Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Плотников, Я. Соколовски, Стационарные решения уравнений Навье–Стокса для двухатомных газов, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 117–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:33:28

УДК 517.9

Стационарные решения уравнений Навье–Стокса для двухатомных газов

П. И. Плотников, Ж. Соколовски

В статье доказано существование ренормализованных решений первой краевой задачи для стационарных уравнений Навье–Стокса динамики вязкого газа для всех значений показателя адиабаты из интервала $(4/3, 3/2]$.

Библиография: 22 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	117
§ 2. Вспомогательные предложения	122
2.1. Слабая сходимость в пространствах интегрируемых функций. Меры Янга	122
2.2. Пространства Соболева	123
2.3. Коммутатор оператора усреднения и мультипликативного опе- ратора	124
§ 3. Энергетические оценки	125
3.1. Оценки потенциала давления	125
3.2. Энергетическая оценка	133
§ 4. Эффективное вязкое давление	135
§ 5. Компактность решений транспортного уравнения	136
5.1. Кинетическое уравнение	138
5.2. Мера дефекта осцилляций	142
5.3. Свойства функции $\mathcal{M}$	144
5.4. Доказательство теоремы 5.1	145
§ 6. Доказательство теоремы 1.1	146
Список литературы	147

§ 1. Введение

Нелокальная теория двух- и трехмерных уравнений динамики вязкого газа возникла сравнительно недавно. Ее начало было положено в работах [1], [2], в которых была установлена слабая регулярность эффективного вязкого давления и доказана глобальная разрешимость основных краевых задач для уравнений Навье–Стокса сжимаемого баротропного газа для достаточно больших показателей адиабаты. Следующий важный шаг был сделан в работах [3]–[5], в

которых было введено понятие меры дефекта осцилляций и показано, что слабая регулярность эффективного вязкого потока является следствием принципа компенсированной компактности. Это наблюдение позволило существенно продвинуть теорию и установить разрешимость нестационарных краевых задач для значений показателя адиабаты из интервала $(3/2, \infty)$, который включает случай одноатомных газов. Математической теории уравнений вязкого газа посвящены монографии [6]–[8]. Тем не менее, теория далека от завершения даже для случая баротропных течений, и многие важные проблемы до сих пор остаются нерешенными.

В настоящей статье мы дадим краткий очерк теории стационарных краевых задач для уравнений динамики вязкого баротропного газа и более подробно остановимся на проблеме существования решений для умеренных величин показателя адиабаты γ , сформулированной в [9]. Напомним, что $\gamma = 5/3$ для одноатомных газов, $\gamma = 7/5$ в наиболее важном случае двухатомных газов и $\gamma = 4/3$ для многоатомных газов. Значение $\gamma = 3/2$ является пороговым для существующей теории. Более того, для стационарных краевых задач существование обобщенных решений установлено только для показателей адиабаты $\gamma > 5/3$.

Мы будем предполагать, что вязкий газ заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ с границей класса C^2 и его состояние характеризуется распределением плотности $\varrho(x)$, давления $p(x)$ и полем скоростей $\mathbf{u}(x)$. Они удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(\varrho) = \varrho \mathbf{f} + \mathbf{g} + \operatorname{div} \Pi \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1b)$$

первое из которых представляет собой закон сохранения импульса, а второе является следствием закона сохранения массы. Тензор вязких напряжений определяется равенствами

$$\Pi(\mathbf{u}) = \nu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I} \right) + \xi \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}, \quad (1.1c)$$

в которых постоянные коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости ν и ξ удовлетворяют неравенству $4\nu/3 + \xi > 0$. Мы будем предполагать, что давление $p = \varrho^\gamma$, где $\gamma > 1$ – показатель адиабаты. Массовая и объемная силы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ считаются заданными непрерывными векторными полями. Уравнения (1.1a) и (1.1b) должны быть дополнены краевыми условиями. Простейшим является условие прилипания

$$\partial\Omega: \mathbf{u} = 0, \quad (1.1d)$$

которое означает, что граница области течения является неподвижной твердой стенкой. В стационарном случае уравнения и краевые условия не определяют течение единственным образом. Поэтому к уравнениям и граничным условиям необходимо добавить условие нормировки. Мы будем искать решение, удовлетворяющее дополнительному соотношению

$$\int_{\Omega} d(x)^{-s} \varrho \, dx = \mathbf{M}, \quad (1.1e)$$

где $\mathbf{M}$ – заданная постоянная, $d(x)$ – расстояние между точкой $x \in \Omega$ и границей области Ω , показатель $s \in (0, 1/2)$ зависит от γ и будет уточнен ниже.

Течение характеризуется потенциальной энергией $\mathbf{E}$ и скоростью диссипации энергии $\mathbf{D}$, заданными формулами

$$\mathbf{E} = \int_{\Omega} P(\varrho(x)) dx, \quad \mathbf{D} = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx, \quad (1.2)$$

где неотрицательная функция P определяется из уравнения $sP'(s) - P(s) = p(s)$ с точностью до несущественной линейной функции. В частности, при $p = \varrho^\gamma$ она пропорциональна давлению и имеет вид $P(\varrho) = (\gamma - 1)^{-1} \varrho^\gamma$. Мы введем также в рассмотрение взвешенную кинетическую энергию

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} d(x)^s \varrho |\mathbf{u}|^2 dx. \quad (1.3)$$

Умножая обе части уравнения баланса импульса скалярно на $\mathbf{u}$ и интегрируя по частям, мы приходим к тождеству

$$\int_{\Omega} \left(\nu |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + \left(\frac{4}{3} \nu + \xi \right) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \right) dx = \int_{\Omega} (\varrho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dx, \quad (1.4)$$

которое дает математическое соотношение для баланса полной энергии. Тождество (1.4) вместе с неравенством Пуанкаре влечет за собой энергетическое неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c \int_{\Omega} \varrho |\mathbf{f}| |\mathbf{u}| dx + c(\Omega) \|\mathbf{g}\|_{C(\Omega)}^2,$$

из которого вытекает оценка скорости диссипации энергии через взвешенную массу и взвешенную кинетическую энергию:

$$\mathbf{D} \leq c \|\mathbf{f}\|_{C(\Omega)} \sqrt{\mathbf{MK}} + c(\Omega) \|\mathbf{g}\|_{C(\Omega)}^2.$$

Следует отметить, что в отличие от случая нестационарных уравнений энергетическое тождество (1.4) не дает оценок для скорости диссипации энергии и кинетической энергии газа. Этим объясняется тот факт, что для стационарных задач не удастся преодолеть значение показателя адиабаты $\gamma = 5/3$.

Наряду с уравнениями (1.1) в математической литературе рассматриваются различные их регуляризации, среди которых наиболее важной является релаксированная краевая задача

$$\begin{aligned} a \varrho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(\varrho) &= \varrho \mathbf{f} + \mathbf{g} + \operatorname{div} \Pi \quad \text{в } \Omega, \\ a \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) &= h \quad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где a и h – заданные положительные функции. Эта задача имеет самостоятельный интерес, так как при $a = \text{const}$ уравнения (1.5) можно рассматривать как временную дискретизацию нестационарных уравнений Навье–Стокса сжимаемой баротропной жидкости. Заметим также, что при $a = \varepsilon d^{-s}$ и $h = \varepsilon \operatorname{meas} \Omega^{-1} \mathbf{M}$ формальный предельный переход в уравнениях (1.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к уравнениям и краевым условиям (1.1). Поэтому релаксированную краевую задачу можно рассматривать как регуляризацию исходных уравнений. Энергетическое соотношение для краевой задачи (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a \varrho P'(\varrho) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\nu |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + \left(\frac{4}{3} \nu + \xi \right) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \right) dx \\ = \int_{\Omega} (\varrho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{u} dx \end{aligned}$$

и влечет априорную ограниченность полной энергии и скорости диссипации энергии.

Определение слабого решения уравнений Навье–Стокса несколько отличается от стандартного определения обобщенного решения для уравнений математической физики, что обусловлено спецификой уравнения баланса массы. Прежде всего заметим, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ каждое гладкое решение (1.1b) удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(G(\varrho)\mathbf{u}) + (G'(\varrho)\varrho - G(\varrho)) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.6)$$

которое называется ренормализованной формой уравнения (1.1b), а процедура перехода от (1.1b) к бесконечной системе уравнений вида (1.6) называется ренормализацией. Функция ϱ , удовлетворяющая этой системе, называется ренормализованным решением уравнения (1.1b).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением краевой задачи (1.1) называются неотрицательная функция $\varrho \in L^1(\Omega)$ и векторное поле $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(A1) в области Ω выполнены соотношения

$$\int_{\Omega} d^{-s} \varrho \, dx = \mathbf{M}, \quad \varrho \mathbf{u} \in L^1(\Omega), \quad p(\varrho) \in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \quad \varrho |\mathbf{u}|^2 \in L_{\text{loc}}^1(\Omega);$$

(A2) для любого векторного поля $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi : (\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \varphi : \Pi(\mathbf{u}) - (\varrho \mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot \varphi) \, dx;$$

(A3) для любой дифференцируемой функции G с ограниченной производной $G' \in C(\mathbb{R})$ и произвольной функции $\psi \in C^1(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (G(\varrho)\mathbf{u} \cdot \nabla \psi + (G(\varrho) - G'(\varrho)\varrho)\psi \operatorname{div} \mathbf{u}) \, dx = 0.$$

Теперь мы в состоянии сформулировать основную теорему о разрешимости задачи (1.1), которая является главным результатом этой статьи.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любых $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C(\Omega)$, $\gamma > 4/3$ и $s \in ((5\gamma - 4)^{-1}, 2^{-1})$ краевая задача (1.1) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

Доказательству этого утверждения посвящена оставшаяся часть статьи. Кратко охарактеризуем основные этапы доказательства. Обобщенное решение уравнений (1.1) будет получено как предел решений релаксированной краевой задачи (1.5). Поэтому главной целью, на достижение которой направлены наши усилия, является доказательство компактности множества решений этих задач.

Оно начинается с вывода априорных оценок для решений задачи (1.1). Принципиальное отличие уравнений Навье–Стокса динамики вязкого газа от классических уравнений динамики несжимаемой жидкости состоит в том, что в случае сжимаемой жидкости тензор энергии $\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}$ неотрицательно определен. Это обстоятельство позволяет установить априорные оценки для его

компонент непосредственно за счет выбора векторного поля φ . В частности, если поле φ служит градиентом выпуклой функции Φ , то интегральное тождество (A2) влечет оценку полной энергии течения. Этот подход, развитый в работах [10], [11], позволил установить внутренние оценки решений. К сожалению, градиенты выпуклых функций не удовлетворяют нулевому краевому условию на границе. Тем не менее, как показано в § 3, выбор “потенциала” Φ в виде $\Phi(x) = |x - y| + \Phi_0(x, y)$, где y – произвольная точка области течения, а Φ_0 – некоторая регулярная функция, ведет к поточечной оценке для свертки давления и функции Грина $\mathfrak{G}(x, y)$ для области Ω . Следующее наблюдение состоит в том, что ограниченность свертки $\mathfrak{G} * p$ влечет непрерывность вложения $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, p dx)$ и, как следствие, интегрируемость функции $p|\mathbf{u}|^2$. Из этого результата легко следует оценка для взвешенной кинетической энергии $\mathbf{K}$ и потенциальной энергии $\mathbf{E}$.

Из локальной интегрируемости плотности энергии вытекает, что любая последовательность точных (или приближенных) решений задачи (1.1) содержит подпоследовательность, для которой $\varrho_n \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n \rightarrow \varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + M$ слабо в пространстве мер Радона в Ω . Векторная мера Радона $M_{3 \times 3}$ называется матрицей концентраций [12]. Если $\operatorname{div} M = 0$, то говорят, что концентрации аннулируются или сокращаются. Проблема концентраций состоит в исследовании структуры меры M и отыскании условий, при выполнении которых она аннулируется. Ясно, что $M = 0$, если для любого компакта $\Omega' \Subset \Omega$ последовательность $\varrho_n |\mathbf{u}_n|^2$ ограничена в пространстве $L^r(\Omega')$ с некоторым показателем $r > 1$. Для показателей адиабаты $\gamma > 3/2$ это следует из энергетической оценки. Действительно, поскольку вложение $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ непрерывно, то при $\gamma > 3/2$ мы имеем оценку $\|\varrho_n |\mathbf{u}_n|^2\|_{L^r(\Omega')} \leq c \mathbf{E}_n^{1/\gamma} \mathbf{D}_n$ с показателем $r > 1$. С другой стороны, из уравнения баланса импульса вытекает, что $p_n \sim \varrho_n |\mathbf{u}_n|^2 + |\nabla \mathbf{u}_n|$. Следовательно, $p_n \in L^r(\Omega')$. Повторяя эти рассуждения, мы приходим к выводу, что последовательности p_n , $\varrho_n |\mathbf{u}_n|^2$ ограничены в пространстве $L^2(\Omega')$. Эти аргументы перестают работать при $\gamma \leq 3/2$, что ведет к проблеме концентраций, см. [2]. Принятый в данной работе подход позволяет обойти это затруднение, так как интегрируемость $p|\mathbf{u}|^2$ автоматически ведет к интегрируемости $\varrho|\mathbf{u}|^2$ с показателем $r = r(\gamma) > 1$. Отсюда вытекает, что в условиях теоремы 1.1 для любой последовательности точных (или приближенных) решений задачи (1.1) последовательности $p_n = p(\varrho_n)$, $\varrho_n |\mathbf{u}_n|^2$ ограничены в $L_{\text{loc}}^r(\Omega)$.

