Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, Фоковские факторизации и разложения пространств L^2 над общими процессами Леви, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 3–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:54:45

УДК 519.21+517.98

ФОКОВСКИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ L^2 НАД ОБЩИМИ ПРОЦЕССАМИ ЛЕВИ

А. М. Вершик, Н. В. Цилевич

Работа посвящена явному построению и изучению изометрии между пространствами квадратично интегрируемых функционалов от произвольного процесса Леви (процесса с независимыми значениями) и векторнозначного гауссовского белого шума. Получены явные формулы для этой изометрии на уровне мультипликативных функционалов и ортогональных разложений. Подробно рассмотрен центральный частный случай – изометрия между пространствами L^2 над процессом Пуассона и белым шумом, в частности, дана явная комбинаторная формула для ядра этой изометрии. Ключевую роль в наших рассмотрениях играют понятия метрической и гильбертовой факторизации, а также тесно связанные с ними понятия мультипликативных и аддитивных функционалов и логарифмирования в факторизациях. Полученные результаты позволяют ввести каноническую фоковскую структуру (аналог разложения Винера–Ито) в пространстве L^2 над произвольным процессом Леви. В работе также рассмотрены приложения к теории представлений групп токов и приведен пример нефоковской факторизации.

Библиография: 62 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение: постановка задачи и основные результаты	4
1.1. Предмет статьи	4
1.2. Структура факторизации	5
1.3. Изоморфизм факторизаций. Логарифмирование в факторизациях. Ядро	7
1.4. Связь с теорией представлений	8
1.5. Дальнейшее развитие темы	9
1.6. Нефоковские факторизации	9
1.7. Структура статьи	10
§ 2. Основные определения	10
2.1. Факторизации	10
2.2. Первые примеры: фоковские факторизации, гауссовские и пуассоновские процессы	14
2.3. Логарифм	16
2.4. Общие процессы Леви и их факторизации	17
2.5. О группах автоморфизмов факторизаций	20
2.6. Об ортогональных разложениях	22

§3. Канонический изоморфизм между факторизациями, порожденными гауссовским и пуассоновским процессами	24
3.1. Ограничение канонического изоморфизма на подпространство однопорожденных функционалов	25
3.2. Ограничение канонического изоморфизма на подпространство конечнопорожденных функционалов	28
3.3. Логарифм	28
3.4. Соответствие ортогональных разложений (хаосов)	30
3.5. Ядро	32
§4. Изоморфизм факторизаций, порожденных общими процессами Леви	35
§5. Представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$	38
5.1. Каноническое состояние на $SL(2, \mathbb{R})^X$	38
5.2. Фоковская модель канонического представления	39
5.3. Лебеговская модель канонического представления	40
5.4. Изоморфизм между фоковской и лебеговской моделями	41
Приложения	42
А. Пример нефоковской нульмерной факторизации	42
В. О спектре фоковской факторизации	46
С. Цикловый индекс	46
D. Ортогональные многочлены	47
Список основных обозначений	48
Список литературы	48

§ 1. Введение: постановка задачи и основные результаты

1.1. Предмет статьи. Эта статья представляет собой обзор и изложение новых результатов в области, которая издавна связывала классическую теорию вероятностей, функциональный и классический анализ и комбинаторику, а также некоторые разделы теоретической физики (вторичное квантование, пространство Фока). Речь идет о случайных процессах с независимыми значениями (или с независимыми приращениями, если быть ближе вероятностной традиции) и разложении пространств функционалов от траекторий этих процессов. Такие процессы можно рассматривать как *континуальное обобщение понятия последовательности независимых случайных величин*. Их теория теснейшим образом связана с теорией безгранично делимых распределений на прямой. Она прошла длинный путь от первоначальных пионерских работ Б. де Финетти и А. Н. Колмогорова, предложившего формулу для безгранично делимых распределений на прямой с конечной дисперсией, последующих работ середины тридцатых годов П. Леви и А. Я. Хинчина, доказавших общую формулу для этих распределений, и их многочисленных последователей, вплоть до понятия обобщенных случайных процессов в смысле Гельфанда–Ито, которое подвело прочную базу для понимания того, что такое процесс с независимыми значениями.

Работа выполнена при поддержке гранта № 02-01-00093 Российского фонда фундаментальных исследований, гранта НШ-2251.2003.1 Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ, а также фонда NWO (Нидерланды).

Центральный пример – это, конечно, винеровский процесс (соответственно белый шум, если говорить об обобщенном процессе с независимыми значениями). Мера в пространстве $C([0, 1])$ реализаций этого процесса была описана Н. Винером в начале двадцатых годов; в дальнейшем эта мера оставалась в центре всего стохастического анализа и теории стохастических дифференциальных уравнений. Эта теория была начата уже в 50-х годах в работах К. Ито, продолженных многими другими математиками, и к настоящему времени она имеет огромный диапазон применений в теории случайных процессов и их приложений.

Но имеется еще один аспект, о котором пойдет речь дальше и который напрямую связан с другим, менее заметным, но едва ли не самым важным источником теории “континуальных произведений независимых случайных величин”, а именно с математической физикой. Стоит вспомнить, что винеровский процесс очевидным образом является математической версией процесса броуновского движения и процесса Эйнштейна–Смолуховского. Но лишь в 50-х годах стало ясно еще одно замечательное обстоятельство: так называемые ортогональные разложения Винера–Ито–Камерона–Мартина в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функционалов от винеровского процесса, теория которых была построена в работах [1]–[3], есть не что иное, как калька схемы вторичного квантования, впервые предложенной В. А. Фоком еще в начале 30-х годов и переработанной в десятках математических и полуматематических работ его последователей; так называемое пространство Фока, служащее базой для конструкций квантовой теории поля, теории представлений многих групп, особенно бесконечномерных, для многих алгебраических конструкций и т. п., имеет структуру “экспоненты” и ортогонального разложения на многочастичные подпространства, точно так же, как пространство L^2 над белым шумом имеет разложения, как теперь говорят, по “хаосам” разных порядков; а так называемая виковская регуляризация есть просто процесс ортогонализации полиномиальных функционалов эрмитовского типа (см., например, монографию [4] или обзор [5]). Из книг, связанных с рассматриваемой тематикой, упомянем [6]–[8]. Большую роль в популяризации фоковского пространства среди российских математиков сыграла деятельность и работы Ф. А. Березина (особенно, по фермионному фоковскому пространству), см., например, [9].

1.2. Структура факторизации. Более внимательный анализ показывает, что оба гильбертовых пространства (фоковское и пространство L^2 по винеровской мере) *имеют структуру* так называемой “*факторизации*”, или непрерывного тензорного произведения. Именно эта структура отвечает интуитивному пониманию “континуального произведения независимых” и состоит в том, что гильбертово пространство и алгебра операторов в нем допускают неограниченно делимые разложения в тензорные произведения. Эта структура факторизации – разложения на тензорные сомножители – необходима не только в теории вероятностей, но и в теории представлений групп токов и полей C^* -алгебр, моделях теории поля, алгебре и др. Она восходит к довоенным работам Дж. фон Неймана по тензорным произведениям [10], [11] и была исследована в работе Х. Араки и Э. Дж. Вудса 60-х годов [12]. Ее метрический (теоретико-вероятностный) вариант более нов – он был предложен Дж. Фельдманом [13]. Ниже мы приводим понятие *метрической факторизации* и даем краткий обзор немногих работ, в которых она рассматривалась. Грубо говоря, непрерывная метрическая факторизация пространства с мерой есть согласованное семейство разложений этого про-

пространства в прямое произведение произвольно большого числа пространств с мерой. Такую структуру имеет пространство реализаций любого процесса с независимыми значениями.

Основной результат этой работы состоит в том, что гильбертово пространство квадратично интегрируемых функционалов над любым случайным процессом с независимыми значениями из произвольного векторного пространства (коротко, но неправильно – процесс Леви) допускает структуру фоковской факторизации. Таким образом, с этой точки зрения структура факторизации у любого процесса Леви такая же, как и у гауссовского процесса некоторой размерности. Эта размерность есть единственный инвариант факторизации относительно изоморфизма, и она зависит только от числа точек в носителе меры Леви, откуда вытекает, что два процесса Леви с одинаковой мощностью носителей мер Леви определяют изоморфные факторизации. Мы предъявляем явные формулы для сохраняющей факторизации изометрии между соответствующими пространствами L^2 . В частности, для любого процесса Леви можно выписать ортогональное разложение в пространстве квадратично интегрируемых функционалов, подобное классическому разложению Винера–Ито на “хаосы”.

Хотя имеются многочисленные (в основном, технические) работы, посвященные построению стохастических интегралов и аналогов разложения Винера–Ито для процессов Леви (см., например, [14]–[16], а также [17]–[25]), ключевой факт изоморфизма факторизаций оставался до сих пор в тени. Он тесно связан с замечательной теоремой Араки–Вудса [12] (хотя и не следует из нее), которая утверждает, что факторизация, обладающая достаточным числом мультипликативных векторов, изоморфна фоковской факторизации, см. [12], [26]. В вероятностных терминах это условие означает, что упомянутое выше существование канонической фоковской структуры (или разложения Винера–Ито) в пространстве L^2 над произвольным процессом Леви следует из тотальности множества мультипликативных функционалов от этого процесса¹. Мультипликативный функционал от гауссовского процесса является экспонентой от линейного функционала, однако для общих процессов Леви множество мультипликативных функционалов значительно шире (см. п. 3.3). Построенная структура пространства Фока в пространстве L^2 над произвольным процессом Леви и изометрия между этими пространствами и пространствами L^2 над гауссовскими процессами делает ненужными многочисленные специальные построения ортогональных разложений (стохастических интегралов) в каждом конкретном случае. Добавим еще одну деталь – в этих вопросах несущественно, какова область задания процесса, ею может быть произвольное пространство с мерой, а не обязательно отрезок или прямая, как это обычно бывает. В частности, указанная изометрия пригодна для случайных полей. Единственное преимущество одномерности состоит в том, что можно излагать вопрос не в терминах процессов с независимыми значениями, а в терминах процессов с независимыми приращениями и вместо белого шума можно рассматривать винеров-

¹Напомним, что подмножество гильбертова пространства называется тотальным, если его линейная оболочка всюду плотна, и что функционал от процесса, определенного на множестве X , называется мультипликативным, если его значение на произвольной реализации процесса раскладывается в произведение его значений на ограничениях этой реализации на подмножества, образующие произвольное конечное измеримое разбиение множества X (см. точное определение в п. 2.1).

ский процесс, что иногда удобно. Однако мы определяем и рассматриваем в процессы Леви над произвольной базой.

1.3. Изоморфизм факторизаций. Логарифмирование в факторизациях. Ядро. Простейший пример рассматриваемой изометрии есть изометрия между пространствами L^2 над пуассоновским и винеровским процессами. Аналогия между ортогональными структурами в этих пространствах отмечалась во многих работах; однако наличие изометрии не было установлено даже в этом случае. Полезно отметить, что впервые существование этой изометрии было получено в работе [27] из эквивалентности двух реализаций канонического представления групп диффеоморфизмов; позже эта изометрия изучалась Ю. А. Неретиным [28] в терминах более популярной среди физиков голоморфной модели пространства Фока (т.е. пространства Фока, реализованного как гильбертово пространство голоморфных функционалов, а не L^2). Окончательные явные формулы для изометрии между пространствами L^2 над пуассоновским и гауссовским процессами, по-видимому, являются новыми.

Общий случай изометрии между произвольным процессом Леви и гауссовским процессом подходящей размерности сводится к пуассон-гауссовскому случаю при помощи разложения Леви–Хинчина или пуассоновской конструкции процессов Леви. В этом случае необходимо рассматривать уже векторнозначный белый шум, причем в качестве пространства значений естественно выбрать гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}, \Pi)$, где Π – мера Леви рассматриваемого процесса Леви. В частности, в случае пуассоновского процесса это пространство одномерно, поэтому пуассоновская факторизация изоморфна факторизации, задаваемой обычным (одномерным) винеровским процессом.

Как упоминалось выше, единственным гильбертовым инвариантом (т.е. инвариантом факторизаций с точностью до произвольных изометрий гильбертова пространства) факторизаций, возникающих в теории процессов Леви, является размерность пространства $L^2(\Pi)$, т.е. число точек в носителе меры Леви. В частности, важные для приложений устойчивые процессы и их предельный случай – гамма-процесс – порождают такую же факторизацию, как гауссовский белый шум со счетномерным пространством значений. В то же время метрические инварианты факторизаций, т.е. инварианты факторизаций с точностью до преобразований, сохраняющих меру, гораздо более подробны; а именно, как показал Дж. Фельдман [13], две метрические факторизации, порожденные процессами Леви с мерами Леви Π_1 и Π_2 , изоморфны тогда и только тогда, когда $(\mathbb{R}, \Pi_1)$ и $(\mathbb{R}, \Pi_2)$ изоморфны как пространства с мерой. Метрическая классификация играет существенную роль в теории убывающих семейств сигма-алгебр (фильтраций) (см. [29]).

Явное построение структуры Фока–Винера–Ито в пространстве квадратично интегрируемых функционалов над произвольным процессом Леви, т.е. разложение этого пространства в ортогональную сумму симметрических тензорных степеней первого хаоса, основано на своеобразном “логарифмировании” мультипликативных функционалов, в результате которого получают аддитивные функционалы, т.е. первый хаос. Однако правило “логарифмирования” определяется при помощи факторизации, существенно от нее зависит и, вообще говоря, не совпадает со взятием обычного логарифма от мультипликативного функционала (совпадение имеет место только в случае гауссовского белого шума, и в этом случае множество аддитивных функционалов совпадает с множеством линейных функционалов от процесса). Существование этого

“логарифма” для общих процессов Леви не очевидно; фактически, именно в построении логарифма состоит доказательство теоремы Араки–Вудса (в несколько более общем контексте); более явная версия этого построения имеется в работе А. М. Вершика и Б. С. Цирельсона [26; приложение А]. Ниже (п. 3.3) мы вычисляем логарифм в гауссовском и пуассоновском случае (что, как упоминалось выше, исчерпывает общий случай процессов Леви).

Изометрия восстанавливается однозначно, если установлено либо соответствие между множествами мультипликативных функционалов от двух процессов, либо соответствие между линейными подпространствами аддитивных функционалов (“первыми хаосами”), причем изометрия единственна, если зафиксировать биекцию между каноническими базисами в этих подпространствах. *Изометрия может быть задана также ядром*, т.е. обобщенной функцией от траекторий двух процессов. Это ядро вычислено в п. 3.5 для случая пуассон-гауссовской изометрии; замечательным образом, оно задается в чисто комбинаторном виде. Соответствие между последовательными хаосами в этом случае сводится к соответствию между функционалами Эрмита и Шарлье. Ядро не является положительным, поэтому изометрия не есть ни марковский, ни, тем более, мультипликативный оператор.

Следует сказать несколько слов о комбинаторной и аналитической стороне дела. Описанная изометрия для процесса Леви с мерой Леви Π приобретает весьма конкретный вид, если для меры $t^2\Pi(t)$ проблема моментов имеет положительное решение. В этом случае можно использовать базис из ортогональных многочленов в $L^2(\mathbb{R}_+, t^2\Pi(t))$, и мы получаем интересные связи между ортогональными многочленами относительно различных мер на прямой (см., например, (15)). Наиболее важную роль играют многочлены Эрмита и Шарлье. Комбинаторная сторона построения стохастических интегралов для широкого класса процессов наиболее отчетливо подчеркнута в [30].

1.4. Связь с теорией представлений. Одним из наиболее важных приложений изометрий между гильбертовыми пространствами функционалов над различными процессами Леви является теория представлений бесконечномерных групп, а именно групп токов и калибровочных групп и алгебр Каца–Мули. Унитарные представления этих групп естественным образом порождают гильбертову факторизацию, и обычно их реализуют в пространстве Фока. Модель пространства Фока как пространства L^2 над белым шумом или близкая ей голоморфная модель этого пространства как пространства голоморфных функций от бесконечного числа переменных – это только две из возможных моделей. Если мы выберем ту или иную максимальную коммутативную подгруппу (подалгебру) в представляемой бесконечномерной группе (алгебре) и захотим перейти к модели гильбертова пространства, в которой эта подгруппа (подалгебра) приведена к диагональной форме, мы немедленно переходим от обычной модели пространства Фока к одной из описываемых моделей. Например, представление группы $SL(2, R)$ -токов (см. [31]) в той коммутативной модели, в которой диагонализуются подгруппа унитарных матриц, реализует переход от бесконечномерного белого шума к гамма-процессу (см. [32]). При этом обнаруживаются новые свойства симметрий меры, соответствующей гамма-процессу. Подробно этот пример разобран в [33].

1.5. Дальнейшее развитие темы. Процессы с независимыми значениями и факторизации возникают в гораздо более широком контексте, чем это обсуждалось выше. Прежде всего, можно рассматривать аналог винеровского и других процессов на многообразиях, группах, полугруппах и даже более общих системах – единственное, что необходимо иметь, это безгранично делимое относительно композиции мер распределение. Более того, понятие композиции мер может быть очень общим и даже не связанным с полугрупповым или групповым законом.

Рассмотрим, например, простейший нелинейный случай – броуновское движение на сфере или группе вращений $SU(n)$. Его линейризуемость, т.е. представимость через обычный винеровский процесс, была доказана еще в 60-х гг. (см. [34]), тем самым, и соответствующая факторизация – фоковская. Метод стохастических дифференциальных уравнений, с помощью которого получен этот результат, не дает ответа на вопрос, изучаемый в этой статье, каково фактически разложение на “хаосы” в этом случае, т.е. каков явный изоморфизм соответствующих пространств функций. Заметим, что ответ на этот вопрос дал бы прямое доказательство линейризуемости броуновского движения. Наиболее сильный результат о линейризуемости получен недавно Б.С. Цирельсоном [35]. Он утверждает, что слабо непрерывное броуновское движение на унитарной группе бесконечномерного гильбертова пространства линейризуемо; отсюда следует, что то же верно и для всех групп, имеющих точное унитарное представление. Вопрос о явной изометрии и о явном разложении пространства L^2 на хаосы остается открытым. Но для более широкого класса групп – например для группы изометрий универсального пространства Урысона или группы гомеоморфизмов компакта, даже линейризуемость броуновского движения пока не доказана. И уж совсем неясно, верно ли это для

- а) негауссовских процессов с независимыми групповыми значениями, например процессов Леви на конечномерных или бесконечномерных группах;
- б) любых процессов с независимыми полугрупповыми и более общими значениями.

