самостоятельно на конференции. Осенью 1988 года она прочла по приглашению Академии Линчеи в Римском университете курс лекций по аттракторам, предназначенный для специалистов, работающих в разных направлениях математики. В соответствии с этим результаты по аттракторам для уравнений Навье–Стокса излагаются в нем в качестве приложения общей теории аттракторов для абстрактных полугрупп в бесконечномерных гильбертовых пространствах, обладающих свойством сглаживания за конечный или бесконечный промежуток времени. Она назвала такие полугруппы полугруппами первого и второго класса соответственно. Полугруппа разрешающих операторов для двумерных уравнений Навье–Стокса относится к полугруппам первого класса. Для тех и других она доказала аналоги предложений, установленных в работе 1972 года, включая новые, более точные оценки хаусдорфовой и фрактальной размерностей аттракторов $\mathcal{M}$. Ее лекции были изданы в Англии в виде монографии “Аттракторы для полугрупп и эволюционных уравнений” издательством Кембриджского университета [189] (по техническим причинам они появились лишь в 1991 году).

Нельзя не остановиться еще на одном направлении деятельности О. А. Ладыженской, связанном с вязкими несжимаемыми жидкостями. О. А. Ладыженская считает, что уравнения Навье–Стокса в трехмерном случае с очень гладкими начальными данными не гарантируют ограниченности и даже однозначности их решений на произвольном промежутке времени. Мы уже отмечали, что она построила пример потери единственности решений Хопфа при краевом условии “скольжения” (такие решения существуют при всех положительных t), и потому для детермини-

рованности требуется какой-либо принцип выбора. Э. Хопф, а потом и другие ученые, включая О. А. Ладыженскую, пытались сформулировать такой принцип, но без успеха. Вместо него Ольга Александровна предложила заменить уравнения Навье–Стокса другими уравнениями, которые отличаются от уравнений Навье–Стокса лишь при больших градиентах скоростей. Для них она доказала глобальную однозначную разрешимость при разумно широких предположениях о данных задачи. Точнее, она выделила общий класс систем гидродинамического типа (назвав их модифицированными уравнениями Навье–Стокса), для которого имеет место глобальная однозначная разрешимость основных начально-краевых задач. Эти результаты составили основу ее большого доклада на Международном математическом конгрессе в 1966 г. [103].

Характерной особенностью модифицированных уравнений Навье–Стокса является нелинейная связь между тензором напряжений Коши и тензором скоростей деформаций (симметричная часть градиента поля скоростей). Аналогичные уравнения используются для широкого класса неньютоновских жидкостей, таких, например, как обобщенные ньютоновы жидкости (вязкость зависит только от модуля тензора скоростей деформаций).

Долгое время эта проблематика была не очень популярна ввиду ее сложности, и лишь в последнее десятилетие она привлекла внимание многих математиков, пытавшихся улучшить старые результаты О. А. Ладыженской. Да и сама О. А. Ладыженская внесла большой вклад в эту деятельность, вернувшись к ней тридцать лет спустя. С присущей ей элегантностью Ольга Александровна дала новое красивое доказательство своей знаменитой работы 1972 года, которое не использует второго основного неравенства для оператора Стокса [192]. Это дало немедленные результаты в исследовании аттракторов для двумерных модифицированных уравнений Навье–Стокса, включая модель Бингама с недифференцируемой диссипацией [206]. В работе [219] хаусдорфова размерность аттракторов оценена для двумерных модифицированных уравнений Навье–Стокса. Трудность этой задачи связана с нелинейностью эллиптической части соответствующих уравнений.

Большой цикл работ, выполненный О. А. Ладыженской совместно с одним из авторов настоящей статьи, посвящен исследованию квазилинейных уравнений второго порядка эллиптического и параболического типов и связанных с ними многомерных задач вариационного исчисления. На развитие этого направления в большой степени повлияли XIX и XX проблемы Гильберта, сформулированные в 1900 году. Первая из них касалась свойств регулярности решений эллиптических уравнений, а во второй ставился вопрос о разрешимости, возможно, в некотором обобщенном смысле, вариационных задач, для которых соответствующее уравнение Эйлера эллиплично.

Уже в начале 1900-х годов С. Н. Бернштейн предложил подход к исследованию классической разрешимости задачи Дирихле для квазилинейных уравнений второго порядка, основанный на априорных оценках решений, и описал условия, при которых для определенного класса уравнений можно ожидать наличия таких оценок. Эти условия, состоящие в ограничениях на порядки роста функций, образующих уравнения, по градиентам решений, теперь принято называть естественными (или структурными) ограничениями роста. Для случая двух независимых переменных Бернштейн получил требуемые оценки в предположении, что уравнение явно не содержит неизвестную функцию.

Определяющая роль априорных оценок для доказательства разрешимости краевых задач стала несомненной после работ Ж. Лерэ и Ю. Шаудера. Разработанные ими топологические методы нахождения неподвижных точек компактных отображений позволили доказывать существование решений в условиях неединственности. Для квазилинейных уравнений второго порядка проблема существования классических решений свелась к получению априорных оценок решений в пространстве Гёльдера $C^{1+\alpha}$. Реализовать эту программу в то время удалось лишь для специального вида уравнений с двумя независимыми переменными. Вообще вплоть до середины 50-х годов результаты по классической разрешимости краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений касались только задачи Дирихле в двумерном случае. Однако и здесь оставалось невыясненным, возможно ли доказать существование решений в предположении лишь естественных ограничений роста.