Отметим, что существующие методы не дают возможности устранить концентрации в предельном случае $\gamma = 1$, который играет важную роль в астрофизике. Как показано в [10], для релаксированных уравнений (1.5) с показателем $\gamma = 1$ концентрации имеют вид диады, сосредоточенной на спрямляемом множестве размерности 1.

Вторая трудность, возникающая при доказательстве компактности множества решений уравнений динамики вязкого газа, так называемая *проблема осцилляций*, связана с предельным переходом в последовательности функций давления $p_n = p(\varrho_n)$. Без ограничения общности можно считать, что $\varrho_n \rightharpoonup \varrho$ слабо в $L^\gamma(\Omega')$, $p_n \rightharpoonup \bar{p}$ слабо в $L^r(\Omega')$ для любого компакта $\Omega' \Subset \Omega$. Так как априори известно, что последовательность ϱ_n только интегрируема, равенство $\bar{p} = p(\varrho)$ далеко не очевидно. Его доказательство проводится в два этапа. Сначала устанавливается коммутационное соотношение для эффективного вязкого давления

$$\overline{p\varphi} - \vartheta \overline{\varphi \operatorname{div} \mathbf{u}} = (\bar{p} - \vartheta \overline{\operatorname{div} \mathbf{u}}) \bar{\varphi}, \quad (1.7)$$

в котором $\vartheta = 4\nu/3 + \xi$, $\varphi \in C(\mathbb{R})$ – произвольная функция, а $\bar{\varphi}$ – слабый предел последовательности $\varphi(\varrho_n)$. Соотношение (1.7), впервые полученное в несколько иной форме в [1], [6], позволяет исключить из рассмотрения перекрестные слабые пределы $\overline{\varphi \operatorname{div} \mathbf{u}}$ и свести вопрос о сильной сходимости последовательности p_n к вопросу о сильной сходимости ренормализованных решений транспортного уравнения. Доказательство сильной сходимости решений уравнения транспорта массы (1.1b), удовлетворяющих коммутационному соотношению (1.7), дано в § 5. Там доказывается, что этот факт является общим свойством транспортных уравнений и не связан со спецификой уравнений динамики вязкого газа. Главной составляющей предлагаемого метода является систематическое использование кинетической формулировки транспортного уравнения, что позволяет избежать трудностей, связанных с отсутствием оценок решений вблизи границы.

В заключение кратко обсудим возможные обобщения полученных результатов. Заметим, что границы изменения параметра s , указанные в теореме 1.1, не являются оптимальными и могут быть существенно улучшены. Представляет интерес исследование сингулярного случая $s = 1$. Легко видеть, что в случае потенциальных массовых сил $\varrho \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 1$. При наличии объемных сил вопрос о предельном переходе остается открытым.

С другой стороны, пороговое значение показателя адиабаты $\gamma = 4/3$ является предельным для предложенного метода. В [6] было отмечено, что его можно уменьшить, если заменить условие нормировки (1.1e) на более сильное

$$\int_{\Omega} \varrho^{\beta} dx = \mathbf{M}_{\beta}. \quad (1.8)$$

Наибольший интерес представляет “изоэнергетический случай” $\beta = \gamma$. Предложенный метод позволяет установить нелокальную разрешимость задачи (1.1) с условием нормировки (1.8) для значений параметров $6/5 \leq \beta \leq \gamma$. Вопрос о соотношениях между решениями, полученными при различных нормировках, является открытым.

§ 2. Вспомогательные предложения

В этом параграфе приводятся вспомогательные сведения из анализа, которые используются на протяжении этой статьи.

2.1. Слабая сходимость в пространствах интегрируемых функций.

Меры Янга. Следующая версия фундаментальной теоремы Тартара [13] о мерах Янга, принадлежащая Дж. Боллу [14] (см. также [15], [16]), дает эффективное представление слабых пределов последовательностей сложных функций.

ЛЕММА 2.1. Пусть Ω – ограниченное открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^3$. Предположим, что последовательность измеримых функций $\{\varrho_n\}_{n \geq 1}$ ограничена в пространстве $L^{\gamma}(\Omega)$, $1 < \gamma < \infty$. Тогда существуют подпоследовательность, по-прежнему обозначаемая как $\{\varrho_n\}_{n \geq 1}$, и измеримое семейство вероятностных мер $\sigma_x \in C_0(\mathbb{R})^*$, $x \in \Omega$, с функцией распределения $f(x, \lambda) := \sigma_x(-\infty, \lambda]$, обладающие следующими свойствами.

(i) Для почти каждого $x \in \Omega$ функция $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ непрерывна справа и имеет пределы 1, 0 при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Для любой функции Каратеодори $G: \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|G(\cdot, \lambda)\|_{C(\Omega)} / |\lambda|^\gamma = 0,$$

последовательность $G(\cdot, \varrho_n)$ сходится слабо в пространстве $L^1(\Omega)$ к функции

$$\bar{G}(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x, \lambda) d_\lambda f(x, \lambda). \quad (2.1)$$

Более того, отображение

$$\Omega \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^\gamma d_\lambda f(x, \lambda) \in \mathbb{R}$$

принадлежит пространству $L^1(\Omega)$.

(ii) Если функции ϱ_n удовлетворяют неравенствам $\varrho_n \leq M$ ($\varrho_n \geq m$), то $f(x, \lambda) = 1$ при $\lambda \geq M$ ($f(x, \lambda) = 0$ при $\lambda < m$). Если функция $G(x, \cdot)$ выпукла по λ и последовательность ϱ_n сходится слабо к функции $\varrho \in L^\gamma(\Omega)$, то $\bar{G}(x) \geq G(x, \varrho(x))$.

(iii) Если $f(1-f) = 0$ почти всюду в Ω , то последовательность ϱ_n сходится к ϱ сильно в $L^s(\Omega)$ для любых положительных $s < \gamma$. Более того, в этом случае $f(x, \lambda) = 0$ при $\lambda < \varrho(x)$ и $f(x, \lambda) = 1$ при $\lambda \geq \varrho(x)$.

2.2. Пространства Соболева. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с кусочно гладкой границей. Далее используются следующие обозначения: $H^{1,r}(\Omega)$ – стандартное пространство Соболева, состоящее из измеримых функций, обладающих обобщенными первыми производными, интегрируемыми со степенью r ; $H_0^{1,r}(\Omega)$ – замкнутое подпространство $H^{1,r}(\Omega)$, состоящее из функций, равных нулю на границе Ω . Каждая из функций пространства $H_0^{1,r}(\Omega)$, будучи продолженной нулем на $\mathbb{R}^3$, принадлежит классу $H^{1,r}(\mathbb{R}^3)$. Напомним, что вложение $H_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ непрерывно при $r \leq 6$ и компактно при $r < 6$. Следующее утверждение [17]–[19] дает необходимые и достаточные условия квадратичной интегрируемости элементов пространства $H_0^{1,r}(\Omega)$ по произвольной борелевской мере μ .

ЛЕММА 2.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с кусочно гладкой границей. Вложение $H_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega, d\mu)$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \Subset \Omega$ выполняется неравенство $\mu(K) \leq C \text{cap } K$ с постоянной C , не зависящей от K .

Далее мы будем использовать более слабое, но легко проверяемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с кусочно гладкой границей и $\mathfrak{G}(x, y)$ – функция Грина области Ω . Тогда существует постоянная s , зависящая только от Ω , такая, что для любой меры Радона μ , удовлетворяющей неравенству

$$M =: \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{\Omega} \mathfrak{G}(x, y) d\mu < \infty, \quad (2.2)$$

и произвольной функции $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} |v|^2 d\mu \leq cM \|v\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что емкость компакта $K \Subset \Omega$ определяется равенством

$$\text{cap } K = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0 \text{ и } \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Зафиксируем допустимую функцию φ . Легко видеть, что

$$\int_K d\mu \leq \int_K \varphi d\mu \leq \|\Delta^{-1/2} 1_K \mu\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$\|\Delta^{-1/2} 1_K \mu\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathfrak{G}(x, y) 1_K(x) 1_K(y) d\mu(x) d\mu(y) \leq M \int_K d\mu(y).$$

Следовательно,

$$\int_K d\mu \leq M^{1/2} \left(\int_K d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что для любого компакта $K \Subset \Omega$ выполняется неравенство

$$\int_K d\mu \leq M \inf_{\varphi} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx = M \text{cap } K,$$

которое вместе с леммой 2.2 влечет искомую оценку. Следствие 2.1 доказано.

2.3. Коммутатор оператора усреднения и мультипликативного оператора. Обозначим через θ стандартное ядро усреднения в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям

$$\theta \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \theta(t) dt = 1, \quad \text{supp } \theta \Subset \{|t| < 1\}. \quad (2.4)$$

Для любой локально интегрируемой функции $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, зависящей от переменных $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, операторы усреднения определяются равенствами

$$[f]_{\cdot, k}(x, \lambda) := k \int_{\mathbb{R}} \theta(k(\lambda - t)) f(x, t) dt, \quad (2.5)$$

$$[f]_m(\cdot, \lambda) := m^3 \int_{\mathbb{R}^3} \Theta(m(x - y)) f(y, \lambda) dy, \quad \Theta(z) = \prod_{i=1}^3 \theta(z_i). \quad (2.6)$$

Далее мы будем писать $[f]_{m, k}$ вместо $[[f]_m]_{\cdot, k}$. Следующий результат (см. [20]) играет важную роль в теории обобщенных решений транспортных уравнений.

ЛЕММА 2.3. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ и $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого ограниченного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\text{div}[f\mathbf{u}]_m - \text{div}([f]_m, \mathbf{u}) \rightarrow 0 \quad \text{в } L^1(E) \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Кинетическая теория транспортных уравнений оперирует с “продолженным полем скоростей”

$$\mathbf{V}(x, \lambda) = (\mathbf{u}(x), -\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}(x)),$$

которое не удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Тем не менее, благодаря специфической структуре поля $\mathbf{V}$, справедливо следующее утверждение [21], доказательство которого непосредственно следует из леммы 2.3 и определения оператора усреднения.

ЛЕММА 2.4. Пусть в условиях леммы 2.3 функция $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ и

$$I^{m,k}(x, \lambda) := \operatorname{div}[f\mathbf{V}]_{m,k} - \operatorname{div}([f]_{m,k}\mathbf{V}). \quad (2.8)$$

Тогда для любого ограниченного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ существует повторный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} I^{m,k} \right\} = 0 \quad \text{в } L^1(E). \quad (2.9)$$

§ 3. Энергетические оценки

3.1. Оценки потенциала давления. В этом пункте мы установим поточечные оценки для свертки давления с функцией Грина области течения. Этот результат является следствием неотрицательности тензора энергии-импульса и носит общий характер. Рассмотрим модельное уравнение баланса импульса для неотрицательных функций ϱ , p и векторного поля $\mathbf{u}$:

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{F} + \operatorname{div} \Pi \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Omega). \quad (3.1)$$

Мы не предполагаем наличие какой-либо зависимости между p и ϱ . Обозначим через $\mathfrak{G}(x, y)$ функцию Грина области Ω и введем в рассмотрение семейство областей

$$\Omega_r = \{x \in \Omega : d(x) > r\} \Subset \Omega, \quad r > 0.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Предположим, что функции $\varrho \in L^\gamma(\Omega)$, $p \in L^1(\Omega)$ и векторные поля $\mathbf{u} \in H_0^{1,2}(\Omega)$ и $\mathbf{F} \in L^1(\Omega)$ удовлетворяют уравнению (3.1), условию нормировки (1.1e) и неравенству $p \geq \varrho^\gamma$. Тогда для любого $\iota \in [0, 1/2)$ существуют положительные постоянные r и c , зависящие только от ι , γ , Ω и $\mathbf{M}$, такие, что для почти всех $y \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} d(x) \mathfrak{G}(x, y) p(x) dx \leq c \left(\int_{\Omega_r} p dx + \int_{\Omega} d^\iota \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + \sqrt{\mathbf{D}} + 1 + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} \right).$$

Для простоты изложения мы дадим полное доказательство в случае, когда область Ω является шаром. Обобщение на случай произвольной ограниченной области с гладкой границей очевидно.

Доказательство опирается на следующую конструкцию, которая позволяет распрямить границу области течения и свести задачу в криволинейной области к краевой задаче в полупространстве.