Очень интересны вопросы о *метрической* классификации факторизаций, порожденных процессами Леви с произвольными (нелинейными) значениями; простейший из них – будет ли факторизация, порожденная броуновским движением на двумерной сфере, *метрически* изоморфна одномерной гауссовской факторизации?

1.6. Нефоковские факторизации. Новый этап теории связан с более глубокими вопросами.

В работе [13] обсуждался вопрос, восходящий к С. Какутани, – верно ли, что любая метрическая факторизация изоморфна фоковской, или, в другой терминологии, линейризуема? Более подробно мы обсудим этот вопрос в конце работы, здесь же заметим лишь, что в силу теоремы, аналогичной замечательной теореме Араки–Вудса о гильбертовых факторизациях ([12], см. также п. 2.1.1 далее), этот вопрос эквивалентен вопросу о том, имеется ли на этом пространстве с мерой достаточное число разложимых (мультипликативных) функционалов. Оказывается, возможны случаи, когда никаких мультипликативных функционалов, отличных от константы, нет, и такие примеры нефоковских факторизаций (“черный шум”) с характерной сильной нелинейностью были построены в работе [26] для базы размерности 0 и 1. Построенные примеры не являются ни в каком смысле обобщенными случайными процессами с групповыми

или полугрупповыми значениями. Мы приведем краткую версию примера для базы размерности 0 в приложении А.

Важное отличие этих факторизаций от фоковских еще и в том, что они определены не на полной булевой алгебре классов измеримых множеств, совпадающих $\text{mod } 0$, как фоковская, а на более узкой булевой алгебре, именно поэтому возникло ограничение на размерность базы. Как показал Б. С. Цирельсон [36; раздел 6с], на полной булевой алгебре всякая факторизация с определенными условиями непрерывности является фоковской.

Вопрос о приложениях нефоковских факторизаций в теории представлений групп токов, полей и C^* -алгебр и в квантовой теории остается актуальным; их существование открывает, по-видимому, новые возможности в теории представлений бесконечномерных и полевых объектов.

1.7. Структура статьи. Перейдем к изложению содержания статьи по параграфам.

Параграф 2 содержит необходимые сведения о факторизациях и процессах с независимыми значениями. В нем же приводится определение операции логарифмирования, задаваемой факторизацией. Главные результаты содержатся в § 3, где подробно рассмотрен важнейший частный случай – каноническая изометрия между пространствами L^2 над пуассоновским и гауссовским процессами. Для обоих процессов вычисляются все определенные выше характеристики (мультипликативные и аддитивные функционалы, логарифмирование и ортогональное разложение по стохастическим интегралам). В качестве модельных случаев рассматриваются конечномерные аналоги, отвечающие конечному базовому пространству. Обратим внимание на, по-видимому, новую формулу (15) для классических многочленов Эрмита и Шарлье. Новым по постановке и приведенному решению является вопрос о ядре (формула (27)). У этой формулы несколько доказательств, в том числе и чисто комбинаторное. В § 4 рассматривается изометрия для общего процесса Леви, что, как ни странно, не требует существенно новых идей, поскольку хорошо известная конструкция позволяет представить такой процесс как пуассоновский процесс на более широком пространстве. Хотя это представление процесса Леви хорошо известно, тем не менее, не было осознано, что и в этом общем случае пространство L^2 над произвольным процессом Леви с мерой Леви Π изометрично пространству L^2 над $L^2(\mathbb{R}_+, \Pi)$ -значным винеровским процессом. Таким образом, все формулы для общего случая просто повторяют формулы для рассмотренного выше пуассон-гауссовского случая. Наконец, в § 5 рассматривается пример приложения изометрии между пространством Фока и пространством квадратично интегрируемых функционалов от гамма-процесса. На самом деле этот пример и был началом серии работ [31], [37], [27], [38], [32], [33], приведших к пониманию всей ситуации.

Авторы благодарны профессору М. Йору за ряд важных библиографических ссылок по теории процессов Леви прежних лет.

§ 2. Основные определения

2.1. Факторизации. Мы будем рассматривать два типа факторизаций: *гильбертовы факторизации* и *метрические факторизации*.

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ алгебру всех ограниченных линейных операторов на пространстве $\mathcal{H}$ и через $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ – решетку всех алгебр фон Неймана на $\mathcal{H}$ (напомним, что операции в решетке $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ определены следующим образом: $R_1 \wedge R_2 = R_1 \cap R_2$ и $R_1 \vee R_2 = (R_1 \cup R_2)''$, где $R' = \{a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : ar = ra \ \forall r \in R\}$ – коммутант алгебры R ; изложение теории алгебр фон Неймана см., например, в [39]). Следующее определение гильбертовой факторизации восходит к фон Нейману [10], [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Гильбертовой факторизацией* (типа I) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ называется отображение $\xi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{H})$ такое, что каждая алгебра операторов $\xi(A)$ является фактором типа I и при всех $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ выполняются следующие условия:

- $\xi(A_1 \wedge A_2) = \xi(A_1) \wedge \xi(A_2)$;
- $\xi(A_1 \vee A_2) = \xi(A_1) \vee \xi(A_2)$;
- $\xi(A') = \xi(A)'$;
- $\xi(0_{\mathcal{A}}) = \{\alpha \cdot \text{Id}_{\mathcal{H}}, \alpha \in \mathbb{C}\} = 1_{\mathcal{H}}^2$, где $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ – тождественный оператор в $\mathcal{H}$;
- $\xi(1_{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Факторизованным гильбертовым пространством $(\mathcal{H}, \xi)$ называется гильбертово пространство $\mathcal{H}$, снабженное гильбертовой факторизацией ξ его алгебры операторов. Булева алгебра $\mathcal{A}$ называется *базой факторизации*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $(\mathcal{H}, \xi)$ – факторизованное гильбертово пространство, то, как доказано в [12], для каждого $A \in \mathcal{A}$ существует подпространство $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$ такое, что для любого конечного разбиения $A_1, \dots, A_n$ единичного элемента $1_{\mathcal{A}}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{A_n}$ и $\xi(A_k) = 1_{\mathcal{H}_{A_1}} \otimes \dots \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_{k-1}}} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_{A_k}) \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_{k+1}}} \otimes \dots \otimes 1_{\mathcal{H}_{A_n}}$.

Понятие метрической факторизации было введено Дж. Фельдманом [13]. Мы следуем изложению, принятому в работе А. М. Вершика и Б. С. Цирельсона [26].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство (мы всегда будем предполагать, что оно является непрерывным пространством Лебега). Обозначим через $\Sigma(\mathbf{P})$ полную решетку всех σ -подалгебр σ -алгебры $\mathfrak{A}$, содержащих все множества меры нуль. *Метрической факторизацией* вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ называется отображение $\zeta: \mathcal{A} \rightarrow \Sigma(\mathbf{P})$ такое, что для всех $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ выполняются следующие условия³:

- $\zeta(A_1 \wedge A_2) = \zeta(A_1) \wedge \zeta(A_2)$;
- $\zeta(A_1 \vee A_2) = \zeta(A_1) \vee \zeta(A_2)$;
- $\zeta(A')$ есть независимое дополнение⁴ σ -алгебры $\zeta(A)$; это означает, что $\zeta(A) \wedge \zeta(A') = 0$, $\zeta(A) \vee \zeta(A') = 1$ и σ -алгебры $\zeta(A)$ и $\zeta(A')$ независимы (т.е. для любых множеств $E_1 \in \zeta(A)$ и $E_2 \in \zeta(A')$ выполнено равенство $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)$);
- $\zeta(0_{\mathcal{A}}) = \mathfrak{A}_0$ (тривиальная σ -алгебра);
- $\zeta(1_{\mathcal{A}}) = \mathfrak{A}$.

²Алгебра $\{\alpha \cdot \text{Id}_{\mathcal{H}}, \alpha \in \mathbb{C}\}$ традиционно обозначается через $1_{\mathcal{H}}$, хотя она является нулевым элементом решетки алгебр фон Неймана в пространстве $\mathcal{H}$.

³Эти условия не являются независимыми.

⁴Такое дополнение не единственно.

Факторизованным вероятностным пространством $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \zeta)$ называется вероятностное пространство, снабженное метрической факторизацией ζ над некоторой булевой алгеброй $\mathcal{A}$. Булева алгебра $\mathcal{A}$ называется *базой факторизации*.

В данной работе мы будем рассматривать только *непрерывные* факторизации (гильбертовы и метрические) в смысле следующего условия (названного в [26] “minimal up continuity condition”). В дальнейшем, если не оговорено противное, слово “факторизация” означает “непрерывная факторизация”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Гильбертова факторизация ξ (соответственно метрическая факторизация ζ) над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ называется *непрерывной*, если $\bigvee_{A \in S} \xi(A) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (соответственно $\bigvee_{A \in S} \zeta(A) = \mathfrak{A}$) для любого максимального идеала $S \subset \mathcal{A}$.

Наиболее важными примерами являются факторизации над булевой алгеброй $\mathfrak{B}$ *всех борелевских множеств* некоторого стандартного борелевского пространства $(X, \mathfrak{B})$ (мы будем называть их *факторизациями над борелевским пространством* $(X, \mathfrak{B})$) и факторизации над булевой алгеброй *классов совпадающих mod 0 измеримых подмножеств* некоторого пространства Лебега (X, ν) (мы будем называть их *факторизациями над пространством Лебега* (X, ν)). В данной статье мы рассматриваем только факторизации этих двух типов. Более того, во всех наших примерах факторизация над борелевским пространством может быть корректно продолжена до факторизации над соответствующим пространством Лебега (на самом деле, это является следствием того факта, что все факторизации, рассматриваемые в данной работе, оказываются фоковскими, см. ниже; в случае нефоковских (т.е. неизоморфных фоковским) факторизаций базовая булева алгебра беднее (уже) алгебры всех борелевских множеств – см. приложение А).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. 1) Два *факторизованных гильбертова пространства* $(\mathcal{H}_1, \xi_1)$ и $(\mathcal{H}_2, \xi_2)$ над булевыми алгебрами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно называются *изоморфными*, если существуют изоморфизм булевых алгебр $S: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ и изометрия гильбертовых пространств $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{S} & \mathcal{A}_2 \\ \downarrow \xi_1 & & \downarrow \xi_2 \\ \mathcal{R}(\mathcal{H}_1) & \xrightarrow{\bar{T}} & \mathcal{R}(\mathcal{H}_2) \end{array} .$$

Здесь $\bar{T}: \mathcal{R}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{H}_2)$ – оператор в решетках алгебр фон Неймана, индуцированный изометрией T гильбертовых пространств.

2) Аналогичным образом, два *факторизованных вероятностных пространства* $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1, \zeta_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, P_2, \zeta_2)$ над булевыми алгебрами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно называются *изоморфными*, если существуют изоморфизм булевых алгебр $S: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ и изоморфизм вероятностных пространств $T: (\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathfrak{A}_2, P_2)$ такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{S} & \mathcal{A}_2 \\ \downarrow \zeta_1 & & \downarrow \zeta_2 \\ \Sigma(P_1) & \xrightarrow{T} & \Sigma(P_2) \end{array} .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если T – изоморфизм факторизаций (гильбертовых или метрических), определенных над одной и той же булевой алгеброй $\mathcal{A}$, причем соответствующий изоморфизм S является тождественным автоморфизмом булевой алгебры $\mathcal{A}$ (т.е. база сохраняется), то T называется *специальным* изоморфизмом.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 1. Каждая метрическая факторизация $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \zeta)$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ порождает гильбертову факторизацию в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Omega, P)$ с той же базой. А именно, для каждого элемента $A \in \mathcal{A}$ положим $H_A = L^2(\Omega, \zeta(A), P|_{\zeta(A)}) \subset L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Тогда отображение $\xi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{H})$, задаваемое формулой

$$\xi(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{A'}}, \quad (1)$$

является гильбертовой факторизацией в пространстве $\mathcal{H}$.

В данной работе мы рассматриваем только гильбертовы факторизации этого типа. Заметим, что неизоморфные метрические факторизации могут порождать изоморфные гильбертовы факторизации, поскольку не любая изометрия пространства $L^2(\Omega, P)$ порождается изоморфизмом пространства с мерой $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, метрическая факторизация представляет собой тройку $(\xi, \mathcal{Z}, \psi)$, где $\xi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – гильбертова факторизация, $\mathcal{Z}$ – максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\psi \in \mathcal{H}$ – факторизуемый вектор (см. определение 7 ниже) такой, что $\mathcal{Z} \cap \xi(A)$ является максимальной коммутативной подалгеброй алгебры $\xi(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$, и ψ является $\mathcal{Z}$ -циклическим вектором.

Ключевую роль при изучении факторизаций играет понятие мультипликативных и аддитивных функционалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \zeta)$ – факторизованное вероятностное пространство над булевой алгеброй $\mathcal{A}$. Измеримая функция $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ называется *аддитивным* (соответственно *мультипликативным*) *функционалом*, если для любого конечного разбиения $A_1, \dots, A_n$ единичного элемента $1_{\mathcal{A}}$ булевой алгебры $\mathcal{A}$ существуют функции $F_{A_1}, \dots, F_{A_n}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что F_{A_k} измерима относительно $\zeta(A_k)$ и $F = F_{A_1} + \dots + F_{A_n}$ (соответственно $F = F_{A_1} \cdots F_{A_n}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $(\mathcal{H}, \xi)$ – факторизованное гильбертово пространство над булевой алгеброй $\mathcal{A}$. Вектор $h \in \mathcal{H}$ называется *факторизуемым*, если для любого конечного разбиения $A_1, \dots, A_n$ единичного элемента $1_{\mathcal{A}}$ существуют операторы $P_k \in \xi(A_k)$ такие, что одномерный проектор P_h на вектор h представляется в виде $P_h = P_1 \otimes \dots \otimes P_n$. Альтернативным образом, существуют векторы $h_{A_i} \in H_{A_i}$ (где H_{A_i} – подпространства из замечания после определения 1) такие, что $h = h_{A_1} \otimes \dots \otimes h_{A_n}$.

Аналогично, вектор $h \in \mathcal{H}$ называется *аддитивным*, если для любого конечного разбиения $A_1, \dots, A_n$ единичного элемента $1_{\mathcal{A}}$ существуют векторы $h_{A_i} \in H_{A_i}$ такие, что $h = h_{A_1} + \dots + h_{A_n}$.

Если гильбертова факторизация ξ в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Omega, P)$ порождена факторизацией ζ вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ в соответствии с конструкцией леммы 1, то множество факторизуемых векторов в $(L^2(\Omega, P), \xi)$ совпадает с множеством квадратично интегрируемых мультипликативных функционалов в $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \zeta)$.

Поскольку в данной статье мы рассматриваем гильбертовы факторизации только такого типа, мы будем использовать термин “мультипликативные функционалы” для факторизуемых векторов в пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{P})$. Множество аддитивных векторов в факторизованном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ образует линейное подпространство (возможно, нулевое) и в случае $\mathcal{H} = (L^2(\Omega, \mathcal{P}), \xi)$ совпадает с множеством квадратично интегрируемых аддитивных функционалов в $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P}, \zeta)$.

2.2. Первые примеры: фоковские факторизации, гауссовские и пуассоновские процессы.

2.2.1. Пространства Фока и фоковские факторизации. (Бозонным) *пространством Фока* $\text{EXP } H$ над гильбертовым пространством H называется симметризованная тензорная экспонента

$$\text{EXP } H = S^0 H \oplus S^1 H \oplus \cdots \oplus S^n H \oplus \cdots,$$

где $S^n H$ – n -я симметрическая тензорная степень пространства H . Для произвольного вектора $h \in H$ положим

$$\text{EXP } h = 1 \oplus h \oplus \frac{1}{\sqrt{2!}} h \otimes h \oplus \frac{1}{\sqrt{3!}} h \otimes h \otimes h \oplus \cdots.$$

Векторы $\{\text{EXP } h\}_{h \in H}$ линейно независимы, и

$$(\text{EXP } h_1, \text{EXP } h_2)_{\text{EXP } H} = \exp(h_1, h_2)_H,$$

где $(\cdot, \cdot)_{\text{EXP } H}$ обозначает скалярное произведение в пространстве $\text{EXP } H$. В частности,

$$\|\text{EXP } h\|^2 = \exp \|h\|^2.$$

Следующая конструкция задает важнейший пример гильбертовой факторизации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть (X, ν) – пространство Лебега. Рассмотрим прямой интеграл гильбертовых пространств $\mathcal{K} = \int^\oplus K(x) d\nu(x)$ и соответствующее пространство Фока $\mathcal{H} = \text{EXP } \mathcal{K}$. Для каждого измеримого множества $A \subset X$ положим $H_A = \text{EXP } \mathcal{K}(A)$, где $\mathcal{K}(A) = \int_A^\oplus K(x) d\nu(x)$, и $\xi(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{A^c}}$. Полученная гильбертова факторизация $(\mathcal{H}, \xi)$ называется *фоковской факторизацией*.

В частности, если $\dim K(x) \equiv 1$, то $\mathcal{H} = \text{EXP } L^2(X, \nu)$ и $H_A = \text{EXP } L^2(A, \nu_A)$, где ν_A – ограничение меры ν на подмножество A . Более общим образом, если $\dim K(x) \equiv n$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$), то пространство $\mathcal{H}$ можно отождествить с $\text{EXP } L^2((X, \nu); H)$, где H – гильбертово пространство размерности n и $L^2((X, \nu); H)$ – пространство квадратично интегрируемых H -значных функций на (X, ν) . Соответствующая факторизация называется *однородной фоковской факторизацией размерности n* .

