Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, С. А. Богатый, Д. Реповш, Дополнение $Q_E(n)$ к точке евклидова пространства Eucl в компакте Банаха–Мазура $Q(n)$ есть Q -многообразие, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:56:16

**ДОПОЛНЕНИЕ $Q_E(n)$ К ТОЧКЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА Eucl
В КОМПАКТЕ БАНАХА–МАЗУРА $Q(n)$ ЕСТЬ Q -МНОГООБРАЗИЕ**

С. М. АГЕЕВ, С. А. БОГАТЫЙ, Д. РЕПОВШ

Задача определения топологического типа компакта Банаха–Мазура $Q(n)$ возникла в польской школе геометрической теории банаховых пространств и стала широко известна в топологических кругах после публикации Вэста [1; с. 544]. Недавно был достигнут существенный прогресс в изучении топологии пространств $Q(n)$. В 1996 г. Фабел доказал [2], что компакт $Q(2)$ является абсолютным экстензором, и в том же году было показано [3], [4], что все компакты $Q(n)$ являются абсолютными экстензорами ($Q(n) \in \text{AE}$). Наконец, в [5] (кратко в [6]) было получено отрицательное решение проблемы о гомеоморфности $Q(n)$ и гильбертова куба Q (см. также [7]):

ТЕОРЕМА 1. $Q(2)$ и Q не гомеоморфны.

Ключевая идея доказательства теоремы 1 заключается в установлении гомотопической нетривиальности $Q(2) \setminus \{\text{Eucl}\}$, где $\{\text{Eucl}\} \in Q(n)$ есть евклидова точка, которой соответствует изометрический класс стандартного n -мерного евклидова пространства. В свою очередь, это есть следствие нетривиальности 4-мерной группы когомологий $H^4(Q(2) \setminus \{\text{Eucl}\}, \mathbb{Q})$ с рациональными коэффициентами. В [5; с. 7] и [6] была впервые установлена связь между компактами Банаха–Мазура и теорией Смита периодических гомеоморфизмов. В [8] исследование $Q(2)$ было продолжено и было доказано, что $Q(2)$ есть одноточечная компактификация Q -многообразия, что, в свою очередь, с помощью теоремы 1 влекло его неоднородность. Естественная проблема о структуре $Q(n)$, $n > 2$, была сведена к правдоподобной гипотезе из выпуклой геометрии. Оказывается, и в общем случае справедлива

ТЕОРЕМА 2. $Q_E(n) = Q(n) \setminus \{\text{Eucl}\}$ есть Q -многообразие.

Компактом Банаха–Мазура называется пространство $Q(n)$ всех изометрических классов n -мерных банаховых пространств (см. [8] и [7] для детального ознакомления с топологией компакта Банаха–Мазура). Этот компакт допускает представление как фактор-пространство пространства $C(n)$ всех компактных выпуклых центрально-симметричных (относительно нуля) тел в $\mathbb{R}^n$. Пространство $C(n)$ с метрикой Хаусдорфа может быть снабжено действием общей линейной группы $\text{GL}(n) \times C(n) \rightarrow C(n)$, $T \cdot V = T(V)$, где $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in \text{GL}(n)$ и $V \in C(n)$. Орбитное пространство $C(n)/\text{GL}(n)$ естественно гомеоморфно компактному Банаха–Мазура.

Известная теорема Джона [9] утверждает, что для любого выпуклого тела $V \in C(n)$ существует единственный эллипсоид $E_V \in C(n)$ (называемый *эллипсоидом Левнера*), который содержит V и имеет минимальный евклидов объем. Из минимальности $\text{vol } E_V$ следует $\text{GL}(n)$ -инвариантность E_V , т.е. $E_{T \cdot V} = T \cdot E_V$ для любого $T \in \text{GL}(n)$. Непрерывная зависимость E_V от V относительно метрики Хаусдорфа доказана в [4]. Поэтому орбитное пространство $Q(n) = C(n)/\text{GL}(n)$ гомеоморфно $L(n)/O(n)$, где $L(n)$ состоит из $V \in C(n)$, чей эллипсоид Левнера совпадает с единичным шаром B^n [4]. При этом $Q_E(n) = L_E(n)/O(n)$, где $L_E(n) = L(n) \setminus \{B^n\}$. Следовательно, теорема 2 сводится к следующей.

ТЕОРЕМА 3. $L_E(n)/O(n)$ есть Q -многообразие.

Так как в силу [4] $Q(n) \in \text{AE}$, то $L(n)/O(n) \in \text{AE}$, и поэтому $L_E(n)/O(n) \in \text{ANE}$. Далее доказательство теоремы 3 (и, следовательно, теоремы 2) сводится с помощью характеризационного критерия Торунчика [10] к следующему факту.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $\delta > 0$ существуют $O(n)$ -отображения $f_i: L_E(n) \rightarrow L_E(n)$, $i \in \{1, 2\}$, такие, что $\text{dist}(f_i, \text{Id}_{L_E(n)}) < \delta$ и $\text{Im } f_1 \cap \text{Im } f_2 = \emptyset$.