Далее мы будем считать, что координатные системы являются контравариантными. Поскольку исходная система координат является декартовой, то в

ней ковариантные и контравариантные компоненты любых объектов совпадают, но при переходе к криволинейным координатам они становятся различными. Так как область Ω конформно эквивалентна полупространству, то для каждой ее точки существуют стандартная окрестность $\mathcal{U}_0$ и конформное отображение $\mathcal{O}: x \mapsto y(x)$, отображающее подобласть $\Omega \cap \mathcal{U}_0$ на цилиндр

$$\mathcal{V} = D \times [0, 2R], \quad \text{где} \quad D = \{(y^1, y^2) : |y^1|^2 + |y^2|^2 < R\},$$

такое, что $c^{-1}d(x) < y^3(x) < cd(x)$. Конечный набор стандартных окрестностей $\mathcal{U}_k$ покрывает множество $\Omega \setminus \Omega_{2R}$. Им соответствует набор бесконечно дифференцируемых функций $\chi_k: \mathcal{V} \rightarrow [0, 1]$ таких, что каждая из функций χ_k обращается в нуль в окрестности множества $\partial\mathcal{V} \setminus \{y^3 = 0\}$. Функции $\chi_k \circ \mathcal{O}$, будучи продолженными нулем на множество $\Omega \setminus \mathcal{U}_k$, принадлежат классу $C^\infty(\Omega)$ и удовлетворяют равенству

$$\sum_k \chi_k \circ \mathcal{O}_k = 1 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \Omega_R.$$

Зафиксируем произвольно стандартную окрестность и далее будем писать $\mathcal{U}$ и χ вместо $\mathcal{U}_k$ и χ_k . Мы будем рассматривать поле скоростей $\mathbf{u}$ и поле сил $\mathbf{F}$ как контравариантные векторные поля, а тестовое поле φ как ковариантное векторное поле. В соответствии с этими соглашениями их компоненты в криволинейных координатах определяются равенствами

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= (\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3), & \bar{\varphi} &= (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3), \\ \bar{u}^i(y) &= \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x(y)) u^j(x(y)), & \bar{\varphi}_i(y) &= \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(y) \varphi_j(x(y)). \end{aligned}$$

Если векторное поле $\mathbf{u}$ и неотрицательные функции ϱ, p служат решением уравнения (3.1) и $\text{supp } \varphi \subset \mathcal{U}$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, то $\bar{\mathbf{u}}, \varrho$ и $\bar{\varphi}$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} \varrho \bar{u}^i \bar{u}^j \nabla_j \bar{\varphi}_i g^{1/2} dy + \int_{\mathcal{V}} p \operatorname{div}(g^{1/6} \bar{\varphi}) dy - \nu \int_{\mathcal{V}} g^{1/6} \nabla_i \bar{\varphi}_j \nabla_i \bar{u}^j dy \\ & - \theta \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(g^{1/6} \bar{\varphi}) g^{-1/2} \operatorname{div}(g^{1/2} \bar{\mathbf{u}}) dy + \int_{\mathcal{V}} g^{1/2} \bar{\mathbf{F}} \bar{\varphi} dy = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $\theta = \nu/3 + \xi$, $\sqrt{g(y)} = \det x'(y)$, ковариантные производные определены равенствами

$$\begin{aligned} \nabla_i \bar{\varphi}_j &= \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial y^i} - \Gamma_{ij}^k \bar{\varphi}_k, & \nabla_i \bar{u}^j &= \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial y^i} - \Gamma_{ik}^j \bar{u}^k, \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{6g} \left(\frac{\partial g}{\partial y^i} \delta_{jk} + \frac{\partial g}{\partial y^j} \delta_{ik} - \frac{\partial g}{\partial y^k} \delta_{ij} \right). \end{aligned}$$

На первом этапе доказательства теоремы 3.1 устанавливаются оценки функции давления, которые свидетельствуют об отсутствии сильных осцилляций давления вблизи границы.

ЛЕММА 3.1. *В условиях теоремы 3.1 для любого $s < 1/2$ существуют постоянные c и r_0 , зависящие только от Ω и s , такие, что при $r \in (0, r_0]$*

выполняются неравенства

$$\int_{\{0 < d < r\}} d(x)^{-s} (\varrho |\mathbf{u}_n|^2 + p) dx \leq c \int_{\Omega} d(x)^{1/2} (\varrho |\mathbf{u}|^2 + p) dx + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)}), \quad (3.3)$$

где $\mathbf{u}_n = \nabla d \cdot \mathbf{u}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение семейство функций, зависящих от параметров $0 < \delta < t$ и заданных формулами

$$\eta(y) = 1 \quad \text{при} \quad y^3 < t, \\ \eta(y) = \frac{t + \delta - y^3}{\delta} \quad \text{при} \quad t \leq y^3 \leq t + \delta, \quad \eta(y) = 0 \quad \text{иначе.}$$

Положим $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0$, $\bar{\varphi}_3 = \eta(y)\chi(y)y^3$. Подстановка $\bar{\varphi}$ в (3.2) приводит к равенству

$$-\frac{1}{\delta} \int_{D \times [t, t+\delta]} y^3 \Psi dy + \int_{D \times [0, t+\delta]} \eta(y) \Psi dy + \int_{D \times [0, t+\delta]} y^3 \eta(y) \Xi dy = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\Psi = \chi(g^{1/2} \varrho(\bar{u}^3)^2 + p g^{1/6} - \theta g^{-1/3} \operatorname{div}(g^{1/2} \bar{\mathbf{u}}) - \nu g^{1/6} \nabla_3 \bar{u}^3), \\ \Xi = \chi \Gamma_{ij}^3 (\nu g^{1/6} \nabla_i \bar{u}^j - g^{1/2} \varrho \bar{u}^i \bar{u}^j) + (p - \vartheta g^{-1/2} \operatorname{div}(g^{1/2} \bar{\mathbf{u}})) \frac{\partial}{\partial y^3} (g^{1/6} \chi) \\ + \chi \bar{F}^3 g^{1/2} + \nabla \chi (\nu g^{1/6} \nabla \bar{u}_3 - \varrho \bar{u}^3 \bar{\mathbf{u}}).$$

Легко видеть, что

$$c\chi(p + \varrho(\bar{u}^3)^2 - |\nabla \bar{\mathbf{u}}|) \leq \Psi \leq C\chi(p + \varrho(\bar{u}^3)^2 + |\nabla \bar{\mathbf{u}}|), \quad (3.5)$$

$$|\Xi| \leq c(p + |\bar{\mathbf{F}}| + \varrho + |\nabla \bar{u}| + \varrho |\bar{u}|^2), \quad (3.6)$$

где c, C зависят только от Ω . Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в (3.4), умножая обе части результирующего соотношения на t^{-2} и интегрируя полученное равенство относительно параметра t по интервалу $(r, 2R)$, мы придем к следующему тождеству:

$$\frac{1}{r} \int_{D \times [0, r]} \Psi dy = \frac{1}{2R} \int_{D \times [0, 2R]} \Psi dy - \int_r^{2R} \frac{1}{t^2} \left(\int_{D \times [0, t]} y^3 \Xi dy \right) dt.$$

Так как

$$\int_r^{2R} \frac{1}{t^2} \left(\int_{D \times [0, t]} y^3 \Xi dy \right) dt = \int_{D \times [0, r]} y^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \right) \Xi dy + \int_{D \times [r, 2R]} \left(1 - \frac{y^3}{2R} \right) \Xi dy,$$

отсюда вытекает неравенство

$$\frac{1}{r} \int_{D \times [0, r]} |\Psi| dy \leq \frac{1}{2R} \int_{D \times [0, 2R]} |\Psi| dy + \int_{D \times [0, r]} y^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \right) |\Xi| dy \\ + \int_{D \times [r, 2R]} y^3 \left(1 - \frac{y^3}{2R} \right) |\Xi| dy.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \int_{D \times [0, r]} |\nabla \bar{\mathbf{u}}| dy \leq c \|\bar{\mathbf{u}}\|_{H^{1,2}(\mathcal{V})} \leq c\sqrt{\mathbf{D}},$$

и привлекая оценку (3.5), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{D \times [0, r]} \chi(p + \varrho(\bar{u}^3)^2) dy &\leq c\sqrt{\mathbf{D}} + \sqrt{r} \int_{D \times [r, 2R]} (p + \varrho(\bar{u}^3)^2) dy \\ &+ c\sqrt{r} \int_{D \times [0, r]} y^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \right) |\Xi| dy + c\sqrt{r} \int_{D \times [r, 2R]} \left(1 - \frac{y^3}{2R} \right) |\Xi| dy, \end{aligned}$$

которое вместе с неравенствами

$$\begin{aligned} \sqrt{r} y^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \right) &\leq \sqrt{y^3} \quad \text{при } 0 < y^3 < r, \\ \sqrt{r} \left(1 - \frac{y^3}{2R} \right) &\leq \sqrt{y^3} \quad \text{при } r < y^3 < 2R \end{aligned}$$

влечет за собой оценку

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \int_{D \times [0, r]} \chi(p + \varrho(\bar{u}^3)^2) dy \leq c\sqrt{\mathbf{D}} + \sqrt{r} c \int_{D \times [r, 2R]} (p + \varrho(\bar{u}^3)^2) dy + c \int_{\mathcal{V}} \sqrt{y^3} |\Xi| dy.$$

Отсюда и из (3.6) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \int_{D \times [0, r]} \chi(p + \varrho(\bar{u}^3)^2) dy \leq c\sqrt{\mathbf{D}} + c \int_{\mathcal{V}} \sqrt{y^3} (1 + |\bar{\mathbf{F}}| + p + \varrho|\bar{\mathbf{u}}|^2) dy. \quad (3.7)$$

Далее заметим, что при $\iota < 1/2$ каждая неотрицательная функция $f \in L^1(\mathcal{V})$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{D \times [0, 2R]} (y^3)^{-\iota} f dy \leq \sup_{(0, 2R)} \frac{c(\iota)}{\sqrt{r}} \int_{D \times [0, r]} f dy + c(\iota, R) \int_{D \times [0, 2R]} f dy,$$

которое вместе с (3.7) влечет за собой оценку

$$\int_{D \times [0, 2R]} (y^3)^{-\iota} \chi(p + \varrho(\bar{u}^3)^2) dy \leq c\sqrt{\mathbf{D}} + c \int_{\mathcal{V}} \sqrt{y^3} (1 + p + \varrho|\bar{\mathbf{u}}|^2 + |\bar{\mathbf{F}}|) dy.$$

Возвращаясь к координатам x , окончательно находим

$$\int_{\mathcal{U}} d^{-\iota} \tilde{\chi}(p + \varrho|\mathbf{u}_n|^2) dx \leq c\sqrt{\mathbf{D}} + c \int_{\Omega} \sqrt{d} (1 + |\bar{\mathbf{F}}| + p + \varrho|\mathbf{u}|^2) dx,$$

где $\tilde{\chi} = \chi \circ \mathcal{O}$ и $r \leq R$. Остается заметить, что функции $\tilde{\chi}$ образуют разбиение единицы в области $\Omega \setminus \Omega_R$. Лемма 3.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Неравенство (3.3) может быть переписано в эквивалентной форме*

$$\begin{aligned} \int_{\{0 < d < r\}} d(x)^{-\iota} (\varrho|\mathbf{u}_n|^2 + p) dx &\leq c \int_{\Omega} d^{1/2} \varrho|\mathbf{u}|^2 dx \\ &+ c \int_{\Omega_r} p dx + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + 1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

На втором этапе доказательства мы получим оценку для свертки давления и функции Грина вблизи границы. Зафиксируем произвольно стандартную окрестность $\mathcal{U}$ граничной точки области течения, соответствующий ей диффеоморфизм $\mathcal{O}: \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$ и $t \in \mathcal{V}$. Положим $\mathbf{r}_- = |y - t|$,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_+ &= \sqrt{(y^1 - t^1)^2 + (y^2 - t^2)^2 + (y^3 + t^3)^2}, \\ \mathbf{r} &= \sqrt{(y^1 - t^1)^2 + (y^2 - t^2)^2 + (t^3)^2}.\end{aligned}$$

ЛЕММА 3.2. В условиях теоремы 3.1 выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} - \frac{1}{\mathbf{r}_+} \right) \chi y^3 p \, dy &\leq c \int_{\Omega} d^{-\iota} \varrho (\nabla d \cdot \mathbf{u})^2 \, dx + c \sqrt{\mathbf{D}} \\ &+ c \int_{\Omega} d^{\iota} (\varrho |\mathbf{u}|^2 + p + |\mathbf{F}| + 1) \, dx,\end{aligned}\quad (3.9)$$

в котором постоянная c зависит только от Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение вспомогательные потенциалы, заданные формулами

$$\Phi_t(y) = \mathbf{r}_- + \mathbf{r}_+, \quad \Phi_0(y) = h\left(\frac{y^3}{t^3}\right)\mathbf{r}, \quad \Phi = \Phi_t - 2\Phi_0,$$

в которых функция $h(z) = 1 - bz$ при $0 \leq z \leq b^{-1}$ и $h(z) = 0$ при $z > b^{-1}$. Значение положительной постоянной $b > 4$ будет уточнено ниже. Определим ковариантное векторное поле $\bar{\varphi}$ посредством соотношений

$$\bar{\varphi}_1(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y^1}, \quad \bar{\varphi}_2(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y^2}, \quad \bar{\varphi}_3(y) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial y^3}. \quad (3.10)$$

Очевидно, $\bar{\varphi}$ обращается в нуль при $y^3 = 0$. Подстановка $\chi(y)\bar{\varphi}(y)$ в интегральное тождество (3.2) дает равенство

$$\int_{\mathcal{V}} \chi(\Psi_0(y) + \Psi_1(y)) \, dy + \int_{\mathcal{V}} (\Theta_0(y) + \Theta_1(y)) \, dy = 0, \quad (3.11)$$

где

$$\Psi_0 = \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial y^i} \varrho \bar{u}^j \bar{u}^i g^{1/2}, \quad \Psi_1 = p g^{1/6} \operatorname{div} \bar{\varphi}, \quad (3.12)$$

$$\Theta_0 = -\nu \chi g^{1/6} \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial y^i} \nabla_i \bar{u}^j - \vartheta \chi g^{-1/3} \operatorname{div} \bar{\varphi} \operatorname{div}(g^{1/2} \bar{\mathbf{u}}), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (g^{1/2} \varrho \bar{u}^i \bar{u}^j - \nu g^{1/6} \nabla_i \bar{u}^j) \left(\frac{\partial \chi}{\partial y^i} \bar{\varphi}_j - \chi \Gamma_{ij}^k \bar{\varphi}_k \right) \\ &+ \chi (p - \theta g^{-1/2} \operatorname{div}(g^{1/2} \bar{\mathbf{u}})) \nabla(\chi g^{1/6}) \bar{\varphi} + \chi g^{1/2} \bar{\mathbf{F}} \bar{\varphi}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Последующие построения опираются на следующую алгебраическую лемму.