Множество мультипликативных (факторизуемых) векторов в пространстве Фока $\mathcal{H} = \text{EXP } \mathcal{K}$ есть

$$\mathcal{M} = \{c \cdot \text{EXP } h, h \in \mathcal{K}, c \in \mathbb{C}\}.$$

Линейное подпространство аддитивных функционалов в пространстве Фока может быть отождествлено с пространством $\mathcal{K} = \int^{\oplus} K(x) d\nu(x)$, где $\mathcal{K}$ вкладывается в $\mathcal{H} = \text{EXP } \mathcal{K}$ как подпространство первого хаоса: $\mathcal{K} \ni h \mapsto 0 \otimes h \otimes 0 \otimes \dots \in \text{EXP } \mathcal{K}$. Таким образом, пространство первого хаоса, так же как и множество мультипликативных функционалов, определено инвариантно; оно имеет структуру прямого интеграла гильбертовых пространств, при этом база интеграла есть, очевидно, база факторизации.

Фоковские факторизации могут быть охарактеризованы при помощи следующей важной теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (Араки–Вудс [12]). 1) *Гильбертова факторизация $(\mathcal{H}, \xi)$ над неатомической булевой алгеброй $\mathcal{A}$ является фоковской тогда и только тогда, когда множество факторизуемых векторов тотально в $\mathcal{H}$.*

2) *Полным инвариантом фоковской факторизации является множество значений, принимаемых функцией размерности $\dim K(x)$ на множестве положительной меры: $\{n \in \{0, 1, \dots, \infty\} : \nu(\{x : \dim K(x) = n\}) > 0\}$. Таким образом, две фоковские факторизации изоморфны тогда и только тогда, когда их функции размерности эквивалентны в следующем смысле: совокупности значений обеих функций, принимаемых на множествах положительной меры, совпадают.*

2.2.2. Гауссовский белый шум и гауссовские факторизации. Рассмотрим гауссовский белый шум α на пространстве Лебега (X, ν) , т.е. обобщенный случайный процесс⁵ на гильбертовом пространстве $L^2(X, \nu)$, характеристический функционал которого задается формулой

$$\mathbb{E} e^{i\langle h, \cdot \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\|h\|^2}, \quad h \in L^2(X, \nu), \quad (2)$$

где $\|h\|$ – норма вектора h в пространстве $L^2(X, \nu)$. (Этот процесс может быть задан непосредственно в ядерном расширении $\widehat{H}$ гильбертова пространства $L^2(X, \nu)$, соответствующем квадратичной форме $B(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)$. В частности, пространство $L^2(\alpha)$ квадратично интегрируемых функционалов от белого шума может быть отождествлено с $L^2(\widehat{H}, \mu)$, где μ – стандартная гауссовская мера в $\widehat{H}$.)

Общеизвестно (см., например, [4]), что пространство $L^2(\alpha)$ квадратично интегрируемых функционалов от белого шума канонически изоморфно пространству Фока $\text{EXP } H$, где $H = L^2(X, \nu)$. Этот изоморфизм задается формулой

$$\text{EXP } h \leftrightarrow e^{-\frac{\|h\|^2}{2} + \langle h, \cdot \rangle}. \quad (3)$$

В частности, вакуумный вектор $\text{EXP } 0$ соответствует единичной функции $1 \in L^2(\alpha)$, а n -частичное подпространство $S^n H$ отождествляется с подпространством пространства $L^2(\alpha)$, натянутым на n -кратные стохастические интегралы, т.е. обобщенные функционалы Эрмита порядка n , см. п. 3.4. Структура унитарного кольца в пространстве $L^2(\alpha)$ была описана аксиоматически в работе [45], см. также [46].

⁵Понятие обобщенного случайного процесса было разработано И.М. Гельфандом [40] (см. также [41]) и К. Ито [42]. Относительно гауссовского белого шума см. также [43] и [44].

Для каждого измеримого множества $A \subset X$ обозначим через $\zeta_\alpha(A)$ σ -алгебру, порожденную ограничением процесса α на A . Легко убедиться, что мы получим метрическую факторизацию над (X, ν) , называемую *гауссовской* факторизацией. В соответствии с общей конструкцией леммы 1, белый шум α задает также гильбертову факторизацию ξ_α в пространстве $L^2(\alpha)$. Следующее хорошо известное предложение является следствием изоморфизма (3) между $L^2(\alpha)$ и $\text{EXP } L^2(X, \nu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Гауссовский белый шум на произвольном пространстве Лебега (X, ν) порождает фоковскую факторизацию.*

В частности, множество мультипликативных функционалов в пространстве L^2 над гауссовским белым шумом на пространстве (X, ν) есть $\{c \cdot e^{\langle h, \cdot \rangle}, h \in L^2(X, \nu), c \in \mathbb{C}\}$, а множество аддитивных функционалов есть $\{c \cdot \langle h, \cdot \rangle, h \in L^2(X, \nu), c \in \mathbb{C}\}$ (см. п. 3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно рассмотреть гауссовский процесс на (X, ν) с произвольной дисперсией $\sigma^2 > 0$, т.е. обобщенный случайный процесс на $L^2(X, \nu)$ с характеристическим функционалом

$$\mathbb{E} e^{i \langle h, \cdot \rangle} d\mu(\cdot) = e^{-\frac{\sigma^2}{2} \|h\|^2}, \quad h \in L^2(X, \nu).$$

Ясно, что этот случай сводится к стандартному белому шуму при помощи преобразования $\langle h, \cdot \rangle \mapsto \sigma^{-1} \langle h, \cdot \rangle$, и факторизация, задаваемая таким процессом, также является фоковской.

2.2.3. Пуассоновский процесс и пуассоновская факторизация. Стандартной ссылкой по теории пуассоновских процессов является книга [47].

По определению точечная *конфигурация* в пространстве X есть (неупорядоченный) пустой, конечный или счетный набор точек из X с положительными (целочисленными) кратностями. Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ множество всех точечных конфигураций на X .

Точечным пуассоновским процессом на пространстве X со средней мерой ν (кратко: пуассоновским процессом на пространстве (X, ν)) называется случайная конфигурация $\pi \in \mathcal{E}$ такая, что для каждого измеримого множества $A \subset X$ случайная величина $\#\{\pi \cap A\}$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\nu(A)$, т.е. $\text{Prob}\{\#\{\pi \cap A\} = n\} = \frac{\nu(A)^n}{n!} e^{-\nu(A)}$, и для любых дизъюнктивных измеримых множеств $A_1, \dots, A_n \subset X$ случайные величины $\#\{\pi \cap A_k\}$, $k = 1, \dots, n$, независимы.

Заметим, что пуассоновский процесс может рассматриваться как случайная мера $\tau(A) = \#\{\pi \cap A\}$ на пространстве X . Обозначим распределение пуассоновского процесса в пространстве $\mathcal{E}$ через $\mathcal{P}$.

Аналогично гауссовскому случаю, для каждого измеримого множества $A \subset X$ обозначим через $\zeta_\pi(A)$ σ -алгебру, порожденную ограничением пуассоновского процесса π на A . Мы получим *пуассоновскую* метрическую факторизацию над (X, ν) . В соответствии с общей конструкцией леммы 1, пуассоновский процесс π задает также гильбертову факторизацию ξ_π в пространстве $L^2(\pi)$.

2.3. Логарифм. В этом пункте мы опишем операцию “логарифмирования”, введенную в работе [26], которая позволяет строить пространство аддитивных функционалов факторизованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \zeta)$ по множеству

мультипликативных функционалов. В частности, если множество мультипликативных функционалов тотально в $L^2(\Omega, \mathbf{P})$, так что по теореме Араки–Вудса соответствующая гильбертова факторизация в $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ является фоковской, то логарифмическая конструкция позволяет построить пространство первого хаоса, а значит, и восстановить всю фоковскую структуру в пространстве $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ при помощи стандартного процесса ортогонализации (см. п. 2.6). Операция логарифмирования существенно зависит от факторизации. В общем случае она не совпадает со взятием обычного логарифма от мультипликативного функционала.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}, \zeta)$ – факторизованное вероятностное пространство над пространством Лебега (X, ν) . Обозначим через $\mathcal{A}$ пространство всех квадратично интегрируемых аддитивных функционалов, а через $\mathcal{M}$ – пространство всех квадратично интегрируемых мультипликативных функционалов на этом пространстве. Пусть $F \in \mathcal{M}$. Обозначим через $F_A(\cdot)$ $\zeta(A)$ -измеримую функцию из определения мультипликативного функционала (она определена с точностью до скалярного множителя). Для каждого измеримого множества $A \subset X$ положим $m_F(A) = \log \mathbf{E}|F_A(\cdot)|^2 - \log |\mathbf{E}F_A(\cdot)|^2$. Тогда m_F – неатомическая мера на X [26; лемма А2].

ТЕОРЕМА 2 [26; теорема А6]. *Существует естественное взаимно однозначное соответствие $\text{LOG}_\zeta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$. Если $F \in \mathcal{M}$ и $\mathbf{E}F = 1$, то*

$$\text{LOG}_\zeta F(\cdot) = \lim_{\max m_F(A_k) \rightarrow 0} \sum_k (F_{A_k}(\cdot) - 1) \quad \text{в } L^2(\Omega, \mathbf{P}), \quad (4)$$

где $A_1, \dots, A_k$ – измеримое разбиение пространства X и все функционалы F_{A_k} предполагаются нормированными таким образом, что $\mathbf{E}F_{A_k}(\cdot) = 1$.

В п. 3.3 мы применяем эту теорему для вычисления пространств аддитивных функционалов от гауссовского белого шума и пуассоновского процесса.

Заметим, что мультипликативные и аддитивные функционалы могут быть очевидным образом определены для произвольного вероятностного процесса. Однако если процесс не является процессом с независимыми значениями, то он не задает факторизацию, так что формула (4) не имеет смысла, и логарифм не определен.

Таким образом, если имеются два факторизованных вероятностных пространства с изоморфными гильбертовыми факторизациями соответствующих пространств L^2 , то этот изоморфизм можно задать, указав либо соответствие между всеми хаосами, либо соответствие между аддитивными функционалами, либо соответствие между мультипликативными функционалами. Мы построим все три соответствия для пуассон-гауссовского и леви-гауссовского изоморфизма.

2.4. Общие процессы Леви и их факторизации. Понятие обобщенного случайного процесса было разработано И. М. Гельфандом [40] (см. также [41]) и К. Ито [42]. Обобщенные процессы с независимыми значениями подробно рассмотрены в [41], см. также [13]. Стандартной ссылкой по процессам Леви в $\mathbb{R}^n$ может считаться монография [48].

Пусть (X, ν) – стандартное борелевское пространство с непрерывной конечной мерой ν . Обозначим через $\mathcal{F}$ линейное пространство (классов mod 0) ограниченных из-

меримых функций на X . Обобщенный случайный процесс⁶ на пространстве $\mathcal{F}$ называется *процессом с независимыми значениями* (*процессом Леви*), если для любых функций $a_1, a_2 \in \mathcal{F}$ таких, что $a_1(x)a_2(x) = 0$ почти всюду, случайные величины $\langle a_1, \cdot \rangle$ и $\langle a_2, \cdot \rangle$ независимы. Процесс называется *однородным*, если он инвариантен относительно сохраняющих меру преобразований пространства (X, ν) .

Хорошо известно (см., например, [13]), что однородные процессы с независимыми приращениями описываются при помощи теоремы Леви–Хинчина. Для каждого однородного процесса с независимыми значениями на (X, ν) существуют борелевская мера Π на $\mathbb{R}$ такая, что $\Pi(\{0\}) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{1+t^2} d\Pi(t) < \infty$ (мера Леви–Хинчина), неотрицательное число $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ (гауссовская дисперсия) и число $c \in \mathbb{R}$ (снос) такие, что для любой функции $a \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} e^{i\langle a, \cdot \rangle} = \exp \left(\int_X \log \phi(a(x)) d\nu(x) \right),$$

где

$$\log \phi(y) = icy - \frac{\sigma^2 y^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{ity} - 1 - \frac{ity}{1+t^2} \right) d\Pi(t),$$

причем параметры Π, σ^2 и c однозначно определяются процессом. В частности, мера Π является мерой скачков процесса.

Следующая лемма хорошо известна.

ЛЕММА 2. Пусть η – произвольный процесс с независимыми значениями на стандартном борелевском пространстве $(X, \mathfrak{B})$ с непрерывной конечной мерой ν . Для каждого $A \in \mathfrak{B}$ обозначим через $\zeta_\eta(A)$ σ -алгебру, порожденную ограничением процесса η на подмножество A . Тогда ζ_η – метрическая факторизация над борелевским пространством $(X, \mathfrak{B})$, которая продолжается до метрической факторизации над алгеброй классов $\text{mod } 0$ измеримых множеств (т. е. над соответствующим пространством Лебега).

В соответствии с общей конструкцией леммы 1, процесс с независимыми значениями η задает также гильбертову факторизацию ξ_η в пространстве квадратично интегрируемых функционалов $\mathcal{H} = L^2(\eta)$; а именно, $\xi_\eta(A) = \mathcal{B}(H_A) \otimes 1_{H_{X \setminus A}}$, где H_A – множество квадратично интегрируемых функционалов, зависящих только от ограничения процесса η на подмножество A .

Важнейшей задачей является классификация процессов по порождаемым ими факторизациям. Оказывается, что все процессы с независимыми значениями порождают фоковские факторизации, а полным инвариантом этой фоковской факторизации является количество точек в носителе $\text{supp } \Pi$ меры Леви–Хинчина (теорема 7).

⁶Напомним, что обобщенный случайный процесс на векторном вещественном топологическом локально выпуклом пространстве $\mathcal{L}$ есть непрерывное линейное отображение $a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$ из пространства $\mathcal{L}$ в пространство $L_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ случайных величин на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Обобщенный случайный процесс индуцирует на сопряженном пространстве L^* слабое распределение (меру на цилиндрических множествах), которое иногда продолжается до вероятностной меры.

Заметим, что метрические факторизации, порожденные процессами с независимыми значениями с одинаковой мощностью носителя меры Леви–Хинчина, не обязательно изоморфны. Дж. Фельдман [13] показал, что *метрические факторизации, порожденные процессами с независимыми значениями без гауссовской компоненты, изоморфны тогда и только тогда, когда пространства $(\mathbb{R}, \Pi_1)$ и $(\mathbb{R}, \Pi_2)$, где Π_1 и Π_2 – соответствующие меры Леви–Хинчина, изоморфны как пространства с мерой*. При этом гауссовская метрическая факторизация неизоморфна негауссовской.

Описанные выше гауссовский и пуассоновский процессы являются процессами с независимыми значениями ($\Pi = 0, c = 0$ и $\sigma = 0, \Pi = \delta_1, c = \frac{1}{2}$ соответственно⁷). Более того, всякий процесс η с независимыми значениями однозначно раскладывается в сумму $\eta = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2$, где η_0 – детерминированная компонента: $\langle \eta_0, a \rangle = c \cdot \int_X a(x) d\nu(x)$, а η_1 и η_2 – *независимые* процессы с независимыми значениями, причем η_1 является гауссовским процессом, а η_2 – чисто скачкообразным, т.е. не имеющим гауссовской компоненты процессом с нулевым сносом; поэтому при изучении пространств функционалов от процесса Леви достаточно рассматривать по отдельности гауссовские процессы и чисто скачкообразные процессы без сноса. Гауссовский случай рассмотрен выше. Если же η – процесс Леви без гауссовской компоненты и без сноса, то он однозначно восстанавливается по мере скачков, которая является пуассоновским процессом $\pi_\nu \times \Pi$ на пространстве $X \times \mathbb{R}$ со средней мерой $\nu \times \Pi$. Таким образом, пространство $L^2(\eta)$ квадратично интегрируемых функционалов от процесса Леви без гауссовской компоненты может быть отождествлено с пространством $L^2(\pi_\nu \times \Pi)$ квадратично интегрируемых функционалов от пуассоновского процесса на пространстве $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$. Ясно, что такое отождествление сохраняет структуру факторизации над (X, ν) . Таким образом, *изучение факторизаций, задаваемых произвольным процессом с независимыми значениями, сводится к случаю гауссовского и пуассоновского процессов*.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда гауссовская компонента и снос отсутствуют, а мера Леви–Хинчина сосредоточена на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty (1 - e^{-s}) d\Pi(s) < \infty, \quad (5)$$

процесс Леви удобнее задавать при помощи преобразования Лапласа

$$\mathbb{E} e^{-\langle a, \eta \rangle} = \exp \left(\int_X \log \psi_\Pi(a(x)) d\nu(x) \right), \quad a \geq 0,$$

где ψ_Π – преобразование Лапласа безгранично делимого распределения F_Π с мерой Леви–Хинчина Π :

$$\psi_\Pi(t) = \exp \left(- \int_0^\infty (1 - e^{-ts}) d\Pi(s) \right).$$

⁷ Иногда удобно считать, что в гауссовском случае мера Леви–Хинчина Π сосредоточена в точке 0.

При $X = \mathbb{R}$ такие процессы являются *субординаторами*⁸, поэтому процессы Леви, удовлетворяющие указанным свойствам, мы будем называть *обобщенными субординаторами*.

В этом случае явное задание процесса через соответствующий пуассоновский процесс выглядит следующим образом (см., например, [47; гл. 8]). Рассмотрим точечный пуассоновский процесс на пространстве $X \times \mathbb{R}_+$ со средней мерой $\nu \times \Pi$. Сопоставим реализации $\pi = \{(x_i, z_i)\}$ этого процесса меру

$$\eta = \sum_{(x_i, z_i) \in \pi} z_i \delta_{x_i}. \quad (6)$$

Тогда η является обобщенным субординатором с мерой Леви Π . В частности, отсюда следует, что распределение обобщенного субординатора сосредоточено на конусе D^+ , где

$$D = \left\{ \sum z_i \delta_{x_i}, x_i \in X, z_i \in \mathbb{R}, \sum |z_i| < \infty \right\}$$

– вещественное линейное пространство всех конечных вещественных дискретных мер на X , а $D^+ = \{\sum z_i \delta_{x_i} \in D : z_i > 0\} \subset D$ – конус в D , состоящий из положительных мер.

Заметим, что в случае субординаторов легко явно указать изоморфизм факторизаций из теоремы Фельдмана (см. выше в этом пункте). А именно, рассмотрим два обобщенных субординатора η_1 и η_2 с мерами Леви Π_1 и Π_2 соответственно, и пусть $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – отображение, реализующее изоморфизм пространств с мерой $(\mathbb{R}, \Pi_1)$ и $(\mathbb{R}, \Pi_2)$. Тогда отображение

$$T \left(\sum_{(x_i, z_i) \in \pi} z_i \delta_{x_i} \right) = \sum_{(x_i, z_i) \in \pi} T(z_i) \delta_{x_i}$$

осуществляет искомый изоморфизм метрических факторизаций, порожденных обобщенными субординаторами η_1 и η_2 .