Подход, связанный с концепцией обобщенного решения, впервые обозначился в задачах вариационного исчисления. Именно здесь была четко осознана необходимость рассмотрения решений, обладающих не классическими, а обобщенными производными. Усилиями многих выдающихся

математиков, включая Д. Гильберта, А. Лебега, Л. Тонелли, Ч. Морри, А. Г. Сигалова, были созданы прямые методы вариационного исчисления, позволяющие доказывать существование обобщенных решений уравнений Эйлера с помощью минимизации соответствующих функционалов. При этом число n независимых переменных в задаче роли не играло. Иначе обстояло дело с проблемой регулярности функций, реализующих минимум, где роль размерности оказалась весьма существенной. К началу 40-х годов Морри удалось провести исследование регулярности для случая $n = 2$.

Атака на многомерные задачи началась в середине 50-х годов. В 1955 году на физическом факультете Ленинградского университета О. А. Ладыженская читает спецкурс, содержащий полученные ею новые результаты по квазилинейным параболическим уравнениям, опубликованные затем в [30], [43]. Эти работы стали важным шагом в изучении многомерных уравнений. В них приобретает достаточно общую форму метод вспомогательных функций, ведущий начало от работ С. Н. Бернштейна. О. А. Ладыженская ставит перед собой задачу разгадать секрет нахождения вспомогательных функций, позволяющих оценивать максимум модуля градиента решения в случае любого числа независимых переменных. Она сводит ее к решению нелинейного дифференциального неравенства для функции одной переменной и доказывает его разрешимость при условии малости значений некоторого параметра. Это позволило оценить максимум модуля градиента по пространственным переменным решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка общего вида, если только известна оценка модуля непрерывности самого решения. В работах [30], [40] она применяет полученный ею результат к более узкому классу квазилинейных эллиптических и параболических уравнений, для которого не требуется предварительной оценки колебаний решения. Путь к получению последней наметился после появления, почти одновременно с [30], статей Дж. Нэша и Е. Де Джорджи, в которых для простейших линейных дивергентных уравнений с ограниченными измеримыми коэффициентами соответственно параболического и эллиптического типов была установлена оценка гельдеровской нормы решений. Отсюда вытекала регулярность обобщенного решения уравнения Эйлера, соответствующего функционалу $\int_{\Omega} F(u_x) dx$, в предположении равномерной эллиптичности уравнения, точнее, при условии, что матрица вторых производных функции $F(p)$ равномерно ограничена сверху и равномерно положительна при всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Идеи Де Джорджи получили дальнейшее развитие в работах [52], [55], [56], [58], [61], [63]–[67]. Результаты этих исследований составили основное содержание двух монографий по теории квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов [74], [129], [92] (последняя написана совместно с В. А. Солонниковым). Для квазилинейных уравнений дивергентного вида в этих работах была построена достаточно полная теория и исследована глобальная разрешимость классических краевых задач при естественных ограничениях роста. Более того, разработанные авторами [74] методы позволили для уравнений дивергентного вида проследить зависимость гладкости обобщенных решений от гладкости данных. В частности, было доказано, что при естественных ограничениях на порядки роста регулярность слабых экстремалей многомерных регулярных вариационных задач полностью определяется гладкостью интегранта. Этим в определенном смысле было завершено исследование XIX и XX проблем Гильберта для уравнений второго порядка. Были также выделены классы квазилинейных систем с диагональной главной частью и специальной структурой квадратичных по градиенту членов, и показано, что для них сохраняются свойства, присущие скалярным дивергентным уравнениям. Позднее такие системы стали предметом детального исследования в работах по гармоническим отображениям многообразий.

В книгах [74], [92], [129] излагается также ряд глубоких результатов по теории квазилинейных уравнений общего, не дивергентного, вида. Однако для них полностью устранить неестественные ограничения и довести результаты до той же степени общности, что и в дивергентном случае, удалось позднее, в начале 80-х годов [153], [154], [156]. Это потребовало привлечения техники, разработанной Н. В. Крыловым и М. В. Сафоновым для исследования линейных уравнений не дивергентного вида с ограниченными измеримыми коэффициентами. В работах [164], [168], [169], [170], [175], [177], [182] условия на данные еще более ослабляются, допускается наличие суммируемых особенностей по независимым переменным и исследуется разрешимость задачи Дирихле в пространствах Соболева.

Методы, разработанные в монографиях [74], [92], [129], оказались эффективными и при изучении более широких классов уравнений, содержащих неравномерно эллиптические операторы типа оператора средней кривизны [94], [102], [115], [197]. Геометрической тематике посвящены также совместные работы О. А. Ладыженской с Н. М. Ивочкиной. В 1994–1997 гг. ими опубликована серия работ, в которых проведено исследование глобальной классической разрешимости первой начально-краевой задачи для нелинейных уравнений параболического типа, описывающих потоки, порождаемые симметрическими функциями гессiana искомой поверхности или ее главными кривизнами.

Мы не описываем здесь многие работы О. А. Ладыженской, не составившие основу для монографий или обзорных статей. Всего ею опубликовано более 250 работ, среди них 7 монографий, а также учебник “Краевые задачи математической физики”. В основу учебника легли лекции, которые Ольга Александровна более четверти века читала на физическом и математико-механическом факультетах университета. На этих лекциях О. А. Ладыженская рассказывала свои главные результаты, старалась найти общепонятные мотивировки проблем, которыми она занималась, и простые доказательства, базирующиеся только на главных свойствах изучаемых объектов. Ее лекции и книги воспитали немало активно работающих математиков. Аспирантами О. А. Ладыженской были Л. Д. Фаддеев, Н. Н. Уральцева, В. С. Буслаев; среди ее учеников В. А. Соловников, К. К. Головкин, А. В. Иванов, А. П. Осолков, В. Я. Ривкинд, Л. В. Капитанский и многие другие.