ЛЕММА 3.3. Существуют абсолютные положительные постоянные b, c такие, что для всех $y, t \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ выполняются неравенства

$$|\bar{\varphi}| \leq c \frac{y^3}{t^3}, \quad \left| \frac{\partial \bar{\varphi}_\mu}{\partial y^\tau} \right| \leq c \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} + \frac{1}{\mathbf{r}_+} + \frac{1}{t^3} \right), \quad \operatorname{div} \bar{\varphi} \geq \frac{y^3}{t^3} \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} - \frac{1}{\mathbf{r}_+} \right) \quad (3.15)$$

и квадратичная форма

$$\mathfrak{S}(y, t)z \cdot z := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial y^i \partial y^j} z^i z^j - 2 \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^i \partial y^j} z^i z^j, \quad z \in \mathbb{R}^3,$$

неотрицательно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Потенциалы Φ_i являются однородными функциями. Кроме того, они инвариантны относительно сдвига системы координат в горизонтальном направлении и ее вращения вокруг вертикальной оси. Поэтому достаточно доказать утверждение леммы для

$$y = (y^1, 0, y^3), \quad t = (0, 0, 1), \quad \mathfrak{r}_{\pm} = \sqrt{1 + (y^1)^2 + (y^3)^2 \pm 2y^3}, \quad \mathfrak{r} = \sqrt{1 + (y^1)^2}.$$

В этом случае первые два неравенства (3.15) очевидны. Для доказательства третьего заметим, что при сделанных предположениях

$$\operatorname{div} \bar{\varphi} = \frac{2}{\mathfrak{r}_-} + \frac{2}{\mathfrak{r}_+} - h(y^3) \frac{4}{\mathfrak{r}} + \frac{2(y^1)^2}{\mathfrak{r}^3} \geq \frac{2}{\mathfrak{r}_-} + \frac{2}{\mathfrak{r}_+} - h(y^3) \frac{4}{\mathfrak{r}}.$$

Поэтому неравенство (3.15) тривиально верно для $y^3 > b^{-1}$, когда $h(y^3) = 0$. В полосе $0 < y^3 < b^{-1} < 1/4$ имеем

$$\operatorname{div} \bar{\varphi} - y^3 \left(\frac{1}{\mathfrak{r}_-} - \frac{1}{\mathfrak{r}_+} \right) \geq \frac{1}{\mathfrak{r}} \left(4by^3 + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_-} + \frac{3\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_+} - 4 \right) = \frac{y^3}{\mathfrak{r}} (4b + O(1)),$$

где величина $O(1)$ ограничена абсолютной постоянной. Отсюда вытекает, что неравенство (3.15) выполняется для всех достаточно больших значений параметра b . Для доказательства неотрицательности квадратичной формы $\mathfrak{S}$ заметим, что при сделанных предположениях ее коэффициенты задаются формулами

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{11} &= \frac{(y^3 - 1)^2}{\mathfrak{r}_-^3} + \frac{(y^3 + 1)^2}{\mathfrak{r}_+^3} - 2h(y^3) \frac{1}{\mathfrak{r}}, & \mathfrak{S}_{22} &= \frac{1}{\mathfrak{r}_-} + \frac{1}{\mathfrak{r}_+} - 2h(y^3) \frac{1}{\mathfrak{r}}, \\ \mathfrak{S}_{33} &= \frac{(y^1)^2}{\mathfrak{r}_-^3} + \frac{(y^1)^2}{\mathfrak{r}_+^3}, & \mathfrak{S}_{13} &= -\frac{y^1(y^3 - 1)}{\mathfrak{r}_-^3} - \frac{y^1(y^3 + 1)}{\mathfrak{r}_+^3}, \end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_{23} = 0$. Очевидно, форма $\mathfrak{S}$ неотрицательно определена при $h = 0$. С другой стороны, в полосе $0 < y^3 < b^{-1}$, где h отлична от нуля, выполняются тождества

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{22} &= \frac{1}{\mathfrak{r}} \left(2by^3 + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_-} + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_+} - 2 \right), \\ \mathfrak{S}_{11} \mathfrak{S}_{33} - \mathfrak{S}_{13}^2 &= \frac{2(y^1)^2(\mathfrak{r}_-^3 + \mathfrak{r}_+^3)}{\mathfrak{r}_-^3 \mathfrak{r}_+^3 \mathfrak{r}^3} \left(by^3 + \frac{2\mathfrak{r}^3}{\mathfrak{r}_-^3 + \mathfrak{r}_+^3} - 1 \right), \end{aligned}$$

которые влекут неотрицательность формы $\mathfrak{S}$ при всех достаточно больших b . Лемма 3.3 доказана.

Вернемся к доказательству леммы 3.2. Далее будем предполагать, что векторное поле $\bar{\varphi}$ удовлетворяет всем условиям леммы 3.3. Наша главная задача –

оценить Ψ_i снизу и Θ_i сверху. Из выражения для векторного поля $\bar{\varphi}$ вытекает тождество

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_\mu}{\partial y^\tau} \varrho \bar{u}^\mu \bar{u}^\tau = \varrho \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \frac{4}{t^3} h' \left(\frac{y^3}{t^3} \right) \left(\frac{y^1 - t^1}{\mathbf{r}} \bar{u}^1 + \frac{y^2 - t^2}{\mathbf{r}} \bar{u}^2 \right) \bar{u}^3 \varrho.$$

Привлекая лемму 3.3, получаем оценку

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_\mu}{\partial y^\tau} \varrho \bar{u}^\mu \bar{u}^\tau \geq -\frac{c}{t^3} \varrho |\bar{\mathbf{u}}| |\bar{u}^3| \geq -\frac{c}{t^3} (y^3)^\iota \varrho |\bar{\mathbf{u}}|^2 - \frac{c}{t^3} (y^3)^{-\iota} \varrho |\bar{u}^3|^2.$$

Комбинируя этот результат с оценкой (3.15), находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \chi(\Psi_0(y) + \Psi_1(y)) dy &\geq \frac{c}{t^3} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} - \frac{1}{\mathbf{r}_+} \right) y^3 p \chi dy \\ &\quad - \frac{c}{t^3} \int_{\mathcal{V}} ((y^3)^\iota \varrho |\bar{\mathbf{u}}|^2 + (y^3)^{-\iota} \varrho |\bar{u}^3|^2) \chi dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Далее из (3.13) и (3.15) получаем

$$|\Theta_0| \leq c \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} + \frac{1}{\mathbf{r}_+} + \frac{1}{t^3} \right) (|\nabla \bar{\mathbf{u}}| + |\bar{\mathbf{u}}|).$$

Отсюда и из неравенства Коши вытекает оценка

$$\int_{\mathcal{V}} |\Theta_0| dy \leq c \left(\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r}_-^{-2} + \mathbf{r}_+^{-2} + (t^3)^{-2}) dy \int_{\mathcal{V}} (|\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 + |\bar{\mathbf{u}}|^2) dy \right)^{1/2} \leq \frac{c}{t^3} \sqrt{\mathbf{D}}. \quad (3.17)$$

В свою очередь, из (3.14), (3.15) и неравенств $\varrho |\bar{\mathbf{u}}| + \varrho \leq c \varrho |\bar{\mathbf{u}}|^2 + p + 1$ и

$$|\Theta_1| \leq \frac{c y^3}{t^3} (|\nabla \bar{\mathbf{u}}| + |\bar{\mathbf{u}}| + \varrho |\bar{\mathbf{u}}|^2 + p + |\bar{\mathbf{F}}| + 1)$$

находим

$$\int_{\mathcal{V}} |\Theta_1| dy \leq \frac{c}{t^3} \sqrt{\mathbf{D}} + \frac{c}{t^3} \int_{\mathcal{V}} y^3 (\varrho |\bar{\mathbf{u}}|^2 + p + |\bar{\mathbf{F}}| + 1) dy. \quad (3.18)$$

Остается заметить, что подстановка (3.16)–(3.18) в (3.11) ведет к искомому неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} - \frac{1}{\mathbf{r}_+} \right) y^3 p \chi dy &\leq c \int_{\mathcal{V}} (y^3)^{-\iota} \varrho |\bar{u}^3|^2 \chi dy + c \sqrt{\mathbf{D}} \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}} y^3 (\varrho |\bar{\mathbf{u}}|^2 + p + |\bar{\mathbf{F}}| + 1) dy \\ &\leq c \int_{\Omega} d^{-\iota} \varrho |\bar{\mathbf{u}}_n|^2 dx + c \sqrt{\mathbf{D}} \\ &\quad + c \int_{\Omega} d (\varrho |\mathbf{u}|^2 + p + |\mathbf{F}| + 1) dx. \end{aligned}$$

Лемма 3.2 доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 вытекает следующая оценка для свертки функции Грина и давления вблизи границы области течения.

ЛЕММА 3.4. Пусть R – радиус стандартной окрестности, зависящий только от Ω и $z \in \Omega \setminus \Omega_{R/2}$. Тогда существуют постоянные c, r , зависящие только от Ω , такие, что

$$\int_{\Omega} d(x) \mathfrak{G}(x, z) p(x) dx \leq c\sqrt{\mathbf{D}} + c \int_{\Omega} d^t \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \int_{\Omega_r} p dy + c \int_{\Omega} (|\mathbf{F}| + 1) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Привлекая лемму 3.2 и следствие 3.1, получаем

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} - \frac{1}{\mathbf{r}_+} \right) \chi y^3 p dy \leq c \int_{\Omega} d^t \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \int_{\Omega_r} p dx + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + 1).$$

Далее, заметим, что для любых точек $x, z \in \mathcal{U}$ и $y = y(x)$, $t = y(z) \in \mathcal{V}$ выполняется неравенство

$$c^{-1} \mathfrak{G}(x, z) \leq \left(\frac{1}{\mathbf{r}_-} - \frac{1}{\mathbf{r}_+} \right) \leq c \mathfrak{G}(x, z)$$

с постоянной c , зависящей только от области Ω . Следовательно, при $z \in \mathcal{U}$ справедлива оценка

$$\int_{\mathcal{U}} \mathfrak{G}(x, z) d(x) p(x) \tilde{\chi}(x) dx \leq c \int_{\Omega} d^t \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \int_{\Omega_r} p dx + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + 1).$$

Выберем произвольно точку $z \in \Omega \setminus \Omega_{R/2}$. Так как функции $\tilde{\chi}$ формируют разбиение единицы в области $\Omega \setminus \Omega_R$, то

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_R} \mathfrak{G}(x, z) d(x) p(x) dx \leq c \int_{\Omega} d^t \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \int_{\Omega_r} p dx + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + 1).$$

Остается заметить, что при $x \in \Omega_R$ и $z \in \Omega \setminus \Omega_{R/2}$ выполнено неравенство $\mathfrak{G}(x, z) \leq c$ и, как следствие,

$$\int_{\Omega_R} \mathfrak{G}(x, z) d(x) p(x) dx \leq c \int_{\Omega} d^t \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \int_{\Omega_r} p dx + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + 1).$$

Лемма 3.4 доказана.

Последний этап доказательства теоремы 3.1 состоит в получении внутренних оценок для свертки функции Грина и функции давления.

ЛЕММА 3.5. В условиях теоремы 3.1 существует $r > 0$, зависящее только от Ω , такое, что для любого $z \in \Omega_{R/2}$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \mathfrak{G}(x, z) p(x) dx \leq c\sqrt{\mathbf{D}} + c \int_{\Omega} d^t \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \int_{\Omega} (p + 1 + |\mathbf{F}|) dx. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно $z \in \Omega_{R/2}$ и положим $t = R/4$. Так как $\mathfrak{G}(x, z) \leq c|x - z|^{-1}$, мы получим

$$\int_{\Omega} \mathfrak{G}(x, z) p dx \leq c \int_{B(z, t)} \frac{p dx}{|x - z|} + \frac{c}{t} \int_{\Omega \setminus B(z, t)} p dx, \quad \int_{\Omega} \mathfrak{G}(x, z) |\operatorname{div} \mathbf{u}| dx \leq c\sqrt{\mathbf{D}}.$$

Далее воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} & \int_{B(z,t)} \frac{\varrho}{|x-z|} (I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \, dx + \int_{B(z,t)} \frac{2}{|x-z|} p \, dx \\ &= \int_{B(z,t)} \frac{\varrho}{|x-z|} (I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \nabla \mathbf{u} \, dx + \int_{B(z,t)} \frac{2\theta}{|x-z|} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \\ & \quad + \frac{1}{t} \int_{B(z,t)} (\varrho \mathbf{u}^2 + 3p - (\nu + 3\vartheta) \operatorname{div} \mathbf{u}) \, dx \\ & \quad + \int_{B(z,t)} \varrho \left(\mathbf{n} - \frac{1}{t} (x - z) \right) \cdot \mathbf{F} \, dx = 0, \end{aligned}$$

$\mathbf{n} = (x - z)/|x - z|$, которое влечет за собой оценку

$$\begin{aligned} & \int_{B(z,t)} \frac{\varrho}{|x-z|} (I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \, dx + \int_{\Omega} \frac{p}{|x-z|} \, dx \leq \frac{1}{t} \int_{B(y,t)} \varrho |\mathbf{u}|^2 \, dx \\ & \quad + c \int_{\Omega} p \, dx + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + 1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Так как $(I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \geq 0$ и всюду в шаре $B(z, t)$ выполняется неравенство $t^{-1} \leq 16d(x)R^{-2}$, искомое неравенство (3.19) является следствием (3.20). Лемма 3.5 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 3.1 остается заметить, что она является очевидным следствием лемм 3.4, 3.5 и следствия 3.1.