2.5. О группах автоморфизмов факторизаций. Согласно определению 4, группа $\text{AUT}(\mathcal{H}, \xi)$ автоморфизмов факторизованного гильбертова пространства $(\mathcal{H}, \xi)$ над булевой алгеброй $\mathcal{A}$ состоит из изометрий T пространства $\mathcal{H}$ таких, что $\bar{T} \circ \xi = \xi \circ S$ для некоторого автоморфизма S алгебры $\mathcal{A}$ (напомним, что $\bar{T}$ обозначает оператор в $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, индуцированный изометрией T). Подгруппа $\text{SAUT}(\mathcal{H}, \xi)$ *специальных* автоморфизмов состоит из автоморфизмов T , оставляющих базу неподвижной: $\bar{T}\xi(A) = \xi(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Подгруппа $\text{SAUT}_\psi(\mathcal{H}, \xi) \subset \text{SAUT}(\mathcal{H}, \xi)$ состоит из специальных автоморфизмов, оставляющих неподвижным мультипликативный вектор $\psi \in \mathcal{H}$ (вакуум). Таким образом, имеется следующая естественная иерархия групп автоморфизмов факторизованного гильбертова пространства $(\mathcal{H}, \xi)$:

$$\text{SAUT}_\psi(\mathcal{H}, \xi) \subset \text{SAUT}(\mathcal{H}, \xi) \subset \text{AUT}(\mathcal{H}, \xi).$$

Обозначим через $\text{Aut}(X, \nu)$ группу автоморфизмов пространства с мерой (X, ν) .

Для фоковской факторизации группы $\text{SAUT}(\mathcal{H}, \xi)$ и $\text{SAUT}_\psi(\mathcal{H}, \xi)$ были вычислены в работе [49].

⁸Напомним (см., например, [48], [47]), что субординатором называется однородный процесс на $\mathbb{R}$ с положительными независимыми приращениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть ξ – однородная фоковская факторизация в пространстве $\mathcal{H} = \text{EXP } L^2((X, \nu); H)$. Группа автоморфизмов $\text{AUT}(\mathcal{H}, \xi)$ состоит из операторов вида

$$\text{EXP } h \mapsto e^{ib - \frac{\|\psi\|}{2} - (\psi, Uh(S^{-1} \cdot))} \cdot \text{EXP}(Uh(S^{-1} \cdot) + \psi), \quad (7)$$

где $b \in \mathbb{R}$, $\psi \in L^2((X, \nu); H)$, $S \in \text{Aut}(X, \nu)$, а U – унитарный оператор в $L^2((X, \nu); H)$, коммутирующий со всеми проекторами P_A на подпространства вида $L^2((A, \nu_A); H)$, где A – измеримое подмножество пространства X и ν_A – ограничение меры ν на A .

Подгруппа $\text{SAUT}(\mathcal{H})$ специальных автоморфизмов состоит из операторов (7), у которых $S = \text{Id}_X$ (тождественное отображение в пространстве X), а подгруппа $\text{SAUT}_1(\mathcal{H})$ специальных автоморфизмов, сохраняющих вакуум, состоит из операторов (7), у которых $S = \text{Id}$ и $\psi = 0$.

В частности, в случае одномерной фоковской факторизации в пространстве $\mathcal{H} = \text{EXP } L^2(X, \nu)$ из спектральной теоремы следует, что оператор U является мультипликатором $h(\cdot) \mapsto a(\cdot)h(\cdot)$, умножающим на функцию $a: X \rightarrow \mathbb{C}$ такую, что $|a| \equiv 1$. Таким образом, группа $\text{AUT}(\mathcal{H})$ изоморфна полупрямому произведению

$$(\text{Aut}(X, \nu) \ltimes \mathbb{T}^X) \ltimes (L^2(X, \nu) \ltimes \mathbb{T}),$$

где полупрямое произведение аддитивной группы гильбертова пространства $L^2(X, \nu)$ с единичной окружностью $\mathbb{T} = \{e^{ib}, b \in \mathbb{R}\}$ определяется коциклом

$$c((\psi_1, b_1), (\psi_2, b_2)) = b_1 + b_2 - \text{Im}(\psi_2, \psi_1);$$

группа $\text{Aut}(X, \nu)$ автоморфизмов пространства с мерой (X, ν) действует на $\mathbb{T}^X = \{a: X \rightarrow \mathbb{C} : |a(x)| \equiv 1\}$ по формуле $Sa(\cdot) = a(S^{-1} \cdot)$, а действие пары (S, a) на пару (ψ, b) задается формулой $(a(\cdot)\psi(S^{-1} \cdot), b)$.

Если гильбертова факторизация порождена метрической в соответствии с конструкцией леммы 1, то можно рассмотреть также группу автоморфизмов метрической факторизации $\text{AUT}(\zeta)$, которая, очевидно, будет являться подгруппой группы $\text{AUT}(\mathcal{H}, \xi)$, поскольку любой автоморфизм пространства с мерой индуцирует изометрию в соответствующем пространстве L^2 . Эта группа может быть различна для различных метрических факторизаций, порождающих одну и ту же гильбертову факторизацию.

Пусть имеется метрическая факторизация ζ некоторого пространства Лебега $(\mathcal{X}, \mu)$ с конечной мерой над базовым пространством Лебега (X, ν) , т.е. над булевой алгеброй классов $\text{mod } 0$ измеримых множеств в пространстве (X, ν) . Предположим, что всякому автоморфизму T базы (X, ν) соответствует автоморфизм V_T факторизованного пространства $(\mathcal{X}, \mu)$, иначе говоря, факторизация инвариантна относительно группы $\text{Aut}(X, \nu)$. Эти условия заведомо выполнены, если рассматриваемая метрическая факторизация порождает *фоковскую* гильбертову факторизацию в пространстве $L^2(\mathcal{X}, \mu)$, и по теореме Цирельсона (см. п. 6 введения) только в этом случае. Можно сказать, что тем самым определен нетривиальный мономорфизм

$$\text{Aut}(X, \nu) \rightarrow \text{AUT}(\zeta),$$

т.е. мономорфное вложение группы всех автоморфизмов пространства Лебега с конечной или σ -конечной мерой в группу автоморфизмов пространства Лебега с конечной мерой – “динамическая система над динамической системой” по выражению В. А. Рохлина.

Возникает вопрос о классификации (операторной и метрической) таких систем над системами, возникающими из факторизаций, порожденных процессами Леви. По-видимому, впервые частный случай этого вопроса рассмотрел еще в 1956 году К. Ито [50]. А именно, используя нашу терминологию, его результат можно сформулировать следующим образом. Пусть (X, ν) – вещественная прямая $\mathbb{R}$ с лебеговой мерой и $(\mathcal{X}, \mu)$ – пространство реализаций некоторого процесса Леви (понимаемого как процесс с независимыми значениями) на $\mathbb{R}$. Рассмотрим действие однопараметрической группы сдвигов прямой на пространстве $(\mathcal{X}, \mu)$ реализаций процесса Леви; тогда для всякого невырожденного процесса Леви эти действия спектрально изоморфны, точнее – соответствующие однопараметрические группы всегда имеют счетнократный лебеговский спектр. Метод доказательства в работе [50] использует аргументы типа разложения Винера–Ито для процессов Леви, что сближает его с нашими рассмотрениями. В той же работе ставится вопрос о метрическом изоморфизме этих действий для разных процессов Леви. В настоящее время, используя достижения эргодической теории, можно положительно ответить на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 3. *Действие однопараметрической группы сдвигов на пространстве реализаций любого невырожденного процесса Леви есть бернуллиевское действие группы $\mathbb{R}^1$ с бесконечной энтропией. Следовательно, все эти действия метрически изоморфны.*

Заметим, что тем самым этот изоморфизм действий не сохраняет тип факторизации.

Рассмотрим действие всей группы $\text{Aut}(X, \nu)$ на пространстве реализаций процесса Леви. Как нетрудно показать, спектральный (т.е. операторный) или метрический изоморфизм двух таких действий всей группы $\text{Aut}(X, \nu)$ влечет соответствующий (гильбертов или метрический) изоморфизм факторизаций. Из нашего основного результата будет следовать, что действия операторно изоморфны для процессов Леви одинаковой размерности (т.е. с одинаковой мощностью носителя меры Леви) и неизоморфны для процессов Леви различных размерностей. Вопрос о метрической классификации сводится к вопросу о метрической классификации факторизаций, см. п. 2.4 выше.

Заметим, что метрическая теория действий групп автоморфизмов гауссовского процесса далеко продвинута начиная с работ А. Н. Колмогорова, С. В. Фомина, И. В. Гирсанова, Я. Г. Синая, Г. Маруямы, А. М. Вершика и др. (см., например, [51], [52]), однако для других процессов с независимыми значениями известно гораздо меньше. Например, для гамма-процесса эта теория должна быть содержательной (см., например, [33]).

2.6. Об ортогональных разложениях. Под ортогональным разложением в пространстве квадратично интегрируемых функционалов от процесса с независимыми значениями ϕ мы понимаем результат стандартного процесса ортогонализации в $L^2(\phi)$, примененного к симметрическим тензорным степеням подпространства

аддитивных функционалов (первого хаоса). Задача построения такого разложения для произвольного процесса с независимыми значениями может быть решена в соответствии со следующей общей схемой.

Пусть ϕ – процесс с независимыми значениями на X , который может рассматриваться как случайная мера на X . Построим ортогональное разложение в пространстве $L^2(\phi)$ квадратично интегрируемых функционалов от этого процесса. Положим $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{H}_1$ – подпространство центрированных (т.е. ортогональных константам) *аддитивных* функционалов относительно факторизации, задаваемой процессом η (если мы знаем множество $\mathcal{M}$ квадратично интегрируемых мультипликативных функционалов в этой факторизации, то подпространство $\mathcal{H}_1$ может быть получено при помощи конструкции логарифма, описанной в теореме 2). Предполагая, что мы уже построили подпространства $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{n-1}$, определим следующее подпространство $\mathcal{H}_n$ как ортогональное дополнение к $\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{n-1}$ в подпространстве, натянутом на функционалы порядка n , т.е. произведения n аддитивных функционалов:

$$\mathcal{H}_n = \overline{\{F_1(\phi) \cdots F_n(\phi), F_k \in \mathcal{H}_1\}} \ominus (\mathcal{H}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{n-1}).$$

Подпространство $\mathcal{H}_n$ называется подпространством *n -го хаоса* процесса ϕ . Имеем:

$$L^2(\phi) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Заметим, что для общих процессов Леви пространство *аддитивных* функционалов $\mathcal{H}_1$ *шире*, чем пространство *линейных* функционалов L_1 . Если применить описанный выше процесс ортогонализации к подпространству L_1 вместо $\mathcal{H}_1$, то n -е полученное подпространство L_n будет пространством n -кратных стохастических интегралов от ϕ , но сумма этих пространств не будет исчерпывать все $L^2(\phi)$ (см. §4). Однако для гауссовского и пуассоновского процессов пространства аддитивных и линейных функционалов совпадают, поэтому $\mathcal{H}_n = L_n$ при любом n .

Пространство L_n можно описать явно, используя общий комбинаторный подход к теории стохастических интегралов, предложенный в работе Дж.-К. Рота и Т. Уоллстрома [30]. Обозначим через Δ_n n -ю диагональную меру процесса ϕ , определяемую формулой

$$\Delta_n(A) = \phi^{\otimes n}\{(x, \dots, x) : x \in A\}$$

для любого измеримого множества A . Из результатов работы [30] (см. также [15]) нетрудно получить, что L_n натянуто на n -кратные стохастические интегралы вида

$$\begin{aligned} I_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}(\phi) &= \int f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) d\phi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{g \in \mathfrak{S}_n(x_1, \dots, x_n)} (-1)^{n-c(g)} \prod_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}) \in C(g)} \int f_{i_1}(x) \cdots f_{i_k}(x) d\Delta_k(x), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathfrak{S}_n(x_1, \dots, x_n)$ – симметрическая группа степени n , реализованная как группа перестановок множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, $C(g)$ – множество циклов перестановки g , а $c(g) = \#C(g)$ – число циклов перестановки g .

В п. 3.4 мы рассмотрим ортогональные разложения для пуассоновского и гауссовского процессов, а в §4 – для произвольных процессов Леви.

§ 3. Канонический изоморфизм между факторизациями, порожденными гауссовским и пуассоновским процессами

В этом параграфе мы изучаем изометрию между пространствами квадратично интегрируемых функционалов от гауссовского и пуассоновского процессов над одним и тем же базовым пространством. Во многих работах отмечалось, что эти пространства обладают рядом очень похожих свойств. Однако факт существования естественной изометрии между этими пространствами был впервые установлен в работе А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева [27] из соображений, связанных с теорией представлений групп диффеоморфизмов; явным образом эта изометрия была описана Ю. А. Неретиным [28] как изометрия между пространством квадратично интегрируемых функционалов от пуассоновского процесса и так называемой голоморфной моделью бозонного пространства Фока.

Зафиксируем базовое пространство (X, ν) , представляющее собой непрерывное пространство Лебега. В соответствии с общей конструкцией факторизации, определяемой процессом с независимыми значениями, в пространствах $L^2(\alpha)$ и $L^2(\pi)$ квадратично интегрируемых функционалов от гауссовского белого шума и пуассоновского процесса на пространстве (X, ν) соответственно заданы гильбертовы факторизации над (X, ν) .

ТЕОРЕМА 4. *Существует единственный сохраняющий единицу специальный вещественный⁹ изоморфизм гильбертовых факторизаций в пространствах $L^2(\alpha)$ и $L^2(\pi)$. Соответствующая изометрия*

$$\Phi: L^2(\alpha) \rightarrow L^2(\pi)$$

гильбертовых пространств задается следующей формулой на множестве мультипликативных функционалов: для произвольной функции $h \in L^2(X, \nu) \cup L^1(X, \nu)$

$$\Phi: e^{\langle h, \cdot \rangle - \frac{\|h\|^2}{2}} \mapsto \prod_{x \in \omega} (1 + h(x)) \cdot e^{-\int h(x) d\nu(x)}, \quad \omega \in \mathcal{E}. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Так как отображение $L^2(X, \nu) \ni h \mapsto \Phi h \in L^2(\pi)$, задаваемое формулой (9), непрерывно в топологии $L^2(X, \nu)$ (поскольку норма функционала, определяемого правой частью, равна, как нетрудно посчитать, $e^{\|h\|^2}$), то оно продолжается по непрерывности на все пространство $L^2(X, \nu)$.

2. Сама формула (9) встречалась, например, в [7], однако тот факт, что эта формула задает изометрию гильбертовых пространств и изоморфизм факторизаций, по-видимому, замечен не был.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (9) следует из формулы для бозон-пуассоновского соответствия, описанного в работе [28] в терминах голоморфной модели пространства Фока, и формулы (3), задающей изоморфизм между $L^2(\alpha)$ и бозонным пространством Фока. С другой стороны, нетрудно непосредственно убедиться в том, что отображение, задаваемое формулой (9), есть изоморфизм с требуемыми свойствами.

⁹Т.е. переводящий вещественное подпространство вещественнозначных функционалов от одного процесса в такое же подпространство для другого процесса.

Очевидно, что любые два изоморфизма с требуемыми свойствами отличаются друг от друга на сохраняющий вакуум специальный автоморфизм фоковской факторизации в пространстве $\text{EXP } L^2(X, \nu)$, т.е. элемент группы $\text{SAUT}_1(\text{EXP } L^2(X, \nu))$. Поэтому единственность следует из предложения 2. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, мы получили, что множество квадратично интегрируемых мультипликативных функционалов от пуассоновского процесса есть $\{c \cdot \prod_{x \in \omega} (1 + h(x)), h \in L^2(X, \nu)\}$.

Наша цель состоит в том, чтобы изучить изометрию (9) более подробно. В частности, мы бы хотели найти ее *ядро*, т.е. обобщенную функцию $K(\omega, f)$ на $\mathcal{E} \times \hat{H}$ такую, что для каждого функционала $F \in L^2(\pi)$

$$(\Phi^{-1}F)(\cdot) = \int_{\mathcal{E}} K(\omega, \cdot) F(\omega) d\mathcal{P}(\omega). \quad (10)$$

Пусть η – процесс с независимыми значениями на пространстве (X, ν) . Будем называть функционал $F \in L^2(\eta)$ *однопорожденным*, если он зависит только от интеграла $\langle \eta, 1 \rangle$ от процесса η по всему пространству X . Аналогично, F называется *конечнопорожденным* (n -порожденным), если существует конечное измеримое разбиение $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ такое, что F зависит только от интегралов $\langle \eta, \chi_{A_1} \rangle, \dots, \langle \eta, \chi_{A_n} \rangle$ от процесса η по множествам $A_1, \dots, A_n$. Заметим, что $L^2(\eta)$ есть проективный предел подпространств конечнопорожденных функционалов относительно измельчения разбиений. Ясно, что изоморфизм факторизаций, порожденных двумя процессами η_1 и η_2 , должен переводить множество n -порожденных функционалов от η_1 в такое же множество для η_2 .

3.1. Ограничение канонического изоморфизма на подпространство однопорожденных функционалов. Рассмотрим ограничение изоморфизма (9) на подпространства однопорожденных функционалов (см. определение выше). Если η есть гауссовский белый шум на пространстве (X, ν) , причем $\nu(X) = a$, то $\eta(X) = \langle \eta, 1 \rangle$ есть гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией a , так что пространство однопорожденных функционалов от η естественно отождествляется с пространством $L^2(\mathbb{R}, N(0, a))$ квадратично интегрируемых функций по нормальному распределению (которое можно рассматривать также как пространство L^2 над гауссовским процессом на пространстве $X = \{x\}$, состоящем из единственной точки с весом a). Аналогично, пространство однопорожденных функционалов от пуассоновского процесса π на (X, ν) отождествляется с пространством $L^2(\mathbb{Z}_+, P_a)$ последовательностей $b = \{b_n\}_{n \geq 0}$ со скалярным произведением

$$(b, b') = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} b_n b'_n$$

(т.е. пространством L^2 над пуассоновским процессом на одноточечном пространстве). Рассмотрим эту ситуацию более подробно.