Следует особо подчеркнуть, что О. А. Ладыженская стимулирует интерес молодых математиков к самым разнообразным проблемам математической физики, в том числе и таким, над которыми она непосредственно не работает. Так в середине 50-х годов она привлекла внимание ленинградцев к обратным задачам теории рассеяния в многомерном случае, сделала доклад на городском семинаре по работам А. Я. Повзнера, В. А. Марченко, И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана, Т. Като. В 60-е годы она собрала молодых специалистов по теории дифракции В. М. Бабица, В. С. Булдырева, И. А. Молоткова, а также своего аспиранта В. С. Буслаева, студента А. Т. Рамма и некоторых других молодых людей для изучения того, что сделано по строгому анализу задач дифракции. Этот семинар принес замечательные результаты: сначала В. С. Буслаев, а вскоре и В. М. Бабица дали строгие обоснования (разные по используемому аналитическому аппарату) перехода от волновой оптики в геометрическую в случае двумерной задачи об освещении выпуклого тела точечным источником. Через несколько лет Буслаев и Бабица смогли перенести свои построения на многомерный случай. О. А. Ладыженская радовалась появлению этих результатов – ранее специалистами по дифракции эта область считалась недоступной для строгого математического исследования.

Большое влияние, которое Ольга Александровна оказала на развитие теории уравнений с частными производными и математической физики, признано всем мировым математическим сообществом. Ее научные заслуги отмечены премиями Ленинградского университета 1954 г. и 1961 г., премией имени П. Л. Чебышёва АН СССР 1966 г., Государственной премией СССР 1969 г., премией имени С. В. Ковалевской РАН 1992 г. В 1981 г. О. А. Ладыженская избирается членом-корреспондентом, а в 1990 г. – действительным членом Академии наук СССР. С 1985 года Ольга Александровна является иностранным членом Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina, с 1989 года – Accademia Nazionale dei Lincei (Италия), в 2001 году она избрана иностранным членом Американской академии наук и искусств в Беркли. В минувшем году ей присуждена премия имени А. Ф. Иоффе Правительства Санкт-Петербурга и Большая золотая медаль имени М. В. Ломоносова РАН, она избрана почетным доктором Боннского университета.

Свой юбилей Ольга Александровна встречает, плодотворно работая над математической теорией вязкой несжимаемой жидкости. Она по-прежнему является главным действующим лицом семинара по математической физике имени В. И. Смирнова. Ольга Александровна много путешествует, читая лекции в ведущих университетах Европы и США.

Коллеги и ученики выражают Ольге Александровне свою благодарность и восхищение, желают крепкого здоровья и долгих лет жизни.

Г. А. Серёгин, Н. Н. Уральцева

СПИСОК РАБОТ О. А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

1949–1959

- [1] Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей // Автореф. дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. Л.: ЛГУ, 1949
- [2] Метод Фурье для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74. № 3. С. 417–420
- [3] О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Матем. сб. 1950. Т. 27. № 2. С. 175–184
- [4] О методе Фурье для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1950. Т. 76. № 6. С. 765–768
- [5] О решении смешанной задачи для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. № 4. С. 647–650
- [6] О замыкании эллиптического оператора // Докл. АН СССР. 1951. Т. 79. № 5. С. 723–725
- [7] О решении смешанной задачи для гиперболических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 3. С. 545–562
- [8] Об интегралах гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 79. № 6. С. 925–927
- [9] Смешанная задача для гиперболических уравнений // УМН. 1951. Т. 6. № 1. С. 168–169
- [10] О сходимости рядов Фурье, определяющих решение смешанной задачи для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85. № 3. С. 481–484
- [11] Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей // Учен. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук. 1952. № 144, в. 23. С. 192–246
- [12] Решение смешанной задачи с помощью конечных разностей // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85. № 4. С. 705–708
- [13] Смешанная задача для линейных гиперболических уравнений // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1952
- [14] О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для гиперболических систем // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 607–610
- [15] Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехтеоретиздат, 1953
- [16] О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97. № 3. С. 395–398 (совм. с А. А. Киселевым)
- [17] О решении линеаризованных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 6. С. 1161–1164
- [18] О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96. № 3. С. 433–436
- [19] Об одном способе приближенного решения задачи Лаврентьева–Бицадзе // УМН. 1954. Т. 9. № 4. С. 187–189
- [20] О разрешимости нестационарных задач для уравнений параболического и гиперболического типов (резюме доклада на заседании ММО) // УМН. 1955. Т. 10. № 2. С. 210
- [21] О решении нестационарных операторных уравнений различных типов // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 2. С. 207–210
- [22] Об одном методе доказательства теорем существования и единственности решения задачи Коши для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 1. С. 17–20
- [23] Применение функционального анализа для доказательства существования решений краевых задач для уравнений с частными производными трех основных типов // УМН. 1955. Т. 10. № 4. С. 200–201
- [24] Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1955. № 11, в. 4. С. 23–29
- [25] Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений // УМН. 1956. Т. 11. № 6. С. 41–97 (совм. с М. И. Вишиком)
- [26] Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. Т. 2. М., 1956. С. 13–16
- [27] О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении “коэффициента вязкости” к нулю // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111. № 2. С. 291–294

