Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Зеленова, О конечной порожденности некоторых коммутативных подалгебр алгебры квантовых многочленов, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm630>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:11:59

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ
СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА
О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ КОММУТАТИВНЫХ
ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ КВАНТОВЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

С. А. ЗЕЛЕНОВА

Одна из проблем теории квантовых алгебр [1] касается конечной порожденности максимальных коммутативных подалгебр в квантовых алгебрах. В настоящей работе доказано, что максимальная коммутативная подалгебра алгебры квантовых многочленов, порожденная мономами, конечно порождена. Кроме того, доказано, что центр алгебры квантовых многочленов порождается конечным числом мономов.

Напомним, что алгеброй квантовых многочленов называется ассоциативная алгебра

$$\Lambda = k_Q[X_1, \dots, X_n]$$

над полем k , порожденная n элементами $X_1, \dots, X_n$, с определяющими соотношениями $X_i X_j = q_{ij} X_j X_i$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, здесь $Q = (q_{ij}) \in \text{Mat}(n, k)$, причем $q_{ii} = 1$, $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$.

Для каждого элемента этой алгебры определена норма – элемент $\mathbb{Z}^n$ (см., например, [2]).

Пусть G – некоторая подгруппа группы $\mathbb{Z}^n$. Рассмотрим ее подполугруппу $S = G \cap \mathbb{N}_0^n$. Элементы полугруппы S будем представлять в виде кортежей неотрицательных чисел.

ЛЕММА 1. *Полугруппа S конечно порождена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ведется индукцией по n . Строится ряд полугрупп $S_0, S_1, \dots$, где S_0 обозначает полугруппу всех кортежей из S , последний элемент у которых равен 0. Если определены $S_0, \dots, S_{l-1}$, то S_l – полугруппа, порожденная S_{l-1} и элементом $s_l = (\dots, a)$, где a – минимальное неотрицательное число такое, что $s_l \in S$, но $s_l \notin S_{l-1}$. Далее показывается, что ряд $S_0, S_1, \dots$ конечен, т.е. $S = S_l$ для некоторого l . Далее, поскольку по индуктивному предположению S_0 конечно порождена, то и S конечно порождена.

Рассмотрим алгебру квантовых полиномов $k_Q[X_1, \dots, X_n]$. Пусть M_U – множество взаимно коммутирующих мономов из $k_Q[X_1, \dots, X_n]$, коммутирующих с данным множеством многочленов $U \subset k_Q[X_1, \dots, X_n]$.

ЛЕММА 2. *Множество M_U конечно порождено как мультипликативная полугруппа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вложение $k_Q[X_1, \dots, X_n]$ в алгебру квантовых лорановских многочленов $\mathcal{L}_Q = k_Q[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$.

Обозначим через M'_U множество взаимно коммутирующих мономов из $\mathcal{L}_Q$, коммутирующих со всеми многочленами из U . Множество M'_U является мультипликативной группой, поэтому множество норм элементов M'_U является подгруппой G группы $\mathbb{Z}^n$, а множество норм M_U является полугруппой $S = G \cap \mathbb{N}_0^n$.

Требуемое утверждение следует из изоморфизма $S \cong M_U$ и леммы 1.

ТЕОРЕМА 1. *Любая максимальная коммутативная подалгебра A алгебры квантовых полиномов $k_Q[X_1, \dots, X_n]$, порожденная некоторым подмножеством мономиального базиса алгебры $k_Q[X_1, \dots, X_n]$, конечно порождена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу своей максимальности алгебра A содержит множество M_A , определенное выше. Поскольку A порождается множеством мономов, то A порождается M_A , откуда в силу предыдущей леммы следует искомое.

ЛЕММА 3. *Пусть многочлен $f = \sum_{i=1}^s \alpha_i t_i$ коммутирует с мономом m (здесь t_i — элементы мономиального базиса). Тогда $[m_i, m] = 0$ для любого $i = 1, \dots, s$.*

ТЕОРЕМА 2. *Центр Z алгебры квантовых полиномов $k_Q[X_1, \dots, X_n]$ порождается конечным числом мономов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \sum \alpha_i t_i$ — элемент центра Z . Так как f лежит в центре, то f коммутирует с любым мономом m , т.е. в силу предыдущей леммы $[m_i, m] = 0$ для всех i . Но это означает, что все t_i лежат в центре, т.е. центр Z порождается мономами. Множество мономов, лежащих в Z , совпадает с множеством $M_{k_Q[X_1, \dots, X_n]}$. Отсюда и из леммы 2 вытекает искомое утверждение.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю признательность В. А. Артамонову за постановку задач и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on Algebraic Quantum Groups. Basel: Birkhäuser, 2002. (Adv. Courses Math. CRM Barcelona.) [2] С. А. Зеленова // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 3. С. 55–64.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.03.2003