Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О новой мультипликативной функции, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm63>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 03:55:41

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О НОВОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФУНКЦИИ

М. А. КОРОЛЕВ

При оценках коротких сумм Клоостермана была введена функция Архипова $\alpha_k(n)$ и получена асимптотическая формула для ее сумматорной функции $A_k(x) = \sum_{n \leq x} \alpha_k(n)$ (см. [1]). В настоящей заметке изложены результаты для функции $\alpha_{k,m}(n)$, которая является обобщением $\alpha_k(n)$.

По определению, $\alpha_{k,m}(n)$ — число решений следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \cdots x_k = n, \\ n \equiv 0 \pmod{x_1^m, x_2^m, \dots, x_k^m}, \end{cases}$$

где символом $[a, b, \dots, c]$ обозначается наименьшее общее кратное чисел $a, b, \dots, c$. Функция Архипова $\alpha_k(n)$ получается из $\alpha_{k,m}(n)$ как частный случай при $m = 2$.

ТЕОРЕМА 1. 1) Функция $\alpha_{k,m}$ — мультипликативная. 2) $\alpha_{k,1}(n) = \tau_k(n)$ и при любых натуральных k и m

$$\alpha_{k,m}(n) \leq \tau_k(n).$$

3) Если p — простое, β — натуральное, то

$$\alpha_{k,m}(p^\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta < m \text{ или } k < m, \\ \sum_{r=0}^{R(\beta,m)} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{k-1+\beta-r(\beta_1+1)}{k-1}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\beta_1 = [\beta/m]$, $R(\beta, m) = [\beta/(\beta_1 + 1)]$.

При натуральном числе l и $\operatorname{Re} s > 1$ определим ряд Дирихле $F_{k,m,l}(s)$, отвечающий последовательности $\alpha_{k,m}^l(n)$:

$$F_{k,m,l}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k,m}^l(n) n^{-s}.$$

Так как $0 \leq \alpha_{k,m}(n) \leq \tau_k(n)$, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — любое.

ТЕОРЕМА 2. При $\operatorname{Re} s = \sigma > \frac{1}{m+1}$ справедливо равенство

$$F_{k,m,l}(s) = (\zeta(ms))^K \Phi(s),$$

где $K = \binom{k}{m}^l$, а Φ – голоморфная в рассматриваемой полуплоскости функция, причем для $|\Phi(s)|$ выполняется оценка:

$$|\Phi(s)| \leq c \sigma \left(\sigma - \frac{1}{m+1} \right)^{-(2k)^l(m+1)},$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k, m, l .

Пусть x – действительное число, k, m, l – натуральные, $k \geq m \geq 1, l \geq 1$. Положим

$$A(x; k, m, l) = \sum_{1 \leq n \leq x} \alpha_{k,m}^l(n).$$

ТЕОРЕМА 3. При $x \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$A(x; k, m, l) = x^{\frac{1}{m}} P_{k-1}(\log x) + \theta a_1 x^{\frac{1}{m} - a_2 K^{-2/3}} (\log x)^K,$$

где $K = \binom{k}{m}^l$, $P_{K-1}(u)$ – многочлен от u степени не выше $K-1$, $|\theta| \leq 1$, $a_1 > 0$ – постоянная, зависящая от k, m, l , $a_2 = (2ma)^{-2}$, $a > 0$ – абсолютная постоянная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карацуба А. А. // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 93–102.

Принято редколлегией
03.06.1998