- [28] О решении нестационарных операторных уравнений // Матем. сб. 1956. Т. 39. № 4. С. 491–524
- [29] Обобщенные решения // Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 2. М., 1956. С. 91–96
- [30] Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 5. С. 636–639
- [31] Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 123–148
- [32] О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении “коэффициента вязкости” к нулю // Труды ММО. 1957. Т. 6. С. 465–480
- [33] О принципе предельной амплитуды // УМН. 1957. Т. 12. № 3. С. 161–164
- [34] О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. № 5. С. 665–680 (совм. с А. А. Киселевым)
- [35] Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1957. № 7, в. 2. С. 104–120
- [36] К теории возмущений непрерывного спектра // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 6. С. 1187–1190 (совм. с Л. Д. Фаддеевым)
- [37] О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых многомерных вариационных задач // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 5. С. 956–959
- [38] О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Матем. сб. 1958. Т. 45. № 2. С. 123–158
- [39] О нестационарных уравнениях Навье–Стокса // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1958. № 19, в. 4. С. 9–18
- [40] О решении в целом задачи Коши для плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости и о теореме единственности для простейшей системы газовой динамики // УМН. 1958. Т. 13. № 2. С. 241–242
- [41] Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1958. № 7, в. 2. С. 60–69
- [42] Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 3. С. 427–429
- [43] Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений // Труды ММО. 1958. Т. 7. С. 149–177
- [44] Стационарная краевая задача для вязкой несжимаемой жидкости // УМН. 1958. Т. 13. С. 219–220
- [45] Исследование уравнения Навье–Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости // УМН. 1959. Т. 14. № 3. С. 75–97
- [46] О разрешимости нестационарных задач магнитной гидродинамики // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 1. С. 26–28 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [47] Первая краевая задача для квазилинейных гиперболических уравнений в целом // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. Т. 4. М., 1959. С. 29–32
- [48] Решение в целом задачи Коши для нестационарного плоского течения вязкой несжимаемой жидкости // Труды ММО. 1959. Т. 8. С. 71–81
- [49] Стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в трубе // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 3. С. 551–553
- [50] Solution “in the large” of the nonstationary boundary value problem for the Navier–Stokes system with two space variables // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. № 3. P. 427–433

1960–1969

- [51] Нелинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 229

- [52] О вариационной задаче и квазилинейных эллиптических уравнениях со многими независимыми переменными // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 6. С. 1330–1333 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [53] О решениях нестационарной краевой задачи для уравнений Навье–Стокса // Труды МИАН. 1960. Т. 59. С. 100–114 (совм. с К. К. Головкиным)
- [54] Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Труды МИАН. 1960. Т. 59. С. 115–173 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [55] Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными // УМН. 1961. Т. 16. № 1. С. 19–90 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [56] Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 544–547 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [57] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961
- [58] О дифференциальных свойствах ограниченных обобщенных решений многомерных квазилинейных эллиптических уравнений и вариационных задач // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 1. С. 29–32 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [59] О разрешимости в целом краевых задач для уравнений Навье–Стокса и квазилинейных параболических уравнений // 4-й Всесоюзный математический съезд: Аннот. пленарн. докл. Л., 1961
- [60] О регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 45–47 (совм. с Н. Н. Уральцева)
- [61] On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. № 3. P. 481–495 (with N. N. Ural'tseva)
- [62] Квазилинейные уравнения эллиптического и параболического типов // International Congress of Mathematicians, Stockholm, 1962
- [63] Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 1. С. 5–52 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [64] Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 1. С. 753–780 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [65] Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений второго порядка общего типа // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 1. С. 28–30 (совм. с Н. Н. Уральцева)
- [66] Краевая задача для линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического типа. III // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. № 1. С. 161–240 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [67] О допустивых расширениях понятия решений для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астроном. 1963. № 1, в. 1. С. 10–25 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [68] О разрешимости в целом краевых задач для уравнений и квазилинейных параболических уравнений и уравнений Навье–Стокса // Труды 4-го Всесоюзного математического съезда. Т. 1: Пленарные доклады. Л., 1963. С. 134–157
- [69] О линейных и квазилинейных уравнениях и системах эллиптического и параболического типов // СО АН СССР, Материалы к совм. сов.-амер. симп. по уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1963. С. 8 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [70] Équations quasi-linéaires de types elliptique et parabolique // Les équations aux dérivées partielles, Paris, 1962. Colloques Internat. Centre Nat. Recherche Sci. V. 117. Paris, 1963. P. 61–73
- [71] The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows. Revised English ed. New York: Gordon & Breach, 1963
- [72] Дифференциальные свойства решений линейных и квазилинейных уравнений 2-го порядка и разрешимость для них основных краевых задач “в целом” // Первая летняя матем. школа (Канев, 1963), ч. 2. Киев: Наукова думка, 1964. С. 3–44
- [73] Исправление к тому 59 Трудов МИАН // Труды МИАН. 1964. Т. 79. С. 318 (совм. с К. К. Головкиным, В. А. Солонниковым)
- [74] Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964 (совм. с Н. Н. Уральцевой)