Из теоремы 3.1 и леммы 2.1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть в условиях теоремы 3.1 выполняется неравенство $0 < \iota < 1/2$. Тогда для любых $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} d(x) p(x) |v|^2 \, dx \leq \left(\int_{\Omega} d(x)^{\iota} \varrho |\mathbf{u}|^2 \, dx + c \int_{\Omega_r} p \, dx \right. \\ & \quad \left. + c(\sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + 1) \right) \|v\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2. Энергетическая оценка. Теорема 3.1 позволяет получить эффективную оценку для решений модельного уравнения баланса импульса.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть неотрицательные функции ϱ , p и векторное поле $\mathbf{u}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3.1 и слабому энергетическому неравенству $\mathbf{D} \leq c_e \sqrt{\mathbf{K}}$. Предположим также, что γ и показатель s в условии (1.1e) удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{5\gamma - 4} < s < \frac{1}{2}, \quad \gamma > \frac{4}{3}.$$

Тогда существуют постоянные c и $\sigma > 1$, зависящие только от Ω , $\|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)}$, s , c_e , γ , а также постоянная $c(t)$, зависящая только от Ω , $\|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)}$, s , c_e , γ , $t > 0$, такие, что при $t > 0$

$$\mathbf{D} + \|d^s \varrho |\mathbf{u}|^2\|_{L^\sigma(\Omega)} + \|p\|_{L^1(\Omega)} \leq c, \quad \|p\|_{L^\sigma(\Omega_t)} \leq c(t). \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 3.6. В условиях теоремы 3.2 для любых $t \geq 0$ и $1 < \sigma < 3/2$ справедлива оценка

$$\|p\|_{L^\sigma(\Omega_t)} \leq c(\|\varrho \mathbf{u}\|_{L^\sigma(\Omega_t)} + \sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega_t)} + \mathbf{M}). \quad (3.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что для каждой функции $\psi \in L^{\sigma/(\sigma-1)}(\Omega_t)$ с нулевым средним по области Ω_t существует векторное поле φ , удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{div} \varphi = \psi \text{ на } \Omega_t, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega_t$$

и допускающее оценки

$$\|\nabla \varphi\|_{L^{\sigma/(\sigma-1)}(\Omega_t)} \leq c(\Omega_t) \|\psi\|_{L^{\sigma/(\sigma-1)}(\Omega_t)}, \quad |\varphi| \leq c \|\psi\|_{L^{\sigma/(\sigma-1)}(\Omega_t)}.$$

Умножая обе части уравнения (3.1) скалярно на φ и интегрируя результат по области Ω_t , мы приходим к интегральному тождеству

$$-\int_{\Omega_t} ((\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \Pi) : \nabla \varphi + \mathbf{F} \varphi) dx = \int_{\Omega_t} p \psi dx,$$

которое вместе с очевидным неравенством

$$\int_{\Omega_t} (|\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla \varphi| + |\Pi| |\nabla \varphi|) dx \leq (\|\varrho \mathbf{u}\|_{L^\sigma(\Omega_t)} + \sqrt{\mathbf{D}}) \|\nabla \varphi\|_{L^{\sigma/(\sigma-1)}(\Omega_t)}$$

влечет за собой оценку

$$\int_{\Omega_t} p \psi dx \leq c(\|\varrho \mathbf{u}\|_{L^\sigma(\Omega_t)} + \sqrt{\mathbf{D}} + 1) c \|\psi\|_{L^{\sigma/(\sigma-1)}(\Omega_t)}.$$

Следовательно, функция давления допускает оценку

$$\left\| p - (\operatorname{meas} \Omega_t)^{-1} \int_{\Omega_t} p dx \right\|_{L^\sigma(\Omega_t)} \leq \|\varrho \mathbf{u}\|_{L^\sigma(\Omega_t)} + \sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega_t)}.$$

Остается заметить, что для каждого $\delta > 0$

$$\int_{\Omega_t} p dx \leq \delta \|p\|_{L^\sigma(\Omega_t)} + c(\delta) \int_{\Omega} \varrho dx \leq c\delta \|p\|_{L^\sigma(\Omega_t)} + c(\delta) \mathbf{M}.$$

Лемма 3.6 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3.2. Выберем число σ , удовлетворяющее неравенствам

$$1 < \sigma < 6/(10 - 3\gamma) \text{ при } 4/3 < \gamma < 2, \quad 1 < \sigma < 3/2 \text{ при } 2 < \gamma, \quad (3.24)$$

и положим

$$\alpha = \frac{4\sigma - 3}{3\gamma - 2}, \quad \beta = \frac{\gamma\sigma - 2\sigma + 1}{3\gamma - 2}, \quad \tau = \frac{3\gamma - 2\sigma - \gamma\sigma}{3\gamma - 2}, \quad \iota = \frac{\alpha}{\sigma + \tau}. \quad (3.25)$$

Из (3.24) вытекают соотношения

$$\alpha + \beta + \tau = 1, \quad (2\sigma - 2\alpha)/\beta = 6, \quad \alpha/\sigma < 1/2, \quad (3.26)$$

которые вместе с неравенством Гёльдера влекут за собой оценку

$$\left(\int_{\Omega} (d^{\iota} \varrho |\mathbf{u}|^2)^{\sigma} dx \right)^{1/\sigma} \leq \left(\int_{\Omega} d^{-\iota} \varrho dx \right)^{\kappa} \left(\int_{\Omega} dp |\mathbf{u}|^2 dx \right)^a \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^6 dx \right)^{2(1-a)/6} \quad (3.27)$$

с показателями $\kappa = \tau/\sigma$, $a = \alpha/\sigma$. Заметим, что $\iota = (5\gamma - 4)^{-1}$ при $\sigma = 1$. Поэтому можно выбрать σ настолько близким к единице, чтобы выполнялись неравенства $1 < \iota \leq s$. При таком выборе σ из (3.27) следует оценка

$$\|d^{\iota} \varrho |\mathbf{u}|^2\|_{L^{\sigma}(\Omega)} \leq c \mathbf{M}^{\kappa} \left(\int_{\Omega} dp |\mathbf{u}|^2 dx \right)^a \mathbf{D}^{1-a}. \quad (3.28)$$

С другой стороны, из следствия 3.2 и леммы 3.6 вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|dp |\mathbf{u}|^2\|_{L^1(\Omega)} &\leq c(\|d^{\iota} \varrho |\mathbf{u}|^2\|_{L^{\sigma}(\Omega)} + \|p\|_{L^{\sigma}(\Omega_r)} + \sqrt{\mathbf{D}} + 1) \mathbf{D} \\ &\leq c(\|d^{\iota} \varrho |\mathbf{u}|^2\|_{L^{\sigma}(\Omega)} + \sqrt{\mathbf{D}} + 1 + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + \mathbf{M}) \mathbf{D}, \end{aligned}$$

подстановка которого в (3.28) приводит к соотношению

$$\mathcal{K} \leq c(\mathcal{K} + \sqrt{\mathbf{D}} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)} + \mathbf{M} + 1)^a \mathbf{D}, \quad (3.29)$$

где $\mathcal{K} = \|d^{\iota} \varrho |\mathbf{u}|^2\|_{L^{\sigma}(\Omega)}$. Так как $\iota \leq s$, то, очевидно,

$$\mathbf{K} \leq c\|d^s \varrho |\mathbf{u}|^2\|_{L^{\sigma}(\Omega)} \leq c\mathcal{K}.$$

Отсюда и из слабой энергетической оценки получаем

$$\mathbf{D} \leq c\sqrt{\mathcal{K}} + c\|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)}. \quad (3.30)$$

Поскольку, согласно (3.26), показатель a удовлетворяет неравенству $a < 1/2$, соотношения (3.29) и (3.30) влекут за собой оценку

$$\|d^s \varrho |\mathbf{u}|^2\|_{L^{\sigma}(\Omega)} + \mathbf{D} \leq \mathcal{K} + \mathbf{D} \leq C(\Omega, s, \gamma, \mathbf{M}, \|\mathbf{F}\|_{L^1(\Omega)}). \quad (3.31)$$

Для завершения доказательства неравенств (3.22) заметим, что оценка нормы $\|p\|_{L^{\sigma}(\Omega_t)}$ следует из (3.31) и леммы 3.6, а оценка $\|p\|_{L^1(\Omega)}$ следует из (3.31), оценки для $\|p\|_{L^{\sigma}(\Omega_t)}$ и неравенства (3.8). Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Эффективное вязкое давление

Следуя [6], введем в рассмотрение величину $p(\rho) - \vartheta \operatorname{div} \mathbf{u}$, которая называется эффективным вязким давлением. Как было показано в [4]–[6], она обладает многими замечательными свойствами, наиболее важным из которых является коммутативное соотношение для слабых пределов решений уравнений динамики вязкого газа, впервые доказанное [6] для показателей адиабаты $\gamma > 3/2$. Эффективное доказательство этого результата, основанное на новом принципе компенсированной компактности, было дано в работах [4], [5]. Следующая лемма, доказательство которой приведено в [22], является локальной версией этого результата. Рассмотрим последовательность векторных полей $\mathbf{u}_n \in H_0^{1,2}(\Omega)$ и неотрицательных функций ϱ_n , удовлетворяющих следующим условиям.

Векторные поля $\mathbf{u}_n \in H_0^{1,2}(\Omega)$ и функции ϱ_n служат обобщенными решениями уравнений баланса импульса

$$\operatorname{div}(\varrho_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) + \nabla p(\varrho_n) = \operatorname{div} \Pi(\mathbf{u}_n) + \mathbf{F}_n, \quad p(\varrho_n) = \varrho_n^\gamma, \quad \gamma > 1,$$

и ренормализованными решениями уравнений транспорта массы

$$\operatorname{div}(\varrho_n \mathbf{u}_n) = H_n.$$

Векторные поля $\mathbf{u}_n$ сходятся слабо в $H_0^{1,2}(\Omega)$ к векторному полю $\mathbf{u}$. Последовательность ϱ_n сходится слабо в $L^\gamma(\Omega)$ к неотрицательной функции ϱ . Существует $\sigma > 1$ такое, что последовательности $\mathbf{F}_n$, H_n сходятся слабо в $L^\sigma(\Omega)$. Для любого компакта $\Omega' \Subset \Omega$ последовательности $\varrho_n \mathbf{u}_n \times \mathbf{u}_n$, $p(\varrho_n)$ сходятся к слабо в $L^\sigma(\Omega')$ к $\varrho \mathbf{u} \times \mathbf{u}$ и $\bar{p} \in L^1(\Omega)$.

ЛЕММА 4.1. *Для любой функции $\Phi \in C(\Omega \times \mathbb{R})$, равной нулю в окрестности поверхности $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ и совпадающей с некоторой функцией $\Phi_0 \in C(\Omega)$, при больших λ выполняется соотношение*

$$\int_{\Omega} \overline{\Phi(\cdot, \varrho) p(\varrho) - \vartheta \operatorname{div} \mathbf{u}} dx = \int_{\Omega} \bar{\Phi}(\bar{p} - \vartheta \operatorname{div} \mathbf{u}) dx, \quad (4.1)$$

где $\bar{\Phi}$ обозначает слабый предел последовательности $\Phi(x, \varrho_n)$.

§ 5. Компактность решений транспортного уравнения

В этом параграфе мы сформулируем и докажем общую теорему о компактности множества ренормализованных решений транспортного уравнения (1.1b). Предположим, что последовательности векторных полей $\mathbf{u}_n \in H^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ и неотрицательных функций плотности $\varrho_n: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+$ и давления $p_n = \varrho_n^\gamma$, $n \geq 1$, удовлетворяют следующим условиям.

(А) $\mathbf{u}_n = 0$ и $\varrho_n = 0$ вне области Ω . Существуют положительные постоянные κ и c такие, что

$$\|\mathbf{u}_n\|_{H^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leq c, \quad \int_{\mathbb{R}^3} p_n dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\varrho_n \mathbf{u}_n|^{1+\kappa} dx \leq c$$

для всех $n \geq 1$. Более того, для каждой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega'} p_n^{1+\kappa} dx + \int_{\Omega'} (\varrho_n |\mathbf{u}_n|^2)^{1+\kappa} dx \leq c(\Omega')$$

с постоянной $c(\Omega')$, не зависящей от n .

(В) Векторные поля $\mathbf{u}_n$ сходятся слабо в пространстве $H^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ к векторному полю $\mathbf{u}$. Для любого компакта $E \subset \mathbb{R}^3$ и произвольной непрерывной функции $G: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-\gamma} G(\varrho) = 0$, функции $G(\varrho_n)$ сходятся слабо в $L^1(E)$ к функции $\bar{G} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$. Если G удовлетворяет более общему условию $\limsup_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-\gamma} |G(\varrho)| < \infty$, то последовательность $G(\varrho_n)$ сходится слабо в $L^1(\Omega')$ в любой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ к функции $\bar{G} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. В частности, ϱ_n сходятся слабо в $L^\gamma(\mathbb{R}^3)$ к некоторой функции ϱ , удовлетворяющей условию (А).

(C) Существуют сходящаяся последовательность неотрицательных чисел $\alpha_n \rightarrow \alpha$ и неотрицательные функции $a, h \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$ такие, что

$$a = h = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \quad a \varrho_n \rightarrow a \varrho \quad \text{слабо в } L^1(\mathbb{R}^3). \quad (5.1)$$

Для любой функции $G \in C^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} G''(\varrho) \rightarrow 0$, и произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ выполняется предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (G(\varrho_n) \mathbf{u}_n \cdot \nabla \psi + (G(\varrho_n) - G'(\varrho_n) \varrho_n) \psi \operatorname{div} \mathbf{u}_n) dx \\ & + \alpha_n \int_{\mathbb{R}^3} G'(\varrho_n) (h - a \varrho_n) \psi dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.2)$$

(D) Для любых $\psi \in C_0(\Omega)$ и $g \in C(\mathbb{R})$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi g(\varrho_n) (p(\varrho_n) - \vartheta \operatorname{div} \mathbf{u}_n) dx = \int_{\Omega} \psi \bar{g}(\bar{p} - \vartheta \operatorname{div} \mathbf{u}) dx.$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если последовательности $\mathbf{u}_n$ и ϱ_n удовлетворяют условиям (A)–(D), то $\varrho_n \rightarrow \varrho$ в каждом из пространств $L_{\text{loc}}^t(\mathbb{R}^3)$, $t \in [1, 1 + \kappa)$.*

Подобные результаты являются важной составной частью теории слабых решений уравнений динамики вязкого газа. Трудность рассматриваемого случая связана с отсутствием L^σ -оценок функции давления во всей области течения. Более того, слабый предел последовательности p_n в области Ω не определен. Чтобы преодолеть это затруднение, заметим, что сильная сходимости последовательности ϱ_n равносильна равенству $f(1 - f) = 0$, где f – функция распределения меры Янга. Мы покажем, что она служит решением линейного кинетического уравнения, которое, в свою очередь, допускает процедуру ренормализации. Нужно равенство $f(1 - f) = 0$ может быть получено путем анализа ренормализованного кинетического уравнения. Преимущество такого подхода состоит в том, что функция распределения равномерно ограничена. Сначала мы установим основные свойства f .