Формула (9) принимает следующий вид: для всех $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tx - \frac{at^2}{2}} \leftrightarrow \{e^{-at} (1+t)^k\}_{k=0}^{\infty}. \quad (11)$$

Заметим, что левая часть формулы (11) есть производящая функция для многочленов Эрмита $H_n^a(x)$, а правая часть – производящая функция для многочленов Шарлье $C_n^a(k)$ (см. приложение D). Эти многочлены образуют ортогональные семейства в пространствах $L^2(\mathbb{R}, N(0, a))$ и $L^2(\mathbb{Z}_+, P_a)$ соответственно, причем

$$\|H_n^a\|_{L^2(\mathbb{R}, N(0, a))}^2 = \|C_n^a\|_{L^2(\mathbb{Z}_+, P_a)}^2 = a^n n!,$$

поэтому

$$\Phi(H_n^a) = C_n^a. \quad (12)$$

Таким образом, формула (11) есть в точности выражение соотношения (12) в терминах производящих функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Ядро (10) канонического изоморфизма между $L^2(\mathbb{R}, N(0, a))$ и $L^2(\mathbb{Z}_+, P_a)$ задается формулой

$$K^a(k, x) = e^{-\frac{a}{2} - x} \frac{H_k^a(x + 2a)}{a^k}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если ν_1 и ν_2 – произвольные меры на $\mathbb{R}$, имеющие конечные моменты любого порядка, и $\{P_n^{(j)}\}$ – семейство ортонормированных многочленов относительно меры ν_j , $j = 1, 2$, то ядро изометрии между $L^2(\mathbb{R}, \nu_1)$ и $L^2(\mathbb{R}, \nu_2)$ задается формулой

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)}(x) P_n^{(2)}(y)$$

в случае, если ряд сходится в $L^2(\mathbb{R}, \nu_1)$ для почти всех y .

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) C_n^a(k)}{a^n n!}.$$

Мы хотим доказать, что этот ряд сходится в $L^2(\mathbb{R}, N(0, a))$ при любом $k \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку H_n^a – ортогональные многочлены в $L^2(\mathbb{R}, N(0, a))$ и $\|H_n^a\|^2 = n! a^n$, то достаточно проверить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|C_n^a(k)|^2}{a^n n!} < \infty. \quad (14)$$

Но в силу (57)

$$\frac{|C_n^a(k)|^2}{a^n} = |C_k^a(n)|^2 a^{n-2k} \leq \text{const} \cdot n^{2k} a^{n-2k},$$

поскольку C_k^a есть многочлен степени k , откуда немедленно следует (14).

Таким образом,

$$K(k, x) := K^a(k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) C_n^a(k)}{a^n n!}.$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\mathcal{K}(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} K(k, x).$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$\mathcal{K}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x)}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{C_n^a(k)}{a^n}.$$

Ввиду (57) и (55), внутренняя сумма равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{t^k}{a^k k!} C_k^a(n) = (-1)^n e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^n.$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) a^n}{n!} \left(\frac{t}{a} - 1\right)^n e^t = \exp\left(2t + \frac{tx}{a} - x - \frac{t^2}{2a} - \frac{a}{2}\right),$$

что в силу (51) совпадает с производящей функцией для $e^{-\frac{a}{2}-x} \frac{H_k^a(x+2a)}{a^k}$. Предложение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно проверить формулу (13) непосредственно, используя известную формулу [53; формула 7.377]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x+a) H_m(x+b) dx = m! (-b)^{n-m} L_m^{n-m}(-ab), \quad m \leq n,$$

где $L_n^\alpha(x)$ – многочлен Лагерра с параметром α , и формулу $C_n^a(x) = n! L_n^{x-n}(a)$, связывающую ортогональные многочлены Шарлье и Лагерра.

СЛЕДСТВИЕ 1. Мы доказали следующее тождество, связывающее ортогональные многочлены Эрмита и Шарлье:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) C_n^a(k) a^n}{n!} = e^{-\frac{a}{2}-x} \frac{H_k^a(x+2a)}{a^k}. \quad (15)$$

В частности, полагая $C_n(\cdot) = C_n^1(\cdot)$, мы получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) C_n(k)}{n!} = e^{-\frac{1}{2}-x} H_k(x+2). \quad (16)$$

Таким образом, в случае одноточечного пространства X мы имеем описание канонического пуассон-гауссовского изоморфизма на трех уровнях:

- соответствие мультипликативных функционалов: (11);
- соответствие ортогональных многочленов: (12);
- явное ядро: (13).

Наша цель состоит в получении формул второго и третьего уровня для произвольных пространств.

3.2. Ограничение канонического изоморфизма на подпространство конечнопорожденных функционалов. Пусть $X = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — измеримое разбиение пространства X , причем $\nu(A_j) = a_j$. Рассмотрим соответствующие подпространства конечнопорожденных функционалов в $L^2(\alpha)$ и $L^2(\pi)$. Аналогично случаю однопорожденных функционалов, эти подпространства могут быть отождествлены с пространствами L^2 над соответствующими процессами на конечном пространстве $X = \{s_1, \dots, s_m\}$, состоящем из m точек с весами $\nu(s_j) = a_j, j = 1, \dots, m$. Используя результаты предыдущего пункта, получаем, что

$$\begin{aligned} L^2(\alpha) &= \bigotimes_{j=1}^m L^2(\mathbb{R}, N(0, a_j)), \\ L^2(\pi) &= \bigotimes_{j=1}^m L^2(\mathbb{Z}_+, P_{a_j}), \\ \Phi\left(\prod_{j=1}^m H_{k_j}^{a_j}(\cdot)\right) &= \prod_{j=1}^m C_{k_j}^{a_j}(\cdot) \end{aligned}$$

и при $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n$

$$K(k, x) = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{a_j}{2} - x_j} \frac{H_{k_j}^{a_j}(x_j + 2a_j)}{a_j^{k_j}}. \quad (17)$$

3.3. Логарифм. В этом пункте мы применяем операцию логарифмирования, описанную в теореме 2, для нахождения пространств аддитивных функционалов от гауссовского и пуассоновского процессов. Заметим, что под действием канонического изоморфизма Φ операция логарифмирования в пуассоновской факторизации переходит в операцию логарифмирования в гауссовской факторизации, поэтому аддитивные функционалы переходят в аддитивные.

Пуассоновский процесс. В этом случае $(\Omega, \mathcal{P}) = (\mathcal{E}(X), \mathcal{P})$ и нормированные мультипликативные функционалы задаются формулой

$$F_A(\omega) = \prod_{x \in \omega \cap A} (1 + h(x)) \cdot e^{-\int_A h(x) d\nu(x)}, \quad h \in L^2(X, \nu),$$

для любого измеримого множества $A \subset X$.

$$\text{ЛЕММА 3. } \text{LOG } F_A(\omega) = \sum_{x \in \omega \cap A} h(x) - \int_A h(x) d\nu(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть искомой формулы через $G_A(\omega)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k (F_{A_k}(\cdot) - 1) - G(\cdot) \right\|^2 &= \left\| \sum_k (F_{A_k}(\cdot) - 1 - G_{A_k}(\cdot)) \right\|^2 \\ &= \sum_k \|F_{A_k}(\cdot) - 1 - G_{A_k}(\cdot)\|^2, \end{aligned}$$

поскольку ограничения пуассоновского процесса на дизъюнктные подмножества независимы. Используя теорему Кэмпбелла для сумм и произведений по пуассоновским процессам (см., например, [47; пп. 3.2, 3.3]), нетрудно вычислить, что в этом случае

$$m_F(A) = \int_A h^2(x) d\nu(x)$$

и

$$\|F_{A_k}(\cdot) - 1 - G_{A_k}(\cdot)\|^2 = e^{m_F(A_k)} - 1 - m_F(A_k).$$

Пусть $m_F(A_k) < \delta$ при любом k . Тогда для достаточно малых δ имеем

$$\|F_{A_k}(\cdot) - 1 - G_{A_k}(\cdot)\|^2 < C m_F(A_k)^2.$$

Следовательно,

$$\left\| \sum_k (F_{A_k}(\cdot) - 1 - G_{A_k}(\cdot)) \right\|^2 \leq C \sum_k m_F(A_k)^2 \leq C \sum_k \delta \int_{A_k} h^2(x) d\nu(x) \leq C \|h\|^2 \delta.$$

Это выражение сколь угодно мало при достаточно малых δ , и лемма доказана.

Таким образом, мы получаем, что пространство аддитивных функционалов от пуассоновского процесса (“первый хаос”) есть

$$\left\{ \sum_{x \in \omega} h(x) - \int_X h(x) d\nu(x), h \in L^2(X, \nu) \right\}. \quad (18)$$

Гауссовский процесс. Вычислим теперь логарифм для гауссовского процесса. В этом случае нормированные мультипликативные функционалы задаются формулой

$$F_A(\eta) = e^{\langle h, \eta_A \rangle - \frac{1}{2} \int_A h^2(x) d\nu(x)}, \quad h \in L^2(X, \nu),$$

где η_A – ограничение процесса η на $A \subset X$.

ЛЕММА 4. $\text{LOG } F(\eta) = \langle h, \eta \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_A(\eta) = \langle h, \eta_A \rangle$. Нетрудно вычислить, что в этом случае

$$m_F(A) = \log \mathbb{E} \|e^{\langle h, \eta_A \rangle - \frac{1}{2} \int_A h^2(x) d\nu(x)}\|^2 = \int_A h^2(x) d\nu(x)$$

и

$$\begin{aligned} \|F_A(\cdot) - 1 - G_A(\cdot)\|^2 &= \mathbb{E} \|e^{\langle h, \eta_A \rangle - \frac{1}{2} \int_A h^2(x) d\nu(x)} - 1 - \langle h, \eta_A \rangle\|^2 \\ &= e^{m_F(A)} - 1 - m_F(A), \end{aligned}$$

что в точности совпадает с соответствующими формулами для пуассоновского случая, поэтому дальнейшее доказательство буквально воспроизводит доказательство леммы 3.

3.4. Соответствие ортогональных разложений (хаосов). В этом пункте мы сформулируем канонический изоморфизм (9) на уровне ортогональных разложений. Напомним, что под ортогональным разложением понимается результат стандартного процесса ортогонализации в L^2 , примененного к симметрическим тензорным степеням подпространства аддитивных функционалов (первого хаоса). Общая схема построения такого разложения описана в п. 2.6. Напомним также, что для гауссовского и пуассоновского процессов пространства аддитивных и линейных функционалов совпадают, поэтому пространство n -го хаоса $\mathcal{H}_n$ совпадает с пространством n -кратных стохастических интегралов L_n , и для построения ортогонального разложения применима комбинаторная схема, описанная в п. 2.6.

Ортогональное разложение

$$L^2(\alpha) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \quad (19)$$

в пространстве квадратично интегрируемых функционалов от гауссовского белого шума есть хорошо известное разложение Винера–Ито–Камерона–Мартина. Хотя соответствующие формулы являются классическими, полезно отметить, как они получаются в общей комбинаторной схеме. Если ϕ есть гауссовский белый шум на пространстве (X, ν) , то $\Delta_2 = \nu$, $\Delta_3 = \Delta_4 = \dots = 0$ [30; пример G], откуда получаем, что подпространство $\mathcal{H}_n = L_n$ натянуто на функционалы вида

$$\mathfrak{H}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}(\cdot) = \sum_{g \in \text{Inv}_n} \prod_{i \in C_1(g)} \langle f_i, \cdot \rangle \prod_{\{j, k\} \in C_2(g)} (-\langle f_j, f_k \rangle), \quad (20)$$

где Inv_n – множество всех инволюций в $\mathfrak{S}_n$, $C_k(g)$ – число циклов длины k перестановки $g \in \mathfrak{S}_n$ и $(f_j, f_k) = \int_X f_j(x) f_k(x) d\nu(x)$ – скалярное произведение в $L^2(X, \nu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Функционал $\mathfrak{H}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}$ называется n -м обобщенным функционалом Эрмита.

В частности, при $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$ мы получаем (см. приложение D, (52)), что

$$\mathfrak{H}_{f, \dots, f}^{(n)}(\cdot) = \sum_{g \in \text{Inv}_n} \langle f, \cdot \rangle^{c_1(g)} \cdot (-\|f\|^2)^{c_2(g)} = H_n^\sigma(\langle f, \cdot \rangle), \quad (21)$$

т.е. $I_n^g(f, \dots, f)$ есть обычный многочлен Эрмита степени n с параметром $\sigma = \|f\|^2$ от $\langle f, \cdot \rangle$.

Заметим, что в терминах пространства Фока $\text{EXP } H$ подпространство $\mathcal{H}_n$ есть в точности n -частичное подпространство $S^n H$.

Соответствующее ортогональное разложение для пуассоновского процесса впервые обсуждалось К. Ито [2], а в явном виде было построено в работе Х. Огура [14]. В рамках общего комбинаторного подхода оно получается следующим образом. В этом случае ϕ есть центрированный пуассоновский процесс на (X, ν) , т.е. $\phi = \sum_{x \in \omega} \delta_x - \nu$, где ω – пуассоновский процесс на (X, ν) , и его диагональные меры равны $\Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \omega$ [30; пример CP]. Таким образом, имеем

$$L^2(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n, \quad (22)$$

где $V_0 = \mathbb{C}$ и V_n есть подпространство, натянутое на n -кратные стохастические интегралы от пуассоновского процесса, которые задаются формулой

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)} &= \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{n-c(g)} \prod_{i \in C_1(g)} \left(\sum_{x \in \omega} f_i(x) - \int_X f_i(x) d\nu(x) \right) \\ &\times \prod_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in C(g)} \sum_{x \in \omega} f_{i_1}(x) \cdots f_{i_k}(x). \end{aligned} \quad (23)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Функционал $\mathfrak{C}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}$ называется n -м обобщенным функционалом Шарлье.

Если $f_1 = \cdots = f_n = \chi_A$, где χ_A — характеристическая функция измеримого множества $A \subset X$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\chi_A, \dots, \chi_A}^{(n)} &= \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} (\#(\omega \cap A) - \nu(A))^{c_1(g)} \cdot \#(\omega \cap A)^{-c_2(g) + c_3(g) - \dots} \\ &= C_n^\sigma(\#(\omega \cap A)), \end{aligned} \quad (24)$$

т.е. $\mathfrak{C}_{\chi_A, \dots, \chi_A}^{(n)}$ есть обычный многочлен Шарлье степени n с параметром $\sigma = \nu(A)$ от $\omega(A)$ (см. приложение D, (56)). (Заметим, что в отличие от гауссовского случая для пуассоновского процесса функционал $\mathfrak{C}_{f, \dots, f}^{(n)}$ с произвольной функцией f не является обычным многочленом Шарлье. Это объясняется тем, что произвольный линейный функционал от гауссовского процесса имеет нормальное распределение, в то время как в пуассоновском случае пуассоновские распределения имеют только интегралы по подмножествам пространства X .) В частности, из формулы (23) следует, что первый хаос пуассоновского процесса состоит из функционалов вида

$$\mathfrak{C}_f^{(1)}(\pi) = \sum_{x \in \pi} f(x) - \int_X f(x) d\nu(x)$$

(ср. (18)), а второй хаос порожден функционалами вида

$$\mathfrak{C}_{f,g}^{(2)}(\pi) = \mathfrak{C}_f^{(1)}(\pi) \mathfrak{C}_g^{(1)}(\pi) - \sum_{x \in \omega} f(x)g(x). \quad (25)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Канонический изоморфизм Φ переводит обобщенный функционал Эрмита в соответствующий обобщенный функционал Шарлье:

$$\Phi \mathfrak{H}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)} = \mathfrak{C}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}. \quad (26)$$

3.5. Ядро. Пусть имеется изометрия T гильбертовых пространств $L^2(A, \mu)$ и $L^2(B, \nu)$. В некоторых случаях эту изометрию можно представить в интегральной форме

$$(TF)(\cdot) = \int_A K(x, \cdot) F(x) d\mu(x), \quad F \in L^2(A, \mu),$$

где K – (возможно, обобщенная в том или ином смысле) функция двух переменных на пространстве $A \times B$, называемая ядром изометрии. В этом пункте мы выпишем ядро (10) пуассон-гауссовской изометрии Φ , для простоты предполагая, что $X = [0, 1]$ и ν есть мера Лебега на $[0, 1]$, т.е. ядро изометрии между пространствами квадратично интегрируемых функционалов от стандартного белого шума на отрезке $[0, 1]$ и от однородного пуассоновского процесса на $[0, 1]$ с единичной интенсивностью. Случай произвольного непрерывного пространства Лебега (X, ν) полностью аналогичен. В нашем случае ядро оказывается “почти” обычной функцией, а именно, для любых измеримых подмножеств $A \subset \mathcal{E}$ и $B \subset \hat{H}$ (напомним, что $\mathcal{E}$ есть множество конфигураций в пространстве X , т.е. пространство реализаций пуассоновского процесса, а $\hat{H}$ – ядерное расширение пространства $L^2(X, \nu)$, являющееся пространством реализаций гауссовского белого шума) положим

$$\rho(A, B) = \int_A \int_B K(\omega, \eta) d\mathcal{P}(\omega) d\mu(\eta).$$

Тогда ρ есть аддитивная функция множеств на $\mathcal{E} \times \hat{H}$. Таким образом, K может рассматриваться как плотность заряда (бесконечной вариации) на $\mathcal{E} \times \hat{H}$.

Введем следующие обозначения. Для данной точечной конфигурации $\omega \in \mathcal{E}$ (поскольку параметрическая мера ν предполагается непрерывной, мы можем рассматривать только простые конфигурации, т.е. не имеющие кратных точек) обозначим через $\Pi_{\leq 2}(\omega)$ множество разбиений множества ω на подмножества, состоящие не более чем из двух точек. Например, если $\omega = \{x, y, z\}$, то

$$\Pi_{\leq 2}(\omega) = \{\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}, \{\{x, y\}, \{z\}\}, \{\{x\}, \{y, z\}\}, \{\{x, z\}, \{y\}\}\}.$$

Для каждого разбиения $R \in \Pi_{\leq 2}$ обозначим через $C_k(R)$ множество k -точечных подмножеств в R , $k = 1, 2$, и положим $|R| = \#C_2(R)$.