- [75] О классической разрешимости задач дифракции для уравнений эллиптического и параболического типов // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. №3. С. 513–515 (совм. с В. Я. Ривкиндом, Н. Н. Уральцевой)
- [76] О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155. №6. С. 1258–1261 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [77] О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов // Труды МИАН. 1964. Т. 73. С. 172–220 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [78] О результатах последнего времени по квазилинейным уравнениям эллиптического и параболического типов // УМН. 1964. Т. 19. №6. С. 223–236 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [79] Об обобщенных решениях линейных эллиптических и параболических уравнений и их дифференциальных свойствах // Труды 4-го Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Л.: Наука, 1964. С. 382 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [80] О линейных и квазилинейных уравнениях параболического типа // Тез. докл. Всесоюз. межвуз. конф. по применению методов функц. анализа к решению нелинейных задач. Баку: Изд-во АН АзССР, 1965. С. 17 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [81] О свойствах обобщенных решений краевых задач для уравнений движения вязкой жидкости (лекция) // Семинар “Теория автоматического управления”. Киев, 1965. С. 3–33
- [83] Об уравнениях смешанного типа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1965. №19, в. 4. С. 38–46 (совм. с Л. Ступялисом)
- [84] Funktional analytische Untersuchungen der Navier–Stokes Gleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1965
- [85] Метод сеток для уравнений Навье–Стокса // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. №2. С. 309–311 (совм. с А. Крживицки)
- [86] Некоторые свойства обобщенных решений параболических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. №1. С. 17–20 (совм. с А. В. Ивановым, А. Л. Трескуновым, Н. Н. Уральцевой)
- [87] О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред // Междунар. математический конгресс. Тезисы докладов. М., 1966. С. 149
- [88] Обобщенные решения параболических уравнений 2-го порядка // Труды МИАН. 1966. Т. 92. С. 57–92 (совм. с А. В. Ивановым, А. Л. Трескуновым, Н. Н. Уральцевой)
- [89] Метод сеток для нестационарных уравнений Навье–Стокса // Труды МИАН. 1966. Т. 92. С. 93–99 (совм. с А. Крживицки)
- [90] О классичности обобщенных решений общих нелинейных нестационарных уравнений Навье–Стокса // Труды МИАН. 1966. Т. 92. С. 100–115
- [91] О классической разрешимости задач дифракции // Труды МИАН. 1966. Т. 92. С. 116–146 (совм. с В. Я. Ривкиндом, Н. Н. Уральцевой)
- [92] Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967
- [93] О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185
- [94] О некоторых классах неравномерно эллиптических уравнений // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 186–191 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [95] О новых уравнениях для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач // Труды МИАН. 1967. Т. 102. С. 85–104
- [96] Об исследованиях гладкости по t слабых решений уравнений параболического типа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1967. №7, в. 2. С. 64–63 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [97] The Mathematical Problems in Fluid Mechanics. V. 42. Grunzigen: PWN, 1967 (with B. Bójarski, M. Burnat)
- [98] Regularity of the generalized solutions of the general nonlinear and nonstationary Navier–Stokes equations // Mathematical Problems in Fluid Mechanics. Warsaw: PWN, 1967. P. 61–86
- [99] О модификациях уравнений Навье–Стокса для больших градиентов скоростей // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 125–154

- [100] Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье–Стокса при наличии осевой симметрии // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 155–177
- [101] Начально-краевая задача для уравнений Навье–Стокса в областях с меняющейся со временем границей // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т. 11. С. 97–128
- [102] О некоторых классах неравномерно эллиптических уравнений // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1968. Т. 11. С. 129–143 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [103] О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред // Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968. С. 560–573
- [104] Письмо в редакцию. К статье авт. “Об уравнениях смешанного типа”, опубликованной в Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон., т. 19, № 4 // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон. 1968. № 1, в. 1. С. 155–156 (совм. с Л. Ступялисом)
- [105] Linear and Quasilinear Elliptic Equations. New York: Academic Press, 1968 (with N. N. Uraltseva)
- [106] Équations aux dérivées partielles de type elliptique. Paris: Dunod, 1968 (with N. N. Uraltseva)
- [107] Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968 (with N. N. Uraltseva)
- [108] Пример неединственности в классе слабых решений Хопфа для уравнений Навье–Стокса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 1. С. 240–247
- [109] Устойчивые разностные схемы для уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1969. Т. 14. С. 92–126
- [110] О тотальных оценках первых производных по x решений квазилинейных уравнений // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1969. Т. 14. С. 127–155 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [111] On the linear and quasilinear parabolic equations // Differential Equations and their Applications. Equadiff II: Proceedings of the conference, Bratislava, 1966. Bratislava: Slov. Ped. Nakl., 1967. P. 273–279
- [112] The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows. 2nd English ed., revised and enlarged. New York: Gordon & Breach, 1969

1970–1979

- [113] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд. 2-е, перераб., доп. М.: Наука, 1970
- [114] Сеточный метод решения уравнений Навье–Стокса в цилиндрических координатах // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1970. № 13, в. 3. С. 37–41 (совм. с К. П. Ивановым, В. Я. Ривкиндом)
- [115] Local estimates for gradients of solutions of nonuniformly elliptic and parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1970. V. 23. P. 677–703
- [116] Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН. 1971. Т. 116. С. 101–136 (совм. с Л. Ступялисом)
- [117] О квазилинейных неравномерно эллиптических уравнениях // Elliptische Differentialgleichungen, II (Kolloquium, 17–24 Aug. 1969 in Berlin). Berlin: Akademie-Verlag, 1971. P. 167–175
- [118] О методе переменных направлений для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 2. С. 259–268 (совм. с В. Я. Ривкиндом)
- [119] О начально-краевой задаче для уравнений Навье–Стокса в областях, сжимающихся в точку при $t \rightarrow +0$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1971. Т. 21. С. 52–64 (совм. с Ю. Копилевичем)
- [120] О разрешимости в малом нестационарных задач для несжимаемых идеальных и вязких жидкостей и исчезающей вязкости // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1971. Т. 21. С. 65–78
- [121] О сходящихся разностных схемах для уравнений Навье–Стокса // Числ. методы в механике сплошной среды. 1971. Т. 2. № 4. С. 55–73 (совм. с В. Я. Ривкиндом)