ЛЕММА 5.1. *В условиях теоремы 5.1 существует функция распределения $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ такая, что*

(i) *выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= 0 \quad \text{при } \lambda < 0 \quad \text{н.в. в } \mathbb{R}^3, \\ f(x, \lambda) &= 1 \quad \text{при } \lambda \geq 0 \quad \text{н.в. в } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega; \end{aligned}$$

(ii) *f удовлетворяет всем требованиям леммы 2.1, и для любого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^3$ и произвольной непрерывной функции $G: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{-\gamma} \|G(\cdot, \rho)\|_{C(A)} = 0$, последовательность $G(\cdot, \varrho_n)$ сходится слабо в $L^1(A)$ к функции*

$$\bar{G}(x) = \int_{[0, \infty)} G(x, \lambda) d_\lambda f(x, \lambda) \quad \text{н.в. в } \mathbb{R}^n; \quad (5.3)$$

в частности, слабый предел последовательности ϱ_n допускает представление

$$\rho(x) = \int_{[0, \infty)} \lambda d_\lambda f(x, \lambda) \equiv \int_{[0, \infty)} (1 - f(x, \lambda)) d\lambda \quad \text{н.в. в } \mathbb{R}^3; \quad (5.4)$$

(iii) существует функция $\bar{p} \in L^1(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^{1+\kappa}(\Omega)$ такая, что последовательность p_n сходится слабо в $L_{\text{loc}}^{1+\kappa}(\Omega')$ для любого компакта $\Omega' \Subset \Omega$. Будучи продолженной нулем вне Ω , она допускает представление

$$\bar{p}(x) = \int_{[0,\infty)} \lambda^\gamma d_\lambda f(x, \lambda) \equiv \gamma \int_{[0,\infty)} \lambda^{\gamma-1} (1 - f(x, \lambda)) d\lambda. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) являются очевидным следствием утверждения (i) леммы 2.1 и условий (A), (B). Напомним, что последовательность $p(\rho_n)$ ограничена в $L^{1+\kappa}(K)$ для любого компакта $K \Subset \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$. Поэтому функция $\bar{p}$ определена и принадлежит классу $L_{\text{loc}}^{1+\kappa}(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$. Поскольку $\|\bar{p}\|_{L^1(K)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|p(\rho_n)\|_{L^1(K)} \leq c$, функция $\bar{p}$ суммируема в $\mathbb{R}^3$.

5.1. Кинетическое уравнение. Следующее утверждение показывает, что функция распределения $f(x, \lambda)$ служит решением транспортного уравнения в расширенном пространстве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

ЛЕММА 5.2. В условиях теоремы 5.1 функция распределения $f(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(f\mathbf{V}) + \partial_\lambda(\lambda\mathcal{M}) + \alpha(h - \lambda a)\partial_\lambda f = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4). \quad (5.6)$$

Здесь нелинейный оператор $\mathcal{M}$ и соленоидальное векторное поле $\mathbf{V}: \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, \lambda) &= -\frac{1}{\vartheta} \int_{(-\infty, \lambda)} (s^\gamma - \bar{p}) d_s f(x, s) = \frac{1}{\vartheta} \int_{[\lambda, \infty)} (s^\gamma - \bar{p}) d_s f(x, s), \\ \mathbf{V}(x, \lambda) &= (\mathbf{u}(x), -\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}(x)). \end{aligned} \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и положим $G(\lambda) = \int_\lambda^\infty \eta(s) ds$. Подставляя G и ψ в левую часть соотношения (5.2) и устремляя n к бесконечности, придем к равенству

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} (\bar{G}\mathbf{u} \cdot \nabla \psi + \alpha(\bar{G}'h - \bar{G}'\varrho a)\psi) dx \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (G(\varrho_n) - G'(\varrho_n)\varrho_n)\psi \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Так как G непрерывна и ограничена, из леммы 5.1 вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^\infty \eta(\lambda) d\lambda \right) d_s f(x, s) = \int_{\mathbb{R}} \eta(\lambda) f(x, \lambda) d\lambda, \\ \bar{G}'(x) &= - \int_{\mathbb{R}} \eta(\lambda) d_\lambda f(x, \lambda). \end{aligned}$$

Подставляя их в (5.8), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^4} f(x, \lambda) \eta(\lambda) \mathbf{u} \cdot \nabla \psi dx d\lambda + \alpha \int_{\mathbb{R}^4} (a(x)\lambda - h(x)) \eta \psi d_\lambda f(x, \lambda) dx \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (G(\varrho_n) - G'(\varrho_n)\varrho_n) \psi \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Обозначим δ -окрестность границы Ω через O_δ . Заметим, что последовательность $(G - G' \varrho_n) \operatorname{div} \mathbf{u}_n$ ограничена в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$. Отсюда и из условия **(D)** вытекает соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (G(\varrho_n) - G'(\varrho_n) \varrho_n) \psi \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O_\delta} (G(\varrho_n) - G'(\varrho_n) \varrho_n) \psi \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O_\delta} \overline{(G - G' \varrho)} \operatorname{div} \mathbf{u} \psi dx \\ &\quad + \frac{1}{\vartheta} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus O_\delta} \left(\overline{(G - G' \varrho)p} - \overline{(G - G' \varrho)\bar{p}} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{(G - G' \varrho)} \operatorname{div} \mathbf{u} \psi dx + \frac{1}{\vartheta} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{(G - G' \varrho)p} - \overline{(G - G' \varrho)\bar{p}} \right) dx. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Сходимость входящих в это соотношение интегралов следует из суммируемости функции λ^γ по мере $d_\lambda f dx$. Отсюда и из тождества

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \psi \left(\overline{(G - G' \varrho)p} - \overline{(G - G' \varrho)\bar{p}} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^4} \psi \eta \lambda (\lambda^\gamma - \bar{p}) d_\lambda f(x, \lambda) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^4} \psi \left\{ \int_\lambda^\infty \eta(s) ds \right\} (\lambda^\gamma - \bar{p}) d_\lambda f(x, \lambda) dx = -\vartheta \int_{\mathbb{R}^4} \psi \eta d_\lambda (\lambda \mathcal{M}(x, \lambda)) dx \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (G(\varrho_n) - G'(\varrho_n) \varrho_n) \operatorname{div} \mathbf{u}_n \psi dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \mathbf{u} f(x, \lambda) \lambda \eta'(\lambda) \psi dx + \int_{\mathbb{R}^4} \psi \eta'(\lambda) (\lambda \mathcal{M}(x, \lambda)) dx d\lambda. \end{aligned}$$

Подстановка этого соотношения в (5.9) приводит к интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^4} f \mathbf{V} \cdot \nabla_{x, \lambda} (\eta \psi) dx d\lambda + \alpha \int_{\mathbb{R}^4} (a\lambda - h) (\eta \psi) d_\lambda f dx + \int_{\mathbb{R}^4} (\psi \eta') (\lambda \mathcal{M}) dx d\lambda = 0,$$

которое в силу произвольности ψ и η равносильно уравнению (5.6). Лемма 5.2 доказана.

Следующий шаг – ренормализация кинетического уравнения. Введем в рассмотрение функцию

$$\Psi(f) := f(1 - f). \quad (5.11)$$

Следующее утверждение дает уравнение для $\Psi(f)$.

ТЕОРЕМА 5.2. *В условиях теоремы 5.1 функция $\Psi(f)$ удовлетворяет уравнению*

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_{x, \lambda} (\Psi \mathbf{V}) + 2\lambda \mathfrak{M} \partial_\lambda f - \partial_\lambda (\Psi'(f) \lambda \mathfrak{M}) \\ &+ \alpha \partial_\lambda ((h - \lambda a) \Psi(f)) + \alpha \Psi(f) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где функция $\mathfrak{M}$ определена равенством

$$\mathfrak{M}(x, \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \lambda+0} \mathcal{M}(s) + \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \lambda-0} \mathcal{M}(s). \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Техническая трудность доказательства теоремы связана с интегрированием разрывных функций по мере Стильтеса. Следующая лемма призвана облегчить эту задачу.

ЛЕММА 5.3. *Если функция $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, то для произвольной функции $\chi \in C_0(\mathbb{R})$ выполняется соотношение*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\chi[g]_{,k}]_{,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [\chi g]_{,k} = \chi \tilde{g}, \quad \text{где} \quad \tilde{g}(\lambda) = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \lambda+0} g(s) + \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \lambda-0} g(s).$$

Кроме того, для любой функции $F \in C^1(\mathbb{R})$ функция $F'(\tilde{g})$ интегрируема по мере Стильтеса $d_\lambda g(\lambda)$ и выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\lambda) F'(\tilde{g}(\lambda)) d_\lambda g = \int_{\mathbb{R}} \chi(\lambda) d_\lambda F(g(\lambda)).$$

В частности, функция $\mathfrak{M}$, определенная формулой (5.13), суммируема в $\mathbb{R}^3$ по мере $d_\lambda f(x, \lambda) dx$. Напомним, что оператор усреднения $[\cdot]_{,k}$ определен формулой (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Второе следует из первого. Далее заметим, что для почти каждого $x \in \mathbb{R}^3$ функция $\mathfrak{M}(x, \cdot)$ служит поточечным пределом последовательности непрерывных функций $[\mathcal{M}(x, \cdot)]_k$ и, следовательно, измерима по любой мере Бореля. Остается заметить, что неотрицательная функция $\mathcal{M}$ имеет интегрируемую мажоранту $\bar{p}$, не зависящую от λ .

Вернемся к доказательству теоремы. Применяя операторы усреднения (2.5), (2.6) к уравнению (5.6), получим равенство

$$\operatorname{div}([f]_{m,k} \mathbf{V}) + \partial_\lambda [\lambda \mathcal{M}]_{m,k} + \alpha[(h - \lambda a) \partial_\lambda f]_{m,k} = I^{m,k},$$

в котором $I^{m,k}$ обозначает коммутатор $\operatorname{div}([f]_{m,k} \mathbf{V}) - \operatorname{div}[f \mathbf{V}]_{m,k}$. Умножая обе части (5.1) на $\Psi'([f]_{m,k})$ и замечая, что дивергенция векторного поля $\mathbf{V}$ равна нулю, придем к соотношению

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Psi([f]_{m,k}) \mathbf{V}) + \Psi'([f]_{m,k}) \partial_\lambda [\lambda \mathcal{M}]_{m,k} \\ + \alpha \Psi'([f]_{m,k}) [(h - \lambda a) \partial_\lambda f]_{m,k} = \Psi'([f]_{m,k}) I^{m,k}. \end{aligned}$$

Умножая обе части этого соотношения на тестовую функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, получим интегральное тождество

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^4} \Psi([f]_{m,k}) \mathbf{V} \cdot \nabla_{x,\lambda} \zeta dx d\lambda + 2 \int_{\mathbb{R}^4} \zeta [\lambda \mathcal{M}]_{m,k} \partial_\lambda [f]_{m,k} dx d\lambda \\ - \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\lambda \zeta \Psi'([f]_{m,k}) [\lambda \mathcal{M}]_{m,k} dx d\lambda \\ + \alpha \int_{\mathbb{R}^4} \zeta \Psi'([f]_{m,k}) [(h - a\lambda) \partial_\lambda f]_{m,k} dx d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} \zeta \Psi'([f]_{m,k}) I^{m,k} dx d\lambda. \end{aligned}$$

Нашей основной задачей является предельный переход в этом соотношении. С этой целью заметим, что неотрицательная функция $\mathcal{M}$ обращается в нуль вне цилиндра $\Omega \times \mathbb{R}^+$, в котором она допускает мажоранту $\mathcal{M} \leq \bar{p}$. Отсюда и

из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла вытекает сходимость последовательности $[\lambda \mathcal{M}]_{m,k}$ к функции $\lambda \mathcal{M}$ в пространстве $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4)$ при $m, k \rightarrow \infty$. Отсюда и из леммы 2.4 находим

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^4} \Psi(f) \mathbf{V} \cdot \nabla_{x,\lambda} \zeta \, dx \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\lambda \zeta \Psi'(f) \lambda \mathcal{M} \, dx \, d\lambda \\ & + \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} \zeta [\lambda \mathcal{M}]_{m,k} \partial_\lambda [f]_{m,k} \, dx \, d\lambda \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\mathbb{R}^4} \zeta \Psi'([f]_{m,k}) [(h - a\lambda) \partial_\lambda f]_{m,k} \, dx \, d\lambda \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Осталось найти предел в левой части этого соотношения. Заметим, что для любого фиксированного k функция $\partial_\lambda [f]_{m,k}$ обладает ограниченными производными любого порядка по переменной λ , функция $\mathcal{M} \leq \bar{p}(x)$ принадлежит классу $L^1(\mathbb{R}^4)$ и

$$[\lambda \mathcal{M}]_{m,k} \rightarrow [\lambda \mathcal{M}]_{,k} \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4) \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^4} \zeta [\lambda \mathcal{M}]_{m,k} \partial_\lambda [f]_{m,k} \, dx \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} \zeta [\lambda \mathcal{M}]_{,k} \partial_\lambda [f]_{,k} \, d\lambda \right) dx.$$