ТЕОРЕМА 5. Ядро (10) канонического изоморфизма (9) между $L^2(\alpha)$ и $L^2(\pi)$ задается следующей формулой:

$$K(\omega, \eta) = e^{-\frac{1}{2} - \langle \eta, 1 \rangle} \sum_{R \in \Pi_{\leq 2}(\omega)} (-1)^{|R|} \prod_{z \in C_1(R)} (\eta + 2)(z) \prod_{\{x, y\} \in C_2(R)} \delta(x - y) \quad (27)$$

для почти всех ω, η .

(Здесь $\eta + 2$ есть обобщенная функция $\langle \eta + 2, h \rangle = \langle \eta, h \rangle + 2 \int h(t) dt$ и произведение есть прямое произведение обобщенных функций.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что соотношение (10) выполняется для мультипликативных функционалов F , т.е. показать, что

$$\mathbb{E}\left(\prod_{x \in \omega} (1 + h(x)) K(\omega, \eta)\right) = \exp\left(-\frac{\|h\|^2}{2} + \langle \eta + 1, h \rangle\right) \quad (28)$$

для всех $h \in L^2(X, \nu)$. Нам будет удобнее переписать сумму в формуле (27) через *перестановки*, а не разбиения. Для данной n -точечной конфигурации $\omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ пусть $\mathfrak{S}_n(\omega)$ – симметрическая группа степени n , реализованная как группа всех перестановок множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $C_i(g)$ – множество всех циклов длины i в перестановке $g \in \mathfrak{S}_n$ и $c_i(g) = \#C_i(g)$. Наконец, пусть $\text{Inv}(\omega)$ – подмножество группы $\mathfrak{S}_n(\omega)$, состоящее из всех инволюций (т.е. перестановок, все циклы которых имеют длину не больше двух). Напомним, что число точек однородного пуассоновского процесса на $[0, 1]$ с единичной интенсивностью имеет пуассоновское распределение с параметром один, а условное распределение процесса при условии, что число точек равно n , совпадает с распределением n независимых одинаково распределенных случайных величин с равномерным распределением на $[0, 1]$. Таким образом, левая часть формулы (28) равна

$$e^{-3/2 - \langle \eta, 1 \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 (1 + h(x_1)) \dots (1 + h(x_n)) \\ \times \sum_{g \in \text{Inv}(x_1, \dots, x_n)} \prod_{\{x_i, x_j\} \in C_2(g)} (-\delta(x_i - x_j)) \cdot \prod_{x_k \in C_1(g)} (\eta(x_k) + 2) dx_1 \dots dx_n.$$

Вклад каждой пары $\{x, y\} \in C_2(g)$ равен

$$-\int_0^1 \int_0^1 (1 + h(x))(1 + h(y))\delta(x - y) dx dy = -\int_0^1 (1 + h(x))^2 dx,$$

а вклад каждого элемента $x \in C_1(g)$ равен

$$\int_0^1 (1 + h(x))(\eta(x) + 2) dx = \langle \eta + 2, 1 + h \rangle.$$

Таким образом, рассматриваемая сумма равна

$$e^{-3/2 - \langle \eta, 1 \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g \in \text{Inv}_n} t_1^{c_1(g)} t_2^{c_2(g)}, \quad (29)$$

где

$$t_1 = \langle \eta + 2, 1 + h \rangle, \\ t_2 = -\int_0^1 (1 + h(x))^2 dx.$$

Но сумма (29) есть в точности цикловый индекс $\tilde{Z}(\mathfrak{S}_n)[t_1, t_2, 0, 0, \dots]$ (см. приложение С, (47)). Применяя (48) с $z = 1$, получаем, что выражение (29) равно

$$\exp\left(-\frac{3}{2} - \langle \eta, 1 \rangle + \langle \eta + 2, 1 + h \rangle - \frac{1}{2} \int (1 + h(x))^2 dx\right),$$

и (28) следует из элементарных вычислений. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется другое доказательство теоремы 5, которое позволяет вывести формулу (27), а не только проверить ее. Идея этого доказательства заключается в следующем. Заметим, что

$$L^2(\alpha) = \varprojlim A_n,$$

где A_n – подпространство, состоящее из функционалов $F(\eta)$, зависящих только от $\langle \eta, \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \rangle, \dots, \langle \eta, \chi_{[\frac{n-1}{n}, 1]} \rangle$. Очевидно, что A_n изометрично пространству

$$\bigotimes_{j=1}^m L^2(\mathbb{R}, N(0, 1/n)).$$

Теперь можно применить формулу (17) и перейти к пределу.

ПРИМЕР 1. Пусть A_n – подпространство в $L^2(\pi)$, состоящее из функций, носитель которых содержится в множестве n -точечных конфигураций, $n = 1, 2, \dots$. Тогда из (27) следует, что образ подпространства A_1 при каноническом изоморфизме есть подпространство функционалов вида

$$e^{-\frac{3}{2} - \langle \eta, 1 \rangle} \langle \eta + 2, f \rangle, \quad f \in L^2([0, 1], \nu);$$

образ подпространства A_2 состоит из функционалов вида

$$e^{-\frac{3}{2} - \langle \eta, 1 \rangle} \frac{1}{2!} \left[\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) (\eta + 2)(x) (\eta + 2)(y) dx dy - \int_0^1 f(x, x) dx \right],$$

где $f \in L^2([0, 1] \times [0, 1], \nu \times \nu)$; а образ подпространства L_3 есть

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{3}{2} - \langle \eta, 1 \rangle} \cdot \frac{1}{3!} \left[\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) (\eta + 2)(x) (\eta + 2)(y) (\eta + 2)(z) dx dy dz \right. \\ & - \int_0^1 \int_0^1 f(x, x, z) (\eta + 2)(z) dx dz - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, y) (\eta + 2)(x) dx dy \\ & \left. - \int_0^1 \int_0^1 f(z, y, z) (\eta + 2)(y) dy dz \right], \end{aligned}$$

$f \in L^2([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], \nu \times \nu \times \nu)$.

ПРИМЕР 2. Каждая функция $h \in L^2(X, \nu)$ задает “линейный” функционал $F_h(\omega) = \sum_{x \in \omega} h(x)$ от пуассоновского процесса. Вычислим его образ в $L^2(\alpha)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} K(\omega, \eta) F_h(\omega) &= e^{-3/2 - \langle \eta, 1 \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{l=1}^n h(x_l) \\ & \sum_{g \in \text{Inv}(x_1, \dots, x_n)} \prod_{\{x_i, x_j\} \in C_2(g)} (-\delta(x_i - x_j)) \cdot \prod_{x_k \in C_1(g)} (\eta + 2)(x_k) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

(Напомним, что $C_k(g)$ есть множество циклов длины k перестановки g .) Легко проверить, что каждое слагаемое $h(x_l)$ вносит вклад

$$\begin{cases} \langle h, \eta + 2 \rangle (\langle 1, \eta \rangle + 2)^{c_1(g)-1} (-1)^{c_2(g)}, & \text{если } x_l \in C_1(g), \\ \langle h \rangle (\langle 1, \eta \rangle + 2)^{c_1(g)} (-1)^{c_2(g)}, & \text{если } x_l \in C_2(g). \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемая сумма равна $e^{-3/2-\langle \eta, 1 \rangle} (S_1 + S_2)$, где

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle h, \eta + 2 \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g \in \text{Inv}(x_1, \dots, x_n)} c_1(g) (\langle 1, \eta \rangle + 2)^{c_1(g)-1} (-1)^{c_2(g)}, \\ S_2 &= 2 \langle h \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g \in \text{Inv}(x_1, \dots, x_n)} c_2(g) (\langle 1, \eta \rangle + 2)^{c_1(g)} (-1)^{c_2(g)}. \end{aligned}$$

Заметим, что сумма в S_1 есть производная циклового индекса $\tilde{Z}(\mathfrak{S}_n)$ по t_1 , вычисленная в точке $t = (\langle 1, \eta \rangle + 2, -1, 0, 0, \dots)$, поэтому $S_1 = \langle h, \eta + 2 \rangle e^{\langle 1, \eta \rangle + 3/2}$. Аналогично, S_2 есть производная того же циклового индекса по t_2 , так что $S_2 = -\langle h \rangle e^{\langle 1, \eta \rangle + 3/2}$, где $\langle h \rangle = \int_X h(x) d\nu(x)$, и элементарные вычисления показывают, что образ функционала F_h в $L^2(\alpha)$ равен

$$F_h(\eta) = \langle h, \eta \rangle + \int_X h d\nu(x),$$

в соответствии с формулой (18).

§ 4. Изоморфизм факторизаций, порожденных общими процессами Леви

Цель этого параграфа – применить результаты о пуассон-гауссовском изоморфизме к общим процессам Леви. Напомним, что, как было отмечено в п. 2.4, изучение факторизаций, задаваемых общими процессами Леви, сводится к изучению пуассоновских и гауссовских факторизаций. Подчеркнем, что мы сводим общий случай к пуассон-гауссовскому, используя универсальность изометрии по отношению к базе.

Как было отмечено в п. 2.4, пространство $L^2(\eta_\Pi)$ квадратично интегрируемых функционалов от процесса Леви η_Π с мерой Леви–Хинчина Π может быть отождествлено с пространством $L^2(\pi_\nu \times \Pi)$ квадратично интегрируемых функционалов от пуассоновского процесса $\pi_\nu \times \Pi$ на прямом произведении $X \times \mathbb{R}$ со средней мерой $\nu \times \Pi$. Поэтому естественно ввести в рассмотрение белый шум $\alpha_{X \times \mathbb{R}}$ на пространстве $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$. Заметим, что этот процесс может рассматриваться также как $L^2(\mathbb{R}, \Pi)$ -значный белый шум $\alpha^{L^2(\mathbb{R}, \Pi)}$ на пространстве (X, ν) , т.е. $L^2(\alpha_{X \times \mathbb{R}})$ можно отождествить с однородным пространством Фока $\text{EXP } L^2((X, \nu); L^2(\mathbb{R}, \Pi))$. Пространства $L^2(\alpha^{L^2(\mathbb{R}, \Pi)})$ и $L^2(\eta_\Pi)$ снабжены естественными гильбертовыми факторизациями над (X, ν) .

ТЕОРЕМА 6. *Существует сохраняющая единицу изометрия (являющаяся изоморфизмом гильбертовых факторизаций)*

$$\Phi: L^2(\alpha^{L^2(\mathbb{R}, \Pi)}) \rightarrow L^2(\eta_\Pi).$$

На множестве мультипликативных функционалов она задается следующей формулой: для любой функции $h \in L^2(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi) \cap L^1(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$

$$\Phi: e^{\langle h, \cdot \rangle - \frac{\|h\|^2}{2}} \mapsto \prod_i (1 + h(x_i, t_i)) \cdot e^{-\iint h(x, t) d\nu(x) d\Pi(t)}. \quad (30)$$

Это единственный вещественный специальный сохраняющий вакуум изоморфизм гильбертовых факторизаций, тождественно действующий на пространстве значений $L^2(\mathbb{R}, \Pi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ.. Под тождественным действием изоморфизма на пространстве значений имеется в виду, что он является изоморфизмом факторизаций над пространством $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$. Иными словами, рассмотрим ограничение изоморфизма на подпространство первого хаоса, которое для обоих процессов может быть отождествлено с $L^2((X, \nu); L^2(\mathbb{R}, \Pi))$. Тогда для произвольного подмножества $A \subset L^2(\mathbb{R}, \Pi)$ изоморфизм сохраняет подмножество пространства $L^2((X, \nu); L^2(\mathbb{R}, \Pi))$, состоящее из функций, значения которых лежат в множестве A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из теоремы 4 и приведенных выше замечаний.

Без предположения о тождественности действия на пространстве значений указанный изоморфизм не является единственным. Действительно, применим предложение 2 и заметим, что множество операторов в пространстве $L^2((X, \nu); L^2(\mathbb{R}, \Pi))$, коммутирующих со всеми проекторами P_A , $A \subset X$, есть $L^\infty(X, \nu) \otimes \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}, \Pi))$. Поэтому группа SAUT_1 в этом случае натянута на операторы вида $\text{EXP}(h_1(\cdot) \otimes h_2(\cdot)) \mapsto \text{EXP}((a(\cdot)h_1(\cdot)) \otimes (Uh_2(\cdot)))$, где $h_1 \in L^2(X, \nu)$, $h_2 \in L^2(\mathbb{R}, \Pi)$, a – измеримая функция на X такая, что $|a| \equiv 1$, а U – произвольный унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R}, \Pi)$.

Из теоремы 6 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 7. Пусть η – процесс Леви на пространстве (X, ν) с мерой Леви–Хинчина Π . Тогда гильбертова факторизация, задаваемая процессом η , является однородной фоковской факторизацией, причем ее размерность равна числу точек в носителе меры Леви–Хинчина.

Теорема 6 устанавливает леви-гауссовский изоморфизм на уровне мультипликативных функционалов. Опишем его теперь в терминах ортогональных разложений, применяя общую схему, описанную в п. 2.6, и предполагая для простоты, что процесс является обобщенным субординатором. Согласно (22) мы имеем

$$L^2(\eta_\Pi) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n,$$

где V_n – подпространство, порожденное обобщенными функционалами Шарлье порядка n (23) в пространстве $(X \times \mathbb{R}, \nu \times \Pi)$. В частности, аддитивные функционалы имеют вид

$$\sum_i h(x_i, t_i).$$

Как мы видели выше, в случае гауссовского и пуассоновского процессов все аддитивные функционалы являлись линейными. Если же носитель меры Леви–Хинчина состоит больше чем из одной точки, т.е. процесс Леви не является ни гауссовским, ни пуассоновским, то *пространство аддитивных функционалов не совпадает с пространством линейных функционалов*, которые задаются формулой

$$\langle a, \eta \rangle = \int_X a(x) d\eta(x) = \sum_i a(x_i) t_i, \quad a \in L^2(X, \nu). \quad (31)$$

Это в точности является причиной хорошо известного факта (см., например, [54]), что единственными процессами Леви, обладающими так называемым свойством хаотического представления (которое означает, что пространство L^2 над этим процессом раскладывается в прямую сумму подпространств, натянутых на обычные стохастические интегралы от процесса), являются гауссовский и пуассоновский процессы.

В оставшейся части этого пункта мы предполагаем, что мера Π удовлетворяет условию (5), т.е. процесс Леви является обобщенным субординатором, и, кроме того, мера $t^2\Pi(t)$ имеет конечные моменты любого порядка и проблема моментов для этой меры является определенной. В этом случае можно получить более подробное описание ортогонального разложения.

Пусть $\{P_k(t)\}_{k=0}^\infty$ – семейство ортогональных многочленов на $\mathbb{R}_+$ относительно меры $t^2\Pi(t)$, и пусть $V_{n,k}$ – подпространство, натянутое на обобщенные функционалы Шарлье $\mathfrak{C}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}$ порядка n (см. определение 10), соответствующие функциям вида $f_i(x, t) = a_i(x) t P_{k-1}(t)$, т.е. функциям k -й степени по t .

Нетрудно видеть, что

$$V_n = \sum_{\lambda \vdash n} \bigoplus_{(i_1, \dots, i_k) \text{ различны}} \bigotimes_{j=1}^k V_{\lambda_j, i_j},$$

где $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0)$ – разбиение числа n , а тензорное произведение предполагается симметричным. Таким образом, переупорядочивая слагаемые, мы получаем следующее ортогональное разложение:

$$L^2(\eta) = \bigoplus_n \bigoplus_{\lambda \vdash n} \bigotimes_k V_{n_k, k} \\ = \mathbb{C} \oplus V_{1,1} \oplus (V_{1,2} \oplus V_{2,1}) \oplus (V_{3,1} \oplus (V_{1,1} \otimes_s V_{1,2}) \oplus V_{1,3}) \oplus \dots,$$

где $\lambda = 1^{n_1} 2^{n_2} \dots$ – разбиение числа n с n_k частями, равными k , и тензорное произведение – симметрическое.

То же разложение может быть описано по-другому (см. [20]). Для данного обобщенного субординатора $\eta = \sum t_i \delta_{x_i}$ рассмотрим процессы $\eta_k = \sum_i t_i P_{k-1}(t_i) \delta_{x_i}$ (в частности, $\eta_1 = \eta$). Тогда $V_{n,k}$ есть пространство n -кратных стохастических интегралов от процесса η_k .

Соответствующее разложение для пространства L^2 над векторнозначным гауссовским белым шумом получается аналогичным образом. А именно,

$$L^2(\alpha^{L^2(\mathbb{R}, \Pi)}) = \bigoplus_n \bigoplus_{\lambda \vdash n} \bigotimes_k \mathcal{H}_{n_k, k} \\ = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H}_{1,1} \oplus (\mathcal{H}_{1,2} \oplus \mathcal{H}_{2,1}) \oplus (\mathcal{H}_{3,1} \oplus (\mathcal{H}_{1,1} \otimes_s \mathcal{H}_{1,2}) \oplus \mathcal{H}_{1,3}) \oplus \dots,$$

где $\mathcal{H}_{n,k}$ – подпространство, натянутое на обобщенные функционалы Эрмита порядка n (см. определение 9), соответствующие функциям вида $f(x, t) = a(x) t P_{k-1}(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. В терминах ортогональных разложений канонический изоморфизм (30) имеет вид

$$\Phi \mathfrak{H}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)} = \mathfrak{C}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)},$$

где $f_k(x, t) = a_k(x)tP_{k-1}(t)$.

ПРИМЕР. Гамма-процесс. Стандартный гамма-процесс на пространстве (X, ν) есть обобщенный субординатор γ с мерой Леви

$$\Lambda_\Gamma(t) = \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad t > 0. \quad (32)$$

Таким образом, преобразование Лапласа гамма-процесса задается формулой

$$\mathbb{E}e^{-\langle a, \gamma \rangle} = \exp\left(-\int_X \log(1 + a(x)) d\nu(x)\right), \quad (33)$$

где a – произвольная неотрицательная измеримая функция на пространстве X такая, что $\int_X \log(a(x) + 1) d\nu(x) < \infty$.