- [122] Об устойчивости разностных схем для уравнений Навье–Стокса в цилиндрических координатах и методе прогонки для них // Труды МИАН. 1971. Т. 116. С. 71–94 (совм. с К. П. Ивановым, В. Я. Ривкиным)
- [123] On convergent finite differences schemes for initial-boundary value problems for Navier–Stokes equations // Fluid Dynamics Transactions. V. 5. Part II. IXth Symposium on Advanced Problems and Methods in Fluid Mechanics (Kazimierz, Poland, Sept. 1969). Warszawa: PWN, 1971. P. 125–134 (with W. Fiszdon et al. (ed.))
- [124] The survey of the results and urgent problems, connected with the Navier–Stokes equations (on the hydrodynamic stability) // Fluid Dynamics Transactions. V. 6. Part I: Survey papers. Proceedings of the Xth Symposium on Advanced Problems and Methods in Fluid Mechanics (Rynia, Poland, Sept. 1971). Warszawa: PWN, 1971. P. 275–291 (with W. Fiszdon et al. (ed.))
- [125] О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. № 2. С. 318–320
- [126] О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115
- [127] Вопросы теории разностных схем для уравнений Навье–Стокса и некоторые результаты их численного решения // Труды IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости (Рига, 1972). Новосибирск, 1973. С. 3–16 (совм. с В. Я. Ривкиным)
- [128] Краевые задачи математической физики. Учебн. пос.. М.: Наука, 1973
- [129] Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. 2-е, перераб. М.: Наука, 1973 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [130] О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 46–83 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [131] О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 1973). Ереван, 1974. С. 83–130 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [132] Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 52–109 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [133] Об одном усилении результатов по разрешимости задачи Дирихле для равномерно эллиптических квазилинейных уравнений второго порядка // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон. 1975. № 1, в. 1. С. 61–72 (совм. с А. В. Ивановым, Н. М. Ивочкиной)
- [134] Mathematical analysis of Navier–Stokes equations for incompressible liquids // Ann. Rev. Fluid Mech. 1975. V. 7. P. 249–272
- [135] О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 81–116 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [136] О ряде результатов последнего времени по уравнениям Навье–Стокса // 4-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (Киев, 1976) (Аннот. докл.). Киев: Наукова думка, 1976. С. 65–66
- [137] О свободной поверхности слоя жидкости над твердой сферой // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон. 1976. № 13, в. 3. С. 25–30 (совм. с В. Г. Осмоловским)
- [138] Об эволюции мер, определяемой уравнениями Навье–Стокса, и о разрешимости задачи Коши для статистического уравнения Хопфа // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 26–29
- [139] Об эволюции мер, определяемой уравнениями Навье–Стокса, и о разрешимости задачи Коши для статистического уравнения Хопфа // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 3–24 (совм. с А. М. Вершиком)
- [140] Об эволюции мер, определяемой уравнениями Навье–Стокса и о разрешимости задачи Коши для статистического уравнения Хопфа (Тезисы доклада на Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения И. П. Петровского) // УМН. 1976. Т. 31. № 5. С. 261

- [141] On the unique solvability of the initial value problem for viscous incompressible inhomogeneous fluid // Arch. Mech. Stosow 1976. V. 28. № 5–6. P. 1073–1075
- [142] О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1976. Т. 69. С. 77–102 (совм. с В. К. Калантаровым)
- [143] О разрешимости краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон. 1977. № 13, в. 3. С. 39–47 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [144] Sur l'évolution des mesures déterminées par les équations de Navier–Stokes et la résolution du problème de Cauchy pour l'équation statistique de E. Hopf // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1977. V. 4. № 2. P. 209–230 (with A. M. Vershik)
- [145] О стабилизации решений некоторого класса квазилинейных параболических уравнений при $t \rightarrow \infty$ // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. № 5. С. 1043–1052 (совм. с В. К. Калантаровым)
- [146] Some recent mathematical results concerning the Navier–Stokes equations // Arch. Math. Stosow. 1978. V. 30. № 2. P. 217–224 (sectional Paper for the 1976 IUTAM Congress)
- [147] Нахождение в неограниченных областях решений стационарных краевых задач для уравнений Навье–Стокса, имеющих бесконечную диссипацию // Докл. АН СССР. 1976. Т. 249. № 4. С. 828–831 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [148] О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье–Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле // Препринт ЛОМИ, Р-4-79, 1979 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [149] О предельных режимах для модифицированных уравнений Навье–Стокса в трехмерном пространстве // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 131–146
- [150] On formulation and solvability of boundary value problems for viscous incompressible fluids in domains with noncompact boundaries // Lecture Notes in Math. 1979. V. 703. P. 233–240 (Equadiff IV. Proceedings of the Czechoslovak Conference on Differential Equations and their Applications, Prague, 1977)

1980–1989

- [151] О нахождении незатухающих на бесконечности стационарных и нестационарных решений систем уравнений Стокса и Навье–Стокса (Резюме докл.) // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 151 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [152] О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье–Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 96. С. 117–160 (совм. с В. А. Солонниковым)
- [153] Об оценках гильбертовских норм для решений квазилинейных эллиптических уравнений недивергентного вида // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 144–145 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [154] Оценка гильбертовской нормы решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка общего вида // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 96. С. 161–168 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [155] Об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнений двумерных релятивистских киральных полей, принимающих значения в полных римановых многообразиях // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 110. С. 81–94 (совм. с В. И. Шубовым)
- [156] Оценки решений квазилинейных параболических уравнений недивергентного вида (Докл. в ММО) // УМН. 1980. Т. 36. № 4. С. 220 (совм. с Н. Н. Уральцева)
- [157] Résolution des équations de Stokes et Navier–Stokes dans des tuyaux infinis // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 1981. V. 292. № 4. P. 251–254 (with V. A. Solonnikov, H. True)
- [158] О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для диссипативных задач // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 4. С. 802–804
- [159] О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье–Стокса и других диссипативных систем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 137–155
- [160] О начально-краевой задаче для линеаризованных уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами // Труды МИАН. 1983. Т. 159. С. 37–40 (совм. с К. К. Голвкиным)