Для любого фиксированного x функция $\zeta [\lambda \mathcal{M}]_{,k}(x, \cdot)$ финитна и бесконечно дифференцируема по λ и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta [\lambda \mathcal{M}]_{,k} \partial_\lambda [f]_{,k} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} [\zeta [\lambda \mathcal{M}]_{,k}]_{,k} \, d_\lambda f(x, \lambda).$$

Функции $[\eta [\lambda \mathcal{M}]_{,k}]_{,k}(x, \cdot)$ имеют интегрируемую мажоранту

$$|[\eta [\lambda \mathcal{M}]_{,k}]_{,k}(x, \cdot)| \leq \bar{p}(x) \sup_{\lambda} \eta(\lambda) \sup_{\sup \eta} \{\lambda\}$$

и при фиксированном x сходятся всюду на числовой оси к функции $\eta \lambda \mathfrak{M}(x, \cdot)$. Отсюда и из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла заключаем, что для почти каждого $x \in \mathbb{R}^3$ выполняется соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \zeta [\lambda \mathcal{M}]_{,k} \partial_\lambda [f]_{,k}(x, \lambda) \, d_\lambda f(x, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \zeta \lambda \mathfrak{M} \, d_\lambda f(x, \lambda).$$

Повторно применяя теорему Лебега и привлекая теорему Фубини, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^4} \zeta [\lambda \mathcal{M}]_{m,k} \partial_\lambda [f]_{m,k} \, dx \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} \zeta \lambda \mathfrak{M} \, d_\lambda f(x, \lambda) \, dx. \quad (5.15)$$

Далее заметим, что при фиксированном k функции $\zeta [(h - a\lambda) \partial_\lambda f]_{,k}$ непрерывны по λ и ограничены в $L^2(\mathbb{R}^4)$, что вместе с тождеством $\Psi'([f]_{,k}) = [\Psi'(f)]_{,k}$ влечет соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^4} \zeta \Psi'([f]_{m,k}) [(h - a\lambda) \partial_\lambda f]_{m,k} \, dx \, d\lambda \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} (h - a\lambda) [\zeta \Psi'(f)]_{,k} \, d_\lambda f \right) dx. \end{aligned}$$

Для почти каждого x функции $(h - a)[\zeta[\Psi'(f)]_{,k}]_{,k}(x, \cdot)$ переменной λ имеют суммируемую мажоранту вида $c(|a| + |h|) \sup_{\text{supp } \zeta} |\lambda|$ и сходятся на числовой оси к функции $(h - a)\zeta\Psi'(\hat{f})(x, \cdot)$. Применяя теорему Лебега и привлекая лемму 5.3, окончательно получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^4} \zeta\Psi'([f]_{m,k})[(h - a\lambda)\partial_\lambda f]_{m,k} dx d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} \zeta(h - a\lambda) d_\lambda \Psi(f) dx. \quad (5.16)$$

Остается заметить, что подстановка (5.15) и (5.16) в (5.14) приводит к интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\mathbb{R}^4} \zeta \lambda \mathfrak{M} d_\lambda f(x, \lambda) dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^4} \zeta a \Psi(f) dx d\lambda \\ &= - \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\lambda \zeta \Psi'(f) \lambda \mathcal{M} dx d\lambda + \alpha \int_{\mathbb{R}^4} \partial_\lambda \zeta (h - a\lambda) \Psi(f) dx d\lambda \\ &+ \int_{\mathbb{R}^4} \Psi(f) \mathbf{V} \cdot \nabla_{x,\lambda} \zeta dx d\lambda, \end{aligned} \quad (5.17)$$

равносильному уравнению (5.12). Теорема 5.2 доказана.

5.2. Мера дефекта осцилляций. Согласно леммам 5.1 и 2.1, для доказательства теоремы 5.1 достаточно установить, что функция распределения f удовлетворяет равенству $\Psi(f) = 0$. Первый шаг в этом направлении – доказательство квадратичной суммируемости Ψ . Этот результат является непосредственным следствием теории меры дефекта осцилляций, развитой в [4]. Напомним, что для любого множества $K \subset \mathbb{R}^3$ r -мера дефекта осцилляций последовательности ρ_n определяется равенством

$$\text{osc}_r[\rho_n \rightarrow \rho](K) := \sup_{k \geq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_k(\rho_n) - T_k(\rho)\|_{L^r(K)}^r,$$

в котором $T_k(z) = kT(z/k)$, $T(z)$ – вогнутая функция, равная z при $z \leq 1$ и принимающая постоянное значение при $z \geq 3$. Без ограничения общности можно считать, что $T_k(z) = \min\{z, k\}$. Конечность γ -меры дефекта осцилляций вытекает из ограниченности полной энергии. Неожиданный результат был получен в статьях [4], [5], где была установлена конечность $(1+\gamma)$ -меры дефекта осцилляций для последовательности решений уравнений динамики вязкого газа. Следующее утверждение можно рассматривать как одно из следствий общей теории. Выберем произвольно функцию $\vartheta \in C(\Omega)$ и положим $\mathcal{T}_\vartheta(x) = \overline{\min\{\varrho, \vartheta\}}(x) - \min\{\varrho(x), \vartheta(x)\}$.

ЛЕММА 5.4. *Предположим, что последовательности ϱ_n и $\mathbf{u}$ удовлетворяют условиям (A) и (D). Тогда для любых $\vartheta \in C(\Omega)$ и $K \Subset \Omega$ выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{T}_\vartheta\|_{L^{1+\gamma}(K)}^{1+\gamma} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\min\{\varrho_n(x), \vartheta(x)\} - \min\{\varrho(x), \vartheta(x)\}|^{1+\gamma} dx \leq c,$$

в котором постоянная c не зависит от выбора ϑ и K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этих неравенств имитирует доказательство леммы 4.3 из [5]. Первое из неравенств очевидно. Для доказательства второго выберем неотрицательную функцию $h \in C_0(\Omega)$, равную 1 на компакте K , и заметим, что $\overline{\varrho^\gamma} \geq \varrho^\gamma$ и $\min\{\varrho, \vartheta\} \leq \min\{\varrho, \vartheta\}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h |\min\{\varrho_n, \vartheta\} - \min\{\varrho, \vartheta\}|^{1+\gamma} dx \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h (\min\{\varrho_n, \vartheta\} - \min\{\varrho, \vartheta\}) (\varrho_n^\gamma - \varrho^\gamma) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (\overline{\varrho^\gamma} - \varrho^\gamma) (\min\{\varrho, \vartheta\} - \overline{\min\{\varrho, \vartheta\}}) dx \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h (\varrho_n^\gamma \min\{\varrho_n, \vartheta\} - \overline{\varrho^\gamma} \overline{\min\{\varrho, \vartheta\}}) dx. \end{aligned}$$

Согласно условию **(D)**, с точностью до множителя ϑ правая часть этого неравенства совпадает с

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h (\min\{\varrho_n, \vartheta\} \operatorname{div} \mathbf{u}_n - \overline{\min\{\varrho, \vartheta\}} \operatorname{div} \mathbf{u}) dx \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h (\min\{\varrho_n, \vartheta\} - \min\{\varrho, \vartheta\}) \operatorname{div} \mathbf{u}_n dx \\ & \quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h (\min\{\varrho_n, \vartheta\} - \min\{\varrho, \vartheta\}) \operatorname{div} \mathbf{u} dx \\ & \leq \delta \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h |\min\{\varrho_n, \vartheta\} - \min\{\varrho, \vartheta\}|^{1+\gamma} dx \\ & \quad + \delta^{-\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h (|\operatorname{div} \mathbf{u}_n| + |\operatorname{div} \mathbf{u}|)^{(1+\gamma)/\gamma} dx. \end{aligned}$$

Выбирая δ достаточно малым, приходим к нужной оценке. Лемма 5.4 доказана.

Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве теоремы 5.1. Введем в рассмотрение функции

$$\mathfrak{V}_\lambda = \overline{\min\{\varrho, \lambda\} \operatorname{div} \mathbf{u}} - \overline{\min\{\varrho, \lambda\}} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \mathfrak{H}(x) = \int_{[0, \infty)} f(x, s) (1 - f(x, s)) ds. \quad (5.18)$$

ЛЕММА 5.5. В условиях теоремы 5.1 существует не зависящая от λ постоянная c такая, что

$$\|\mathfrak{H}\|_{L^{1+\gamma}(\mathbb{R}^3)} \leq c, \quad \sup_{\lambda} \|\mathfrak{V}_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq c. \quad (5.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{V}_\lambda = 0$ вне Ω . Поэтому достаточно показать, что для любого компакта $K \Subset \Omega$ выполняются неравенства

$$\|\mathfrak{H}\|_{L^{1+\gamma}(K)} \leq c, \quad \sup_{\lambda} \|\mathfrak{V}_\lambda\|_{L^1(K)} \leq c \quad (5.20)$$

с постоянной c , не зависящей от K . С этой целью заметим, что, согласно лемме 5.1,

$$\mathcal{T}_\vartheta(x) = \int_{[0, \infty)} \min\{\lambda, \vartheta(x)\} d_\lambda f(x, \lambda) - \min\left\{\int_{[0, \infty)} \lambda d_\lambda f(x, \lambda), \vartheta(x)\right\}. \quad (5.21)$$

Отсюда и из равенства (5.4) получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\vartheta(x) &= \int_0^{\vartheta(x)} f(x, s) ds, & \text{если } \vartheta(x) \geq \rho(x), \\ \mathcal{T}_\vartheta(x) &= \int_{\vartheta(x)}^\infty (1 - f(x, s)) ds & \text{иначе.}\end{aligned}\tag{5.22}$$

Выберем последовательность непрерывных функций $\{\vartheta_k\}_{k \geq 1}$, сходящуюся при $k \rightarrow \infty$ к ϱ почти всюду в Ω . Согласно лемме 5.4, $L^{1+\gamma}(K)$ -нормы функций $\mathcal{T}_{\vartheta_k}$ ограничены постоянной, не зависящей от k и K . Более того, $\mathcal{T}_{\vartheta_k}$ сходятся почти всюду в K к функции

$$\mathcal{T}_\varrho(x) = \int_0^{\varrho(x)} f(x, s) ds = \int_{\varrho(x)}^\infty (1 - f(x, s)) ds,$$

что влечет оценку $\|\mathcal{T}_\varrho\|_{L^{1+\gamma}(K)} \leq c$, где постоянная c не зависит от K . Остается заметить, что оценка (5.20) для $\mathfrak{H}$ очевидным образом вытекает из неравенства $\mathfrak{H} \leq 2\mathcal{T}_\varrho$. Для оценки $\mathfrak{V}_\lambda$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_\lambda &= w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} ((\min\{\varrho_n, \lambda\} - \min\{\varrho, \lambda\}) \operatorname{div} \mathbf{u}_n) \\ &\quad - (w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{\varrho_n, \lambda\} - \min\{\varrho, \lambda\}) \operatorname{div} \mathbf{u},\end{aligned}$$

которое влечет за собой неравенство

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{V}_\lambda\|_{L^1(K)} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|\operatorname{div} \mathbf{u}_n\|_{L^2(K)} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(K)}) \\ &\quad \times \|\min\{\varrho_n(x), \lambda\} - \min\{\varrho(x), \lambda\}\|_{L^2(K)}.\end{aligned}$$

Отсюда, из леммы 5.4 и ограниченности последовательности $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ вытекает оценка (5.20) для $\mathfrak{V}_\lambda$. Лемма 5.5 доказана.

5.3. Свойства функции $\mathcal{M}$. Следующая лемма показывает, что равенство $\mathfrak{M} = 0$ влечет за собой утверждение теоремы 5.1.