В свою очередь, искомые отображения получаются из следующих двух гомотопий, в которых дизъюнктность образов достигается за счет различного характера множеств экстремальных

Первый автор был поддержан грантом NSERC № OGP005616. Второй автор был поддержан грантом РФФИ № 00-01-00289. Третий автор был поддержан грантом MESS № 0101-509.

точек. Точка a выпуклого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ называется *экстремальной*, если $V \setminus \{a\}$ является выпуклым. Множество $\text{Extr}(V)$ всех экстремальных точек V лежит в относительной границе $\text{rbd} V$ и V совпадает с выпуклой оболочкой множества своих экстремальных точек $\text{Conv}(\text{Extr}(V))$. Если $\text{Extr}(V) = \text{rbd}(V)$, то V называется *эллиптически выпуклым*, в противном случае V не является эллиптически выпуклым.

ТЕОРЕМА 5. Существует $O(n)$ -гомотопия $H: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n)$ такая, что:

- (a) $H_0 = \text{Id}$;
- (b) если $V \in L(n)$ и $t \in [0, 1]$, то $H_t(V) = B^n$ тогда и только тогда, когда $V = B^n$;
- (c) $H_t(V)$ является эллиптически выпуклым для любых $V \in L(n)$ и $t > 0$.

ТЕОРЕМА 6. Существует $O(n)$ -гомотопия $F: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n)$ такая, что:

- (d) $F_0 = \text{Id}$; и
- (e) $F_t(V)$ не является эллиптически выпуклым для любых $V \in L_E(n)$ и $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5 получается конструктивно. Пусть $\Psi: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ определено формулой $\Psi(x, t) = \Psi_t(x) = (1+t)x/(1+t \cdot \|x\|) \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что для любого $t \in (0, 1]$

- (1) Ψ_t есть непрерывное $O(n)$ -вложение;
- (2) $V \subseteq \Psi_t(V) \subseteq B^n$, поэтому $\Psi_t(V) \in L^n$ для всякого $V \in L(n)$;
- (3) если для $V \in L(n)$ $\Psi_t(V) = B^n$, то $V = B^n$; и
- (4) множество $\Psi_t(V)$ является эллиптически выпуклым телом для всякого $V \in L(n)$ [11; с. 95].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 получается с помощью эквивариантного разбиения единицы, подчиненного эквивариантному покрытию дополнения Z к множеству $A = L(n) \times \{0\} \cup \{B^n\} \times [0, 1]$ в пространстве $X = L(n) \times [0, 1]$, построенного в работе [8]. Здесь приходится элементу ν покрытия ставить в соответствие не эллиптически выпуклое множество, а далее корректно определенное непрерывное отображение получается усреднением по Минковскому по разбиению единицы и ретракцией $C(n)$ на $L(n)$, задаваемой эллипсоидом Левнера [4]. При этом сумма Минковского, а поэтому и ее аффинный образ также оказываются не эллиптически выпуклыми компактными выпуклыми телами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. van Mill, G. M. Reed (Eds.). Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. [2] P. Fabel // Borsuk–Kuratowski Session. Warsaw, 1996. P. 5. [3] S. Ageev, S. Bogatyĭ, P. Fabel // 9-th Tiraspol Symposium on General Topology and its Applications / ed. P. Osmatescu. Chisinau: Tehnica, 1996. P. 20–22. [4] С. М. Агеев, С. А. Богатый, П. Фабел // Вестник МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1998. № 1. С. 11–13. [5] С. М. Агеев, С. А. Богатый. The Banach–Mazur compactum in the dimension two // Topology Atlas Preprint. № 291, 1997. [6] С. М. Агеев, С. А. Богатый // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 209–210. [7] D. Repovš // Štirikaiseikenkyūsho Kōkyūroku. 1999. V. 1074. P. 89–101. [8] S. M. Ageev, D. Repovš // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 2000. V. 69. № 3. P. 316–335. [9] F. John // Studies and essays, presented to R. Courant on his 60-th birthday. New York, 1948. P. 187–204. [10] H. Toruńczyk // Fund. Math. 1980. V. 106. P. 31–40. [11] С. Bessaga, A. Pelczyński. Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology. Warszawa: PWN, 1975.

Брестский государственный университет, Белоруссия;
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
 Люблянский университет, Словения
E-mail: ageev_sergei@yahoo.com; bogatyĭ@mech.math.msu.su;
 dusan.repovs@uni-lj.si

Принято редколлегией
 24.03.2003