- [161] О принципе Коулмана нахождения стационарных точек инвариантных функционалов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 3. С. 529–532 (совм. с Л. В. Капитанским)
- [162] О принципе Коулмана нахождения стационарных точек инвариантных функционалов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 127. С. 84–102 (совм. с Л. В. Капитанский)
- [163] Оценки константы Гельдера для ограниченных решений квазилинейных параболических уравнений // Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. Киев: Наукова думка, 1983. С. 73–75 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [164] Об оценках $\max |u_x|$ для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1984. Т. 138. С. 90–108 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [165] Сферически-симметричные решения эвклидовых уравнений Янга–Миллса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 133. С. 126–132 (совм. с Л. В. Капитанский)
- [166] On Coleman's principle and its applications // Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. V. 3: Integrable Systems, Qualitative Methods, and Problems in Stochasticity. Proceedings of the 2nd international Workshop held in Kiev, 1983 / ed. R. Z. Sagdeev. Chur: Harwood, 1984. P. 1369–1373 (with L. V. Kapitanski)
- [167] On finding symmetrical solutions of field theory variational problems // Proceedings of the International Congress in Mathematicians in Warsaw, Aug. 16–24, 1983. V. 2. Warsaw / Amsterdam: PWN / North-Holland, 1984. P. 1315–1329 (with Zb. Ciesielski, C. Olech (ed.))
- [168] О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений при наличии особенностей // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 2. С. 275–279 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [169] Оценки константы Гельдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому и равномерно параболическому квазилинейному неравенству с неограниченными коэффициентами // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1985. Т. 147. С. 72–94 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [170] Оценки на границе области норм Гельдера производных решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида. Л., 1985
- [171] On the finiteness of the dimension of bounded invariant sets for the Navier–Stokes equations and other dissipative systems // Proceedings of the International Conference on Partial Differential Equations dedicated to Luigi Amerio on his 70th birthday, Milan / Como, June 7–9, 1982. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. V. 52, 1982. P. 193
- [172] The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. New York: Springer-Verlag, 1985. (Appl. Math. Sci. V. 49.)
- [173] О некоторых направлениях исследований, проведенных в лаборатории математической физики ЛОМИ // Труды МИАН. 1986. Т. 175. С. 217–245
- [174] Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 152. С. 72–85
- [175] Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности // УМН. 1986. Т. 41. № 5. С. 59–84 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [176] Estimates of Hölder constants for bounded solutions of second order quasilinear parabolic equations of nondivergent form // Adv. Math. Suppl. Stud. 1986. V. 10. P. 1–22
- [177] Липшицева оценка в граничных точках для решений квазилинейных уравнений дивергентного вида // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28. № 4. С. 145–153 (совм. с Н. Н. Уральцевой)
- [178] Минимальные глобальные B -аттракторы полугрупп и начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 1. С. 33–37
- [179] О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 25–60
- [180] О нахождении минимальных глобальных B -аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными // Препринт ЛОМИ Р-1-87. Л., 1987

- [181] Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1987. Т. 163. С. 105–129
- [182] Оценки на границе области первых производных функций, удовлетворяющих эллиптическому и параболическому неравенству // Труды МИАН. 1988. Т. 179. С. 102–125 (совм. с Н. Н. Уралцевой)
- [183] Аттракторы для квазилинейных параболических уравнений второго порядка общего вида // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 171. С. 163–173
- [184] О тривиальности гармонических отображений конечной энергии евклидовых пространств R^m , $m \geq 3$, в римановы многообразия // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 2. С. 114–115

1990–2002

- [185] Некоторые дополнения и уточнения к моим публикациям по теории аттракторов для абстрактных полугрупп // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1990. Т. 182. С. 102–112
- [186] Attractors for fully nonlinear parabolic equations of second order // Rend. Mat. Appl. (7). 1990. V. 10. № 4. P. 749–756
- [187] Attractors in problems of magneto-hydrodynamics // Topological Fluid Mechanics: Proceedings of the IUTAM Symposium, Cambridge, Aug. 13–18, 1989. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. P. 782–786 (with H. K. Moffatt, A. Tsinober (ed.))
- [188] Глобальные устойчивые разностные схемы и их аттракторы // Препринт ЛОМИ, Р-5-91. Л., 1991
- [189] Attractors for semi-groups and evolutions equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1991. (Lincei Lectures in Roma University, 1988.)
- [190] О новых оценках для уравнений Навье–Стокса и глобально устойчивых аппроксимациях // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1992. Т. 200. С. 98–109
- [191] Об одном способе приближенного решения начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1992. Т. 197. С. 87–119 (совм. с Г. А. Серегинным)
- [192] First boundary value problems for the Navier–Stokes equations in domains with nonsmooth boundaries // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1992. V. 314. № 4. P. 253–258
- [193] Some globally stable approximations for the Navier–Stokes equations and some other equations for viscous incompressible fluids // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1992. V. 315. № 4. P. 387–392
- [194] Some globally stable approximations for the Navier–Stokes equations and for some other equations for viscous incompressible fluids // Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1991–1992. Exp. IX. Palaiseau: Ecole Polytechnique, 1992. P. 11
- [195] Attractors for nonlinear parabolic systems // International conference on Differential Equations: Proceedings of the conference (EQADIFF'91), Barcelona, Aug. 26–31, 1991. V. 1. River Edge, NJ: World Scientific, 1993. P. 23–37 (with C. Perello et al (ed.))
- [196] On a global stability of the two-dimensional visco-plastic flows // Jyväskylä–St. Petersburg Seminar on Partial Differential Equations and Numerical Methods / ed. P. Neittaanmäki et al. V. 56. Jyväskylä: Univ. of Jyväskylä. Dept. of Math., 1993. P. 43–52 (with G. A. Seregin)
- [197] Локальные оценки градиентов решений простейшей регуляризации некоторого класса неравномерно эллиптических уравнений // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 75–92 (совм. с Н. Н. Уралцевой)
- [198] О параболических уравнениях, порождаемых симметрическими функциями собственных значений Гессiana или главными кривизнами искомой поверхности. Ч. 1. Параболические уравнения Монжа–Ампера // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 3. С. 141–160
- [199] Первая начально-краевая задача для эволюционных уравнений, порождаемых следами порядка m Гессiana искомой поверхности // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 300–303 (совм. с Н. М. Ивочкиной)
- [200] Attractors for the modifications of the three-dimensional Navier–Stokes equations // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1994. V. 346. № 1679. P. 173–190
- [201] On parabolic problems generated by some symmetric functions of the eigenvalues of the Hessian // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1994. V. 4. № 1. P. 19–29 (with N. M. Ivochkina)