ЛЕММА 5.6. *В условиях теоремы 5.1 для почти каждого $x \in \mathbb{R}^3$ функция $\mathcal{M}(x, \cdot)$ неотрицательна и обращается в нуль на $\mathbb{R}^-$. Более того, если функция $\mathfrak{M}(x, \cdot)$ обращается в нуль $d_\lambda f(x, \cdot)$ -почти всюду на интервале $(\bar{p}(x)^{1/\gamma}, \infty)$ то $d_\lambda f(x, \cdot)$ является мерой Дирака, сосредоточенной в точке $\bar{p}(x)^{1/\gamma}$. Для любой функции $g \in C_0^\infty(0, \infty)$ выполняется тождество*

$$\int_{\mathbb{R}_\lambda} g(\lambda) \mathcal{M}(x, \lambda) d\lambda = - \int_{[0, \infty)} g'(\lambda) \mathfrak{V}_\lambda(x) d\lambda, \tag{5.23}$$

где $\mathfrak{V}_\lambda$ определена формулой (5.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\omega = \bar{p}(x)^{1/\gamma}$. Согласно формуле (5.7), функция $\mathcal{M}(x, \cdot)$ не убывает при $\lambda < \omega$, не возрастает при $\lambda > \omega$, равна нулю при $\lambda < 0$ и стремится к нулю при неограниченном возрастании λ . Следовательно, она неотрицательна. Напомним, что (см. доказательство леммы 5.3) функция $[\mathfrak{M}]_{,k}(x, \lambda)$ измерима по любой мере Бореля. Если $\mathfrak{M}(x, \alpha) = 0$ для некоторого $\alpha > \omega$, то $\mathfrak{M}(x, \lambda) = 0$ и $f(x, \lambda) = 1$ для всех (α, ∞) . Предположим, что $\mathfrak{M}(x, \cdot)$

равна нулю $d_\lambda f(x, \cdot)$ -почти всюду на интервале (ω, ∞) , и рассмотрим множество

$$\mathcal{O} = \left\{ \alpha > \omega : \lim_{s \rightarrow \alpha-0} f(x, s) - \lim_{s \rightarrow \omega+0} f(x, s) = 0 \right\}.$$

Покажем, что множество $\mathcal{O} = (\omega, \infty)$. Если оно пусто, то найдется последовательность точек $\lambda_k \searrow \omega$, в которых $\mathfrak{M}(x, \lambda_k) = 0$. Отсюда немедленно вытекает, что $f(x, \cdot) = 1$ на интервале (ω, ∞) и $\mathcal{O} = (\omega, \infty)$. Следовательно, $\mathcal{O} \neq \emptyset$. Если $m = \sup \mathcal{O} < \infty$, то найдется последовательность нулей функции $\mathfrak{M}(x, \cdot)$, сходящаяся к m , что влечет равенство $f(x, \cdot) = 1$ на интервале (m, ∞) . По определению $f(x, \lambda) = c = \text{const}$ на интервале (ω, m) . Другими словами, мера $d_\lambda f(x, \cdot)$ на интервале (ω, ∞) совпадает с одноатомной мерой $(1 - c)\delta(\cdot - m)$ и, как следствие, $\mathfrak{M}(x, m) = 0$. Отсюда и из формулы (5.7) находим, что $\mathfrak{M}(x, m) = 2^{-1}(1 - c)(m^\gamma - \omega^\gamma) = 0$ и $c = 1$. Значит, $f(x, \cdot) = 1$ на интервале (ω, ∞) . Привлекая равенство $\omega^\gamma = \bar{p}(x)$ и соотношение (5.7), приходим к неравенству

$$\vartheta \mathcal{M}(x, 0) = \int_{[0, \omega]} (\lambda^\gamma - \omega^\gamma) d_\lambda f(x, \lambda) \geq 0,$$

из которого следует, что $d_\lambda f(x, \lambda)$ является мерой Дирака, сосредоточенной в ω . Для доказательства соотношения (5.23) воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} -\vartheta \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \mathcal{M}(x, \lambda) d\lambda &= \int_{[0, \infty)} g'(s) \left(\int_{[0, s)} d\lambda \int_{[\lambda, \infty)} (t^\gamma - \bar{p}) dt f(x, t) \right) ds \\ &= \int_{[0, \infty)} g'(s) \left(\int_{[0, \infty)} \min\{t, s\} (t^\gamma - \bar{p}) dt f(x, t) \right) ds \\ &= \int_{[0, \infty)} g'(s) (\overline{\min\{s, \lambda\} p} - \overline{\min\{s, \lambda\} \bar{p}}) ds. \end{aligned}$$

Согласно условию (D) $\overline{\min\{s, \lambda\} p} - \overline{\min\{s, \lambda\} \bar{p}} = \vartheta \mathfrak{V}_\lambda(x)$. Лемма 5.6 доказана.

5.4. Доказательство теоремы 5.1. Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы. Оно проводится путем анализа ренормализованной формы (5.12) кинетического уравнения (5.6). Прежде всего заметим, что все члены уравнения (5.12) обращаются в нуль вне цилиндра $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Поэтому интегральное тождество (5.17) остается верным при подстановке любой бесконечно дифференцируемой функции $\zeta = \eta(\lambda)$, равной нулю в окрестности $+\infty$.

Положим $\eta(\lambda) = \int_\lambda^\infty \theta(s - t) ds$, где θ – ядро оператора усреднения, определенное соотношениями (2.4), а t – произвольное число из интервала $(2, \infty)$. Заметим, что η' обращается в нуль вне интервала $[t - 1, t + 1]$ и $\eta(\lambda) = 1$ на интервале $(-\infty, t - 1)$. Подставляя η в интегральное тождество (5.17) и замечая, что $h, a \geq 0$, $\eta' \leq 0$, придем к неравенству

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^3 \times (-\infty, t]} \eta \lambda \mathfrak{M} d_\lambda f(x, \lambda) dx &\leq -(t + 1) \int_{\mathbb{R}^4} \eta' \mathcal{M} dx d\lambda \\ &\quad - (t + 1) \int_{\mathbb{R}^4} \eta' \Psi(f) (\alpha(a + h) + |\operatorname{div} \mathbf{u}|) dx d\lambda. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Из тождества (5.23) получаем представление для первого интеграла в правой части этого неравенства

$$-\int_{\mathbb{R}^4} \eta'(\lambda) \mathcal{M}(x, \lambda) dx d\lambda = \int_{[0, \infty)} \eta''(\lambda) \wp_1(\lambda) d\lambda, \quad \text{где} \quad \wp_1(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{V}_\lambda(x) dx.$$

Второй интеграл допускает аналогичное представление

$$-\int_{\mathbb{R}^4} \eta' \Psi(f)(\alpha(a+h) + |\operatorname{div} \mathbf{u}|) dx = \int_{[0, \infty)} \eta''(\lambda) \wp_2(\lambda) d\lambda,$$

$$\wp_2(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^3} (\alpha(a+h) + |\operatorname{div} \mathbf{u}|) \left\{ \int_0^\lambda \Psi(f(x, s)) ds \right\} dx.$$

Используя эти соотношения, перепишем неравенство (5.24) в виде

$$2 \int_{\mathbb{R}^3 \times (-\infty, t]} \eta \lambda \mathfrak{M} d_\lambda f(x, \lambda) dx \leq (1+t) \int_{[1, \infty)} \eta''(\lambda) \wp(\lambda) d\lambda, \quad (5.25)$$

где $\wp = \wp_1 + \wp_2$. Покажем, что функция $\wp$ ограничена на положительной полуоси. Прежде всего заметим, что по лемме 5.5 $|\wp_1(\lambda)| \leq \|\mathfrak{V}_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq c$.

С другой стороны, очевидное неравенство $\int_0^\lambda \Psi(f(x, s)) ds \leq \mathfrak{H}(x)$ вместе с леммой 5.5 влекут за собой оценку

$$|\wp_2(\lambda)| \leq c \| |\operatorname{div} \mathbf{u}| + a + h \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathfrak{H}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq c, \quad (5.26)$$

из которой следует равномерная ограниченность $\wp$.

С учетом выражения для $\eta(\lambda)$ неравенство (5.25) может быть записано в виде

$$2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{[0, t-1)} \lambda \mathfrak{M} d_\lambda f(x, \lambda) \right) dx \leq (1+t) \frac{d}{dt} (\theta * \wp)(t). \quad (5.27)$$

Так как гладкая функция $(\theta * \wp)(t)$ равномерно ограничена на положительной полуоси, найдется последовательность $t_k \rightarrow \infty$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k + 1)(\theta * \wp)'(t_k) \leq 0$. Подставляя $t = t_k$ в (5.27) и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \int_{[0, \infty)} \lambda \mathfrak{M} d_\lambda f(x, \lambda) \right\} dx = 0.$$

Следовательно, для почти каждого x функция $\mathcal{M}(x, \cdot)$ равна нулю $d_\lambda f(x, \lambda)$ -почти всюду на интервале $(0, \infty)$. Привлекая лемму 5.6, получаем, что почти всюду в $\mathbb{R}^4$ выполняется равенство $f(1-f) = 0$, которое влечет сильную сходимость последовательности ϱ_n . Теорема 5.1 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 1.1

В заключение мы покажем, что разрешимость краевой задачи (1.1) является следствием теорем 3.2, 5.1 и леммы 4.1. Мы будем считать доказанным,

см. [10] и [6], существование обобщенных решений $(\mathbf{u}, \varrho) \in H_0^{1,2}(\Omega) \times L^\gamma(\Omega)$ релаксированных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha a \varrho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla(\varrho^\gamma) &= \varrho \mathbf{f} + \mathbf{g} + \operatorname{div} \Pi, \\ \alpha a \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) &= \alpha h \end{aligned} \quad (6.1)$$

с коэффициентами $\alpha = \operatorname{const} > 0$, $a = d(x)^{-s}$, $h = \mathcal{M} / \operatorname{meas} \Omega$. Эти решения удовлетворяют соотношению нормировки (1.1e) и энергетическому неравенству

$$\alpha \int_{\Omega} a \varrho^\gamma dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} a \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \|\mathbf{u}\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 \leq c \left(\int_{\Omega} \varrho |u| dx + 1 \right), \quad (6.2)$$

которое влечет за собой оценку

$$\alpha^2 \int_{\Omega} a \varrho^\gamma dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\Omega} a \varrho |\mathbf{u}|^2 dx + c \alpha \|\mathbf{u}\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 \leq c \quad (6.3)$$

с постоянной c , зависящей только от $\|\mathbf{f}\|_{C(\Omega)}$, $\|\mathbf{g}\|_{C(\Omega)}$, γ , Ω и $\mathbf{M}$. Выберем произвольно последовательность $\alpha_n \rightarrow 0$ и обозначим через $(\mathbf{u}_n, \varrho_n)$ соответствующие решения уравнений (6.1). Заметим, что они удовлетворяют уравнениям (3.1) с правыми частями $\mathbf{F}_n = \varrho_n \mathbf{f} + \varrho_n \mathbf{g} - \alpha_n \varrho_n \mathbf{u}_n$. В силу неравенства (6.3)

$$\|\mathbf{F}_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c \mathbf{M} + c + \alpha \mathbf{M}^{1/2} \left(\int_{\Omega} \varrho_n |\mathbf{u}_n|^2 dx \right)^{1/2} \leq c.$$

Следовательно, последовательность $(\mathbf{u}_n, \varrho_n)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.2, что влечет ограниченность этой последовательности в пространстве $H_0^{1,2}(\Omega) \times L^\gamma(\Omega)$. Более того, для любого компакта $\Omega' \Subset \Omega$ выполняются неравенства

$$\|\varrho_n |\mathbf{u}_n|^2\|_{L^\sigma(\Omega')} + \|\varrho_n^\gamma\|_{L^\sigma(\Omega')} \leq c(\Omega')$$

с показателем $\sigma > 1$ и постоянной c , не зависящей от n . Тем самым последовательность решений релаксированной задачи содержит подпоследовательность, удовлетворяющую всем условиям леммы 4.1 и условиям теоремы 5.1. Из этой теоремы вытекает сильная сходимость ϱ_n в пространстве $L_{\operatorname{loc}}^{\sigma\gamma}(\Omega)$. Предельный переход в уравнениях (6.1) завершает доказательство.

Список литературы

- [1] P.-L. Lions, “Compacité des solutions des équations de Navier–Stokes compressibles isentropiques”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.*, **317**:1 (1993), 115–120.
- [2] P.-L. Lions, “Bornes sur la densité pour les équations de Navier–Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.*, **328**:8 (1999), 659–662.
- [3] E. Feireisl, Š. Matušů-Nečasová, H. Petzeltová, I. Straškraba, “On the motion of a viscous compressible fluid driven by a time-periodic external force”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **149**:1 (1999), 69–96.
- [4] E. Feireisl, “On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier–Stokes equations when the density is not square integrable”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **42**:1 (2001), 83–98.
- [5] E. Feireisl, A. H. Novotný, H. Petzeltová, “On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **3**:4 (2001), 358–392.

- [6] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid dynamics. Vol. 2. Compressible models*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **10**, Oxford Univ. Press, New York, 1998.
- [7] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **26**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.
- [8] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **27**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.
- [9] P.-L. Lions, “On some challenging problems in nonlinear partial differential equations”, *Mathematics: frontiers and perspectives*, ed. V. Arnold et al., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 121–135.
- [10] P. I. Plotnikov, J. Sokolowski, “Concentrations of solutions to time-discretized compressible Navier–Stokes equations”, *Comm. Math. Phys.*, **258**:3 (2005), 567–608.
- [11] J. Frehse, S. Goj, M. Steinhauer, “ L^p -estimates for the Navier–Stokes equations for steady compressible flow”, *Manuscripta Math.*, **116**:3 (2005), 265–275.
- [12] R. J. DiPerna, A. J. Majda, “Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **40**:3 (1987), 301–345.
- [13] L. Tartar, “Compensated compactness and applications to partial differential equations”, *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot–Watt symposium*, vol. 4 (Edinburgh, 1979), Res. Notes in Math., **39**, Pitman, Boston, 1979, 136–212.
- [14] J. M. Ball, “A version of the fundamental theorem for Young measures”, *PDEs and continuum models of phase transitions* (Nice, France, 1988), Lecture Notes in Phys., **344**, Springer, Berlin, 1989, 207–215.
- [15] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Růžička, *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs*, Appl. Math. Math. Comput., **13**, Chapman and Hall, London, 1996.
- [16] P. Pedregal, *Parametrized measures and variational principles*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **30**, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [17] D. Adams, “On the existence of capacitary strong type estimates in R^n ”, *Ark. Mat.*, **14**:1 (1976), 125–140.
- [18] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz'ja, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [19] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **314**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [20] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces”, *Invent. Math.*, **98**:3 (1989), 511–547.
- [21] L. Ambrosio, F. Bouchut, C. De Lilles, “Well-posedness for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions”, *Comm. Partial Differential Equations*, **29**:9–10 (2004), 1635–1651.
- [22] P. I. Plotnikov, J. Sokolowski, “Domain dependence of solutions to compressible Navier–Stokes equations”, *SIAM J. Control Optim.*, **45**:4 (2006), 1165–1197.

П. И. Плотников (P. I. Plotnikov)

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

E-mail: plotnikov@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию

31.01.2007

Ж. Соколовски (J. Sokolowski)

Institut Elie Cartan

Laboratoire de Mathématiques

Université Henri Poincaré, France

E-mail: Jan.Sokolowski@iecn.u-nancy.fr