К пространству $L^2(\gamma)$ применимы все рассуждения этого пункта, причем ортогональные многочлены относительно меры $t^2 \Lambda_\Gamma(t) = te^{-t} dt$ суть многочлены Лагерра с единичным параметром: $P_n(t) = L_n^{(1)}(t)$. Заметим, что появление многочленов Лагерра в этом примере связано не с тем хорошо известным фактом, что они являются ортогональными многочленами относительно гамма-распределения, т.е. безгранично делимого распределения, соответствующего гамма-процессу, а с тем, что они являются ортогональными многочленами относительно $t^2 \Lambda_\Gamma(t)$, т.е. меры Леви гамма-процесса с плотностью t^2 .

§ 5. Представления группы токов $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$

В качестве одного из приложений полученных результатов рассмотрим изоморфизм между пространством Фока и пространством L^2 над гамма-процессом (и изоморфным пространством L^2 над “бесконечномерной лебеговой мерой”) и применим эту конструкцию к представлениям групп токов над $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

5.1. Каноническое состояние на $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$. Пусть (X, ν) – стандартное борелевское пространство с фиксированной конечной мерой ν . Группой токов $G^X = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$ на (X, ν) называется группа борелевских ограниченных $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -значных функций на X . Иными словами, G^X состоит из матриц размера 2×2 , элементами которых являются ограниченные вещественные борелевские функции на X .

Каноническим представлением группы токов G^X называется унитарное неприводимое представление со сферической функцией, задаваемой формулой

$$\Omega(g(\cdot)) = C \exp\left(-\int_X \log(2 + \mathrm{Tr}(g(x)g^*(x))) d\nu(x)\right), \quad g(\cdot) \in G^X. \quad (34)$$

Ограничение этой сферической функции на подгруппу постоянных функций (изоморфную группе $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$) есть $\Omega_0(g) = \frac{C}{2 + \mathrm{Tr} gg^*}$, так называемое каноническое состояние группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, см. [31].

Рассмотрим безгранично делимую положительно определенную функцию на некоторой группе, иначе говоря, непрерывную однопараметрическую полугруппу положительно определенных функций. Интересен лишь тот случай, когда генератор полугруппы не есть положительно определенная функция, а является лишь условно положительной функцией. Тогда этот генератор как функция на группе не ограничен и является квадратом нормы нетривиального коцикла группы со значением в пространстве некоторого неприводимого представления этой группы, см. [31], [55], [56], [49], [6], [57] и др. Существование такого коцикла возможно, лишь когда единичное представление не изолировано в пространстве всех неприводимых представлений (т.е. для групп, не обладающих свойством (Т) Каждана [58]). Из классических простых групп лишь $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, обладают таким свойством, и соответствующий коцикл и состояние найдены в [31], [37]. Это состояние и названо каноническим. Оно позволяет определить представление группы токов в пространстве Фока. Формула (34) выше задает положительно определенную функцию на группе токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, порожденную каноническим состоянием; она является сферической функцией, порожденной вакуумным вектором соответствующего представления, реализованного в пространстве Фока. Далее мы дадим другую реализацию этого представления (см. п. 5.3).

Заметим, что ограничения канонического состояния на различные подгруппы (или коммутативные подалгебры групповой алгебры) определяют различные безгранично делимые меры на двойственной подгруппе (соответственно двойственном пространстве к алгебре), тем самым, диагонализация различных подгрупп или подалгебр порождает различные безгранично делимые меры, процессы Леви и, соответственно, модели фоковского пространства.

5.2. Фоковская модель канонического представления. Опишем фоковскую модель канонического представления группы $SL(2, \mathbb{R})^X$. Рассмотрим так называемое *особое* представление группы $G = SL(2, \mathbb{R})$, которое реализуется в гильбертовом пространстве $H = L^2\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{|t|}\right)$ и задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \left(T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \phi\right)(t) &= e^{ibt} \phi(t), \\ \left(T \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \phi\right)(t) &= \phi(a^2 t), \\ \left(T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \phi\right)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_0(t, s) \phi(s) ds, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$K_0(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|^2} e^{-i(tu + su^{-1})} du. \quad (36)$$

Это неприводимое унитарное представление дискретной серии. (Заметим, что над $\mathbb{C}$ это представление приводимо: оно раскладывается в сумму двух неприводимых подпредставлений.) Однако это представление выделено как единственное представление, обладающее нетривиальным коциклом.

Положим $\phi_0(t) = e^{-|t|}$ и зафиксируем коцикл $\beta: G \times H \rightarrow H$, задаваемый формулой

$$\beta(g, t) = T_g \phi_0(t) - \phi_0(t). \quad (37)$$

Рассмотрим гильбертово пространство

$$H^X = L^2\left(X \times \mathbb{R}, \nu \times \frac{dt}{|t|}\right)$$

и соответствующее пространство Фока $\text{EXP } H^X$. Реализация канонического представления группы $G^X = \text{SL}(2, \mathbb{R})^X$ в пространстве $\text{EXP } H^X$ задается формулой

$$U_{g(\cdot)} \text{EXP } h(\cdot, \cdot) = \lambda(g(x), h(x, t)) \cdot \text{EXP}(T_{g(x)} h(x, t) + \beta(g(x), t)), \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda(g, h) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\|\beta\|^2 - \langle T_g h, \beta \rangle\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_X \int_{\mathbb{R}} \frac{|\beta(g(x), t)|^2}{|t|} dt d\nu(x) \right. \\ &\quad \left. - \int_X \int_{\mathbb{R}} \frac{T_{g(x)} h(x, t) \cdot \bar{\beta}(g(x), t)}{|t|} dt d\nu(x) \right). \end{aligned}$$

Вакуумным вектором в фоковской реализации является $\text{EXP } 0$, и соответствующая сферическая функция равна (34).

Используя изоморфизм (3) между пространством Фока и пространством L^2 над гауссовским белым шумом, можно получить гауссовскую реализацию канонического представления. Соответствующие формулы могут быть найдены в работе [32].

5.3. Лебеговская модель канонического представления. Коммутативная модель канонического представления группы G^X относительно унипотентной подгруппы была предложена в работе [32]. Другая реализация той же модели, в пространстве L^2 над так называемой бесконечномерной мерой Лебега, была построена в [33]. Опишем эту модель.

Мерой Лебега $\mathcal{L}^+$ на пространстве $D^+(X, \nu)$ называется σ -конечная мера, эквивалентная распределению $\mathcal{G}$ гамма-процесса (см. пример в конце § 4), плотность которой задается формулой

$$\frac{d\mathcal{L}^+}{d\mathcal{G}}(\eta) = \exp(\eta(X)). \quad (39)$$

Из формул (33) и (39) следует, что преобразование Лапласа меры $\mathcal{L}^+$ равно

$$\int_{D^+} \left[\exp\left(-\int_X a(x) d\eta(x)\right) \right] d\mathcal{L}^+(\eta) = \exp\left(-\int_X \log a(x) d\nu(x)\right). \quad (40)$$

Мера Лебега на $D(X)$ есть свертка $\mathcal{L}^+ * \mathcal{L}^-$, где $\mathcal{L}^-$ – образ меры $\mathcal{L}^+$ при отображении $\eta \rightarrow -\eta$.

Произвольная измеримая функция $a: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\int_X |\log a(x)| d\nu(x) < \infty$, задает мультипликатор $M_a: D \rightarrow D$ по формуле

$$M_a: \eta = \sum_i t_i \delta_{x_i} \mapsto \sum_i a(x_i) t_i \delta_{x_i}.$$

Как доказано в [33], мера Лебега проективно инвариантна относительно группы мультипликаторов, а именно

$$\frac{dM_a(\mathcal{L})}{d\mathcal{L}} = \exp \left(- \int_X \log a(x) d\nu(x) \right).$$

Это важнейшее свойство бесконечномерной меры Лебега есть следствие замечательного свойства квазиинвариантности гамма-процесса (см. [59], [33]). В частности, оно позволяет построить представление группы токов в пространстве L^2 по мере Лебега. Заметим также, что, хотя существуют и другие субординаторы, квазиинвариантные относительно группы мультипликаторов (см. [60]), гамма-процесс является единственным субординатором, допускающим эквивалентную меру, проективно инвариантную относительно этой группы [33].

Рассмотрим треугольную подгруппу $\mathcal{T}$ группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$:

$$\mathcal{T} = \left\{ T_{a,b} = \begin{pmatrix} a(\cdot)^{-1} & 0 \\ b(\cdot) & a(\cdot) \end{pmatrix} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 8 [33]. *Формула*

$$[\mathcal{U}(T_{a,b})F](\eta) = \exp \left(\int_X \log |a(x)| d\nu(x) + i \int_X a(x)b(x) d\eta(x) \right) F(M_{a^2}\eta) \quad (41)$$

задает неприводимое унитарное представление треугольной подгруппы $\mathcal{T}$ в пространстве $L^2(D, \mathcal{L})$, которое продолжается до неприводимого унитарного представления всей группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$.

5.4. Изоморфизм между фоковской и лебеговской моделями. Фоковская модель (38) и лебеговская модель (41) задают изоморфные представления, поскольку их сферические функции совпадают. Однако теперь, используя канонический изоморфизм между пространством квадратично интегрируемых функционалов от гамма-процесса и пространством Фока, мы можем явно предъявить изоморфизм этих реализаций.

ТЕОРЕМА 9. *Изометрия пространств $\mathrm{EXP} H^X$ и $L^2(D, \mathcal{L})$, сплетающая фоковскую модель U и лебеговскую модель $\mathcal{U}$ канонического представления группы токов $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$, задается формулой*

$$\mathrm{EXP} h \leftrightarrow \Psi_h, \quad h \in L^2 \left(X \times \mathbb{R}, \nu \times \frac{dt}{|t|} \right) \cap L^1 \left(X \times \mathbb{R}, \nu \times \frac{dt}{|t|} \right),$$

где

$$\Psi_h(\eta) = \prod_i (h(x_i, t_i) + e^{-|t_i|/2}) \cdot \exp \left(- \int_X \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x, t) \cdot e^{-|t|/2}}{|t|} dt d\nu(x) \right) \quad (42)$$

для $\eta = \sum t_i \delta_{x_i} \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (42) задает изометрию пространств $\text{EXP } H^X$ и $L^2(D, \mathcal{L})$, как следует из теоремы 6, примененной к гамма-процессу, и очевидной изометрии между $L^2(D, \mathcal{G})$ и $L^2(\gamma)$, задаваемой формулой $F(\eta) \leftrightarrow F(\eta)e^{-\eta(X)/2}$. Нетрудно проверить при помощи явных вычислений, что эта изометрия сплетает представления U и $\mathcal{U}$.

Заметим, что в лебеговской модели вакуумный вектор есть $\Psi_0(\eta) = e^{-\frac{|\eta|(X)}{2}}$, где $|\eta| = \sum |t_i|$ – полная вариация заряда η .

СЛЕДСТВИЕ 4. Действие инволюции $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в лебеговской модели канонического представления группы G^X задается формулой

$$U_\sigma \Psi_{f(\cdot, \cdot)} = \Psi_{T_\sigma f(\cdot, \cdot)}, \quad (43)$$

где

$$T_\sigma f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(t, s) f(s) ds, \quad (44)$$

и ядро K_0 задается формулой (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 9 и (38), поскольку $\beta(\sigma, t) \equiv 0$.

Приложения

А. Пример нефоковской нульмерной факторизации (модель иерархического голосования [26]). В этом приложении мы воспроизведем пример нефоковской нульмерной факторизации, построенный в работе [26].

Мы рассмотрим простейшую, по существу чисто комбинаторную модель гильбертовой и метрической факторизации над канторовским компактом, которая не изоморфна фоковской факторизации (нелинеаризуема). Эта модель определяется двумя натуральными числами $m, r > 1$ и симметричным отображением $\phi: X_r^m \rightarrow X_r$, где X_r – множество из r элементов (удобно нумеровать их числами $0, 1, \dots, r-1$), а X_r^m – его m -я степень, при этом число точек в прообразе любой точки $x \in X_r$ одинаково, т.е. $\#(\phi^{-1}(x)) = m^{r-1}$. Из последнего условия следует, что ϕ -образ равномерной меры на X_r^m есть равномерная мера на X_r .

По каждой такой тройке (m, r, ϕ) мы построим некоторую факторизацию; при очень широких предположениях на отображение ϕ эти факторизации будут неизоморфны фоковской и обладать большой группой симметрий.

Назовем отображение ϕ *антиаддитивным* (соответственно *антимультимпликативным*), если выполнено следующее условие: если для функции $g: X_r \rightarrow \mathbb{C}$ существует некоторая функция $f: X_r \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что тождественно (т.е. при любых наборах $a_1 \in X_r, \dots, a_m \in X_r$) выполняется соотношение

$$f(\phi(a_1, \dots, a_m)) = g(a_1) + \dots + g(a_m) \quad (45)$$

(соответственно

$$f(\phi(a_1, \dots, a_m)) = g(a_1) \cdots g(a_m), \quad (46)$$

то функция f (а тогда и g) есть константа.

Например, если X_r есть аддитивная или мультипликативная группа, а ϕ – групповая операция, то непостоянными решениями этих уравнений являются аддитивные или мультипликативные характеры. Вот примеры антиаддитивных отображений.

ПРИМЕРЫ. 1. Модель голосования по большинству: $m = 3$, $r = 2$ и симметричное отображение ϕ задается формулой

$$\phi(a, b, b) = b, \quad a, b = 0, 1.$$

2. Пусть $m = 2$, $r = 3$ (т.е. $X_r = \{0, 1, 2\}$) и отображение ϕ задается таблицей значений

$$\phi = \begin{array}{ccc} & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & \end{array}.$$

Легко видеть, что непостоянных решений уравнений (45) и (46) ни в том, ни в другом примере нет.

В [26] приведен удобный критерий того, что решения уравнений (45) и (46) являются постоянными функциями (см. ниже). Оказывается, это общий случай, лишь в вырожденных случаях (сходных с групповыми законами) возникают непостоянные решения этих уравнений. Отсутствие таких решений будет гарантировать в нашей конструкции отсутствие аддитивных и мультипликативных векторов в построенной факторизации. Решающую роль для дальнейшего будет играть следующее условие на отображение ϕ .

Условие обильности. Пусть задано отображение $\phi: X_r^m \rightarrow X_r$. Зафиксируем произвольно $m - 1$ аргументов (в силу симметрии – безразлично каких), определим всевозможные получившиеся отображения множества X_r в себя: $a_m \mapsto \phi_{a_1, \dots, a_{m-1}}(a_m) \equiv \phi(a_1, \dots, a_m)$ и рассмотрим подполугруппу, порожденную всей совокупностью этих отображений в полугруппе отображений множества X_r в себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Отображение ϕ называется *обильным*, если полученная подполугруппа содержит хотя бы одно постоянное отображение.

Легко проверить, что обильность есть типичное условие. Например, при $m = 2$ ему не удовлетворяют только те отображения ϕ , которые определяют полугрупповой закон на множестве X_r ; в этом случае формула (46) задает мультипликативный характер группы или полугруппы. Условие обильности встречается также в теории марковских процессов.

Прежде чем строить гильбертову факторизацию для произвольной тройки (m, r, ϕ) , опишем соответствующее вероятностное пространство.

Пусть T_m есть бесконечное однокоренное m -ичное дерево, и предположим, что в каждой его вершине задана случайная величина, принимающая с равной вероятностью r значений, причем случайные величины одного уровня (одинаково удаленные от корня) независимы между собой и случайная величина ξ_v , отвечающая вершине v , равна $\phi(\xi_{v_1}, \dots, \xi_{v_m})$, где $v_1, \dots, v_m$ – вершины дерева, следующие за вершиной v , а ϕ – отображение, заданное выше (“голосование”).

Вероятностное пространство $\Omega = \Omega(m, r, \phi)$ есть пространство реализаций этого семейства случайных величин, т.е. пространство всех функций f на множестве вершин дерева T_m со значениями в множестве $X_r = \{1, 2, \dots, r\}$, удовлетворяющих приведенному выше условию: $\phi(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)) = f(v)$, где $v_1, \dots, v_m$ – вершины

дерева, следующие за вершиной v . (Следуя нашей аналогии, это пространство можно назвать пространством избирательных бюллетеней.¹⁰) В силу свойств отображения ϕ , на этом пространстве корректно определена равномерная мера, относительно которой выполнены условия независимости значений функции в различных вершинах одного и того же этажа (независимость избирателей одного уровня). Заметим, что пространство Ω с равномерной мерой есть обратный предел конечных пространств X_r^m с равномерной мерой относительно проекций, определяемых отображением ϕ .

Полезно дать другую интерпретацию пространства Ω . Пусть K_m есть канторовский компакт всех бесконечных путей дерева T_m с естественной вполне несвязной топологией. Каждая функция $f \in \Omega$ определяет *псевдомеру* ν_f на цилиндрических множествах пространства K_m , а именно значение псевдомеры ν_f на цилиндре C_v всех путей, проходящих через вершину v , есть по определению значение функции f в вершине v . Под псевдомерой мы здесь понимаем функцию ν , заданную на алгебре цилиндрических множеств компакта K_m и удовлетворяющую единственному условию на значения на элементарных цилиндрах¹¹, повторяющему условию на функции из пространства Ω : $\nu(C_v) = \phi(\nu(C_{v_1}), \dots, \nu(C_{v_m}))$; это условие можно назвать ϕ -аддитивностью. Таким образом, мы описали пространство Ω как пространство псевдомер. А мера на нем позволяет говорить о случайных псевдомерах.

В пространстве Ω естественно задана метрическая факторизация в смысле определения 2 над базой, являющейся булевой алгеброй цилиндрических множеств в пространстве K_m . Заметим, что отображение ζ из определения факторизации задано в нашем случае только на элементарных цилиндрах, но оно может быть корректно продолжено на булеву алгебру (но не σ -алгебру!), порожденную цилиндрами, в силу единственности разложения любого цилиндра на элементарные. Условие ϕ -аддитивности, однако, должно выполняться только для разложения элементарного цилиндра на элементарные.