- [202] On the property of instant smoothing of solutions of the Navier–Stokes questions and their approximations in the domains with non-smooth boundaries // *Analyse algébrique des perturbations singulières*. II. Paris: Hermann, 1994. P. 105–124
- [203] On some evolutionary fully nonlinear equations of geometrical nature // Abstract of the Noether Lecture, Zürich, August 1994, IMC
- [204] Первая начально-краевая задача для эволюционных уравнений, порожденных симметрическими функциями главных кривизн // Докл. РАН. 1995. Т. 340. № 2. С. 155–157 (совм. с Н. М. Ивочкиной)
- [205] Потoki, порожденные симметрическими функциями собственных значений Гессияна // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1995. Т. 221. С. 127–144 (совм. с Н. М. Ивочкиной)
- [206] On semigroup generated by initial-boundary value problems describing two-dimensional viscoplastic flows // *Nonlinear Evolutions Equations* / ed. N. N. Uraltseva. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 99–123 (with G. Seregin)
- [207] Estimation of the second derivatives for surfaces evolving under the action of their principal curvatures // *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1995. V. 6. P. 265–282 (with N. M. Ivochkina)
- [208] Из старых записных тетрадей о проблеме динамо // Современные проблемы механики сплошных сред. Ростов-на Дону: МП “Книга”, 1995. С. 237–243
- [209] О вискозных решениях нетотально параболических полностью нелинейных уравнений // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1996. Т. 233. С. 112–130
- [210] Оценка производных второго порядка на границе для гиперповерхностей, изменяющихся под действием их главных кривизн // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. С. 30–50 (совм. с Н. М. Ивочкиной)
- [211] Оценка производных первого порядка для решений некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. С. 109–131 (совм. с Н. М. Ивочкиной)
- [212] On inhomogeneous incompressible fluids and reverse Hölder inequalities // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4). 1997. V. XXV. P. 51–67 (with A. Arkhipova)
- [213] О глобальной однозначной разрешимости двумерных задач для водных растворов полимеров // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 243. С. 138–153
- [214] On global existence of weak solutions to some two-dimensional initial-boundary value problems for Maxwell fluids // *Appl. Anal.* 1997. V. 65. P. 251–255
- [215] О гладкости решений систем, описывающих потоки обобщенных ньютоновских жидкостей, и оценке размерностей аттракторов // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 5. С. 590–592 (совм. с Г. А. Серегиним)
- [216] On classical solvability of the first initial-boundary value problem for equations generated by curvatures // *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1997. V. 11. P. 375–395 (with N. M. Ivochkina)
- [217] Some results on modifications of three-dimensional Navier–Stokes equations // *Nonlinear Analysis and Continuum Mechanics. Papers from the conference in Honor of James Serin on his 65th birthday*, Ferrara, 1992. New York: Springer-Verlag, 1998. P. 73–84 (with G. Buttazzo et al. (ed.))
- [218] The John von Neumann lecture // Annual Meeting of SIAM, Toronto, Canada, 1998
- [219] О гладкости решений систем, описывающих течения обобщенных Ньютоновских жидкостей и об оценке размерностей их аттракторов // Изв. РАН. 1998. Т. 62. № 1. С. 59–122 (совм. с Г. А. Серегиним)
- [220] On disjointness of solutions to the MNS equations // *Amer. Math. Soc. Transl.* (2). 1999. V. 189. P. 159–179 (with G. A. Seregin)
- [221] The Leonardo da Vinci Lecture // March 1999, Milano
- [222] Об одном обобщении леммы Геринга // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 243. С. 138–153 (совм. с А. А. Архиповой)
- [223] О регулярности решений двумерных уравнений динамики жидкостей с нелинейной вязкостью // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 259. С. 145–166 (совм. с Г. А. Серегиним)
- [224] On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equations // *J. Math. Fluid Mech.* 1999. V. 1. № 4. P. 356–387 (with G. A. Seregin)

- [225] Коэрцитивные оценки для решений линеаризаций модифицированных уравнений Навье–Стокса // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 6. С. 738–740 (совм. с Г. А. Серегиним)
- [226] On multipliers in Hölder spaces with nonhomogeneous metrics // Methods Appl. Anal. 2000. V. 7. № 3. P. 465–472
- [227] On multipliers in Hölder spaces with nonhomogeneous metrics // Report № 16. Djursholm: Institute Mittag-Leffler, 2000
- [228] Теорема о мультипликаторах в неоднородных пространствах Гёльдера и некоторые ее приложения // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 156–174
- [229] О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье–Стокса и их исправлениях // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 259. С. 151–155
- [230] О мультипликаторах в пространствах Гёльдера и точных оценках решений линейных систем гидродинамического типа // Изв. ВУЗов, Северо-Кавказский регион. 2000. Т. 3. С. 88–90
- [231] Some estimates for axially symmetric solutions to the Navier–Stokes equations // Analysis and Approximations of Boundary Value Problems. Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2000 (with P. Neittaanmäki, L. Rivkind (ed.))
- [232] О связи задачи Стокса и разложений пространств $\overset{\circ}{W}_2^1$ и W_2^{-1} // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 4. С. 119–133
- [233] О коэрцитивных оценках для решений линейных систем гидродинамического типа // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2002. Т. 288. С. 104–133
- [234] On the basis keystones of the modern approach to the study of the Navier–Stokes equations // Abstracts of the lectures at the International Conference “Navier–Stokes equations and related topics” St.-Petersburg, Russia, 2002