Теперь мы в состоянии определить гильбертову факторизацию, которая при выполнении некоторого условия на отображение ϕ будет нефоковской. Но сначала приведем следующую аналогию. Данное выше описание аналогично следующему не вполне традиционному простому описанию процессов с независимыми значениями – аппроксимационному. Для простоты будем говорить лишь о белом шуме и использовать те же обозначения, что и ранее. Рассмотрим в нашем примере вместо конечного пространства X_r вещественную прямую $\mathbb{R}$ со стандартной гауссовой мерой, а в качестве отображения $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ возьмем нормированную сумму:

$$\phi(\xi_1, \dots, \xi_m) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_m}{\sqrt{m}}$$

(ϕ переводит стандартную гауссову меру на $\mathbb{R}^m$ в гауссову меру на $\mathbb{R}$). Нетрудно видеть, что в этом случае наша конструкция приводит к пространству Ω , элементы которого являются уже обычными аддитивными мерами на том же канторовском компакте K_m , а гауссова вероятностная мера на Ω определена тем, что значение (случайной)

¹⁰Заметим, что в “модели голосования по большинству” из примера 1 выше 2^n избирателей n -го уровня могут законно победить всех 3^n участвующих в голосовании избирателей, таким образом, уже при двухступенчатой системе ($n = 2$, всего 9 избирателей) четыре избирателя могут победить пятерых оставшихся, хотя это событие и маловероятно.

¹¹Элементарный цилиндр порядка k есть множество путей в дереве с заданным началом длины k .

аддитивной меры с вещественными значениями на любом цилиндре есть интеграл по этому цилиндру от реализации стандартного белого шума с базовым множеством K_m . Иначе говоря, мы представили гауссову меру, определяемую белым шумом, как обратный предел (в смысле линейных пространств) гауссовых мер на $\mathbb{R}^n$.

В определенном смысле и в нашем примере значения псевдомеры на цилиндре пространства K_m можно рассматривать как результат измерения на этом цилиндре некоторого нелинейного шума (“черного” шума, хотя это название выглядит слишком мрачным), при этом вместо аддитивности измерений есть лишь “ ϕ -аддитивность”, введенная выше.

Теперь не составляет труда описать гильбертово пространство $L^2(\Omega)$ и объяснить появление нефоксовской факторизации. Гильбертово пространство $H = L^2(\Omega)$ есть, разумеется, прямой предел по k конечномерных пространств $H_k = L^2(X_r^{m^k})$ относительно вложений, определяемых отображением ϕ ; здесь H_k есть пространство функций на произведении пространств X_r по вершинам k -го этажа. Но вложение

$$\bar{\phi}_k: H_k \rightarrow H_{k+1}$$

есть тензорное произведение k копий вложения $\bar{\phi}_1: L^2(X_r) \rightarrow L^2(X_r^m)$, поэтому достаточно определить лишь последнее вложение; оно задается на базисе $e_1, \dots, e_r$ пространства $L^2(X_r)$ формулой $\bar{\phi}_1(e_i) = \chi_{\phi^{-1}(i)}$, где χ_E есть характеристическая функция множества E , а $\phi^{-1}(i)$ есть прообраз элемента $i \in X_r$ при отображении ϕ . Построенные вложения, очевидно, изометричны и задают скалярное произведение в индуктивном пределе пространств. Напомним, что прямой предел в категории гильбертовых пространств есть пополнение по гильбертовой норме алгебраического предела. Из предыдущего непосредственно следует, что построенный прямой предел естественно отождествляется с пространством $L^2(\Omega)$. Из построения также вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В пространстве $L^2(\Omega)$ определена факторизация над булевой алгеброй цилиндрических множеств пространства K_m .*

Напомним, что под непрерывностью факторизации в точке понимается следующее: для любой убывающей последовательности цилиндров, пересечение которых есть точка, соответствующая (в силу определения факторизации) последовательность алгебр операторов сходится к алгебре, состоящей из скалярных операторов.

ТЕОРЕМА 10. *Построенная факторизация непрерывна в точке тогда и только тогда, когда отображение ϕ обильно. При этом условии она не является фоксовской.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, условие обильности влечет антиаддитивность, т.е. отсутствие аддитивных и по теореме 2 мультипликативных векторов.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Построенная факторизация не продолжается на булеву алгебру классов всех измеримых mod 0 совпадающих подмножеств пространства K_m с естественной (лебеговой) продуктной мерой μ .*

Действительно, по теореме Цирельсона такое продолжение должно быть фоксовской факторизацией. С другой стороны, прямой подсчет показывает, что не для всякой

сходящейся последовательности цилиндрических множеств существует предел соответствующих случайных величин.

Из определения построенной факторизации следует, что ее группа симметрий включает всю группу автоморфизмов дерева и, более того, содержит и другие преобразования, см. [26]. Представляет большой интерес изучение свойств этой факторизации и, в частности, структура гильбертова пространства, снабженного ею. Очень важно рассмотреть операторы, аналогичные каноническим операторам в фоковской факторизации. В конечном итоге это пространство могло бы оказаться полезным для теории представлений групп и C^* -алгебр. С вероятностной точки зрения рассмотренный пример, по-видимому, связан с теорией ветвящихся процессов.

Построенная факторизация имеет нульмерную базу (канторовский компакт), более сложно строится нефоковская факторизация с одномерной базой, см. [26]. Сложность возникает из-за необходимости согласования факторизации на различных представлениях отрезка в виде объединения отрезков (в то время как разложение элементарных цилиндров канторовского компакта единственно). Однако и в одномерном случае факторизация строится с помощью обратного предела гауссовских мер с нелинейными, как и выше, проекциями. Примеры нефоковских факторизаций в размерностях выше первой пока не построены.

В. О спектре фоковской факторизации. Рассмотрим произвольную факторизацию над некоторой булевой алгеброй множеств. Каждому измеримому множеству B “базы” сопоставим проектор (условное математическое ожидание) P_B на подпространство функционалов от процесса, зависящих от траектории на данном множестве. Очевидно, что эти проекторы коммутируют между собой. Поэтому они порождают коммутативную C^* -алгебру $\mathfrak{M}$. Следующее понятие введено Б. С. Цирельсоном [35].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Спектр коммутативной C^* -алгебры $\mathfrak{M}$ называется спектром факторизации.*

По определению спектр является инвариантом факторизации. Рассмотрим спектр фоковской факторизации, порожденной одномерным гауссовским процессом. Докажем, что алгебра $\mathfrak{M}$ в этом случае максимальна в алгебре всех операторов, т.е. всякий оператор, коммутирующий со всеми этими проекторами, принадлежит той же алгебре. Прежде всего, проекторы на “хаос” данного порядка коммутируют со всеми P_B , поэтому можно ограничить подалгебру $\mathfrak{M}$ на подпространство данного хаоса, и это ограничение в подалгебре операторов этого хаоса есть максимальная коммутативная подалгебра. Наконец, очевидно, что два разных хаоса разделяются алгеброй $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 11. *Спектр одномерной фоковской факторизации есть несвязное объединение симметризованных n -ок из базы, снабженных симметризованными степенями меры на базе.*

Для неодномерной фоковской факторизации алгебра $\mathfrak{M}$ не максимальна, но спектр факторизации – такой же.

С. Цикловый индекс. Пусть $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая группа степени n . Обозначим через $c_k(g)$ число циклов перестановки $g \in \mathfrak{S}_n$ длины k . Пусть $t = (t_1, t_2, \dots)$ – последовательность переменных. (Присоединенным) цикловым индексом симметри-

ческой группы $\mathfrak{S}_n$ называется

$$\tilde{Z}(\mathfrak{S}_n) = \tilde{Z}(\mathfrak{S}_n)[t] = \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} t_1^{c_1(g)} t_2^{c_2(g)} \dots \quad (47)$$

Хорошо известная формула (см., например, [61; (5.30)]) утверждает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Z}(\mathfrak{S}_n)[t] \frac{z^n}{n!} = \exp \sum_{i=1}^{\infty} t_i \frac{z^i}{i}. \quad (48)$$

Д. Ортогональные многочлены. В этом приложении для удобства приведены необходимые формулы для классических ортогональных многочленов Эрмита и Шарлье, играющих важную роль в теории ортогональных разложений для процессов Леви. Стандартной ссылкой по теории ортогональных многочленов является монография [62]. Комбинаторные аспекты ортогональных многочленов см. в [61].

Д.1. Многочлены Эрмита.

Определение:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= H_n^1(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ H_n^a(x) &= a^{\frac{n}{2}} H_n(x/\sqrt{a}). \end{aligned} \quad (49)$$

Ортогональность: ортогональны относительно нормального распределения $N(0, a)$ с нулевым средним и дисперсией a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^a(x) H_m^a(x) e^{-\frac{x^2}{2a}} dx = \delta_{nm} a^n n!. \quad (50)$$

Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^a(x) t^n}{n!} = e^{tx - \frac{t^2 a}{2}}. \quad (51)$$

Комбинаторное описание:

$$H_n^a(x) = \sum_{g \in \text{Inv}_n} x^{c_1(g)} (-a)^{c_2(g)} = \tilde{Z}_{\mathfrak{S}_n}[x, -a, 0, 0, \dots], \quad (52)$$

где Inv_n — множество всех инволюций в $\mathfrak{S}_n$.

Д.2. Многочлены Шарлье.

Определение:

$$C_n^a(x) = a^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a^{-j} \binom{x}{j} j!. \quad (53)$$

Ортогональность: ортогональны на $\mathbb{Z}_+$ относительно пуассоновского распределения P_a с параметром a :

$$e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} C_n^a(k) C_m^a(k) \frac{a^k}{k!} = \delta_{nm} a^n n!. \quad (54)$$

Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^a(y)t^n}{n!} = (1+t)^y e^{-ta}. \quad (55)$$

Комбинаторное описание:

$$C_n^a(x) = \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} (x-a)^{c_1(g)} x^{-c_2(g)+c_3(g)-c_4(g)+\dots} = \tilde{Z}_{\mathfrak{S}_n}[x-a, -x, x, -x, \dots]. \quad (56)$$

Многочлены Шарлье удовлетворяют следующему удобному соотношению:

$$\frac{(-1)^n}{a^n} C_n^a(k) = \frac{(-1)^k}{a^k} C_k^a(n). \quad (57)$$

Список основных обозначений

(X, ν) – стандартное борелевское пространство с непрерывной конечной мерой,
 α – стандартный гауссовский белый шум на (X, ν) ,
 π – пуассоновский процесс на (X, ν) ,
 Π – мера Леви–Хинчина процесса Леви,
 Φ – канонический пуассон-гауссовский изоморфизм,
 $\mathfrak{H}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}$ – обобщенный функционал Эрмита,
 $\mathfrak{C}_{f_1, \dots, f_n}^{(n)}$ – обобщенный функционал Шарлье,
 D – пространство конечных вещественных дискретных мер на X ,
 $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая группа степени n ,
 Inv_n – множество всех инволюций в $\mathfrak{S}_n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Wiener. The homogeneous chaos // Amer. J. Math. 1938. V. 60. P. 897–936.
- [2] K. Itô. Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3. № 1. P. 157–169.
- [3] R. H. Cameron, W. T. Martin. The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier–Hermite functionals // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. P. 385–392.
- [4] Б. Саймон. Модель $P(\phi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
- [5] Р. Л. Добрушин, Р. А. Минлос. Многочлены от линейных случайных функций // УМН. 1977. Т. 32. № 2. С. 71–127.
- [6] K. R. Parthasarathy. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel: Birkhäuser, 1992. (Monogr. Math. V. 85.)
- [7] C. Dellacherie, P.-A. Meyer. Probabilités et Potentiel. Chapitres XII–XVI. Théorie du potentiel associée à une résolvante. Théorie des processus de Markov. Paris: Hermann, 1987. (Actualités Sci. Indust. V. 1417.)
- [8] Ю. А. Неретин. Категории симметрий и бесконечномерные группы. М.: Эдиториал УРСС, 1998.
- [9] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [10] F. J. Murray, J. von Neumann. On rings of operators // Ann. of Math. (2). 1936. V. 37. P. 116–229.
- [11] J. von Neumann. On infinite direct products // Compositio Math. 1938. V. 6. P. 1–77.
- [12] H. Araki, E. J. Woods. Complete Boolean algebras of type I factors // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A. 1966. V. 2. № 2. P. 157–242; Addenda: ibid. № 3. P. 451–452.
- [13] J. Feldman. Decomposable processes and continuous products of probability spaces // J. Funct. Anal. 1971. V. 8. № 1. P. 1–51.

- [14] H. Ogura. Orthogonal functionals of the Poisson process // IEEE Trans. Inform. Theory. 1972. V. IT-18. №4. P. 473–481.
- [15] A. Segall, T. Kailath. Orthogonal functionals of independent-increment processes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1976. V. IT-22. №3. P. 287–298.
- [16] D. D. Engel. The multiple stochastic integral // Mem. Amer. Math. Soc. 1982. V. 38. №265.
- [17] Ю. М. Кабанов. О расширенных стохастических интегралах // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20. №4. С. 725–737.
- [18] O. Kallenberg, J. Szulga. Multiple integration with respect to Poisson and Lévy processes // Probab. Theory Related Fields. 1989. V. 83. №1–2. P. 101–134.
- [19] J. Szulga. Multiple stochastic integrals with respect to symmetric infinitely divisible random measures // Ann. Probab. 1991. V. 19. №3. P. 1145–1156.
- [20] D. Nualart, W. Schoutens. Chaotic and predictable representations for Lévy processes // Stochastic Process. Appl. 2000. V. 90. №1. P. 109–202.
- [21] H. P. McKean. Geometry of differential space // Ann. Probab. 1973. V. 1. P. 197–206.
- [22] E. Isobe, S. Sato. Wiener–Hermite expansion of a process generated by an Itô stochastic differential equation // J. Appl. Probab. 1983. V. 20. №4. P. 754–765.
- [23] Yu. G. Kondratiev, J. L. Da Silva, L. Streit, G. F. Us. Analysis on Poisson and gamma spaces // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 1998. V. 1. №1. P. 91–117.
- [24] Yu. G. Kondratiev, E. W. Lytvynov. Operators of gamma white noise calculus // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2000. V. 3. №3. P. 303–335.
- [25] Ю. М. Березанский, Д. А. Мержеевский. Хаотическое разложение для гамма-поля // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35. №4. С. 81–84.
- [26] B. S. Tsirelson, A. M. Vershik. Examples of non-linear continuous tensor products of measure spaces and non-Fock factorizations // Rev. Math. Phys. 1998. V. 10. №1. P. 81–145.
- [27] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Представления групп диффеоморфизмов, связанных с бесконечными конфигурациями // УМН. 1975. Т. 30. №6. С. 3–50.
- [28] Ю. А. Неретин. О соответствии между бозонным пространством Фока и пространством L^2 по мере Пуассона // Матем. сб. 1997. Т. 188. №11. С. 19–50.
- [29] А. М. Вершик. Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. №4. С. 1–68.
- [30] G.-C. Rota, T. C. Wallstrom. Stochastic integrals: a combinatorial approach // Ann. Probab. 1997. V. 25. №3. P. 1257–1283.
- [31] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Представления группы $SL(2, R)$, где R – кольцо функций // УМН. 1973. Т. 28. №5. С. 83–128.
- [32] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik. Models of representations of current groups // Representations of Lie Groups and Lie Algebras / ed. A. A. Kirillov. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1985. P. 121–179.
- [33] N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor. An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process // J. Funct. Anal. 2001. V. 185. №1. P. 274–296.
- [34] Г. Маккин. Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.
- [35] B. Tsirelson. Unitary Brownian motions are linearizable // Preprint, 1998; arXiv: math.PR/9806112.
- [36] B. Tsirelson. Scaling limit, noise, stability // Preprint, 2003; arXiv: math.PR/0301237; to appear in Lecture Notes in Math.
- [37] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Неприводимые представления группы G^X и когомологии // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №3. С. 67–68.
- [38] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17. №2. С. 70–72.
- [39] М. А. Наймарк. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.

- [40] И. М. Гельфанд. Обобщенные случайные процессы // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. № 5. С. 853–856.
- [41] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961. (Обобщенные функции. Вып. 4.)
- [42] K. Itô. Stationary random distributions // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. 1954. V. 28. P. 209–223.
- [43] А. В. Скороход. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.
- [44] J. Neveu. Processus aléatoires gaussiens. Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1968. (Séminaire de Mathématiques Supérieures. № 34.)
- [45] А. М. Вершик. К теории нормальных динамических систем // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 1. С. 9–12.
- [46] А. М. Вершик. О спектральном и метрическом изоморфизме некоторых нормальных динамических систем // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 2. С. 255–257.
- [47] J. F. C. Kingman. Poisson Processes. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- [48] J. Bertoin. Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. (Cambridge Tracts in Math. V. 121.)
- [49] H. Araki. Factorizable representation of current algebra // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A. 1969/1970. V. 5. P. 361–422.
- [50] K. Itô. Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 81. P. 253–263.
- [51] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [52] Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы-2. М.: ВИНТИ, 1985.
- [53] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
- [54] A. Dermoune. Distribution sur l'espace de P. Lévy et calcul stochastique // Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist. 1990. V. 26. № 1. P. 101–119.
- [55] А. М. Вершик, С. И. Карпушев. Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции // Матем. сб. 1982. Т. 4. С. 512–533.
- [56] А. Гишарде. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М.: Мир, 1984.
- [57] Y. Shalom. Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group // Ann. of Math. (2). 2000. V. 152. № 1. P. 113–182.
- [58] Д. А. Каждан. О связи двойственного пространства группы со структурой ее замкнутых подгрупп // Функци. анализ и его прил. 1967. Т. 1. № 1. С. 71–74.
- [59] N. Tsilevich, A. Vershik. Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1999. V. 329. № 2. P. 163–168.
- [60] М. А. Лифшиц, Е. Ю. Шмилева. Критерий квазиинвариантности пуассоновских мер относительно “линейных” преобразований пространства // УМН. 2001. Т. 56. № 6. С. 159–160.
- [61] R. Stanley. Enumerative Combinatorics. V. 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. Русский перевод готовится к печати в издательстве “Мир”.
- [62] Г. Сеге. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

С.-Петербургское отделение
 Математического института
 им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru, natalia@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию
 27.02.2003