Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина, Коммутирующие дифференциальные многомерные операторы третьего порядка, задающие КдФ-иерархию, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:18:31

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ЗАДАЮЩИЕ КДФ-ИЕРАРХИЮ

В. М. БУХШТАБЕР, С. Ю. ШОРИНА

Пусть u — дифференцируемая функция от $x = t_0, t_1, t_2, \dots$. Положим $\partial_k = \partial/\partial t_k$, $k = 0, 1, \dots$. Иерархия КДФ задается последовательностью уравнений $\partial_k u = \mathcal{R}^k(u')$, где $\mathcal{R} = \frac{1}{4}\partial_x^2 - \frac{1}{2}u'\partial_x^{-1} - u$. Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x . Введем градуировку: $\deg u = 2$ и $\deg \partial_k = 2k + 1$. Для оператора Шрёдингера $\mathcal{L} = \partial_x^2 - u$ существует последовательность операторов $A_k = A_k(u) = \partial_x^{2k+1} + \sum_{i=0}^{2k} P_i \partial_x^i$, где P_i — полиномы от $u, u', \dots$ с постоянными коэффициентами, однозначно определяемые условиями, что коммутатор $[\mathcal{L}, A_k]$ есть оператор умножения на функцию, а P_i однородные полиномы степени $2i + 1$ от градуированных переменных (см. [1]). Положим $A = A_g + \sum_{i=0}^{g-1} a_i A_i$, где $a_i = \text{const}$. За счет сдвига функции u на константу мы далее без ограничения общности будем считать, что $a_{g-1} = 0$. Условие $[\mathcal{L}, A] = 0$ приводит к g -му стационарному уравнению КДФ (уравнению Новикова) на функцию u (см. [2]). Результаты настоящей работы опираются на разложение $A = \mathcal{U}_0 \mathcal{L}^{g-1} + \mathcal{U}_1 \mathcal{L}^{g-2} + \dots + \mathcal{U}_{g-1}$, где $\{\mathcal{U}_i\}$ — семейство коммутирующих дифференциальных многомерных операторов третьего порядка, каждый из которых коммутирует с оператором $\mathcal{L}$ (теорема 2). Эти операторы были получены при изучении свойств $\wp$ -функции Клейна из [3]; они принадлежат классу многомерных n -алгебраических операторов, изученных в [4].

Пусть $u_0 = u, u_1, \dots, u_{g-1}$ — последовательность функций от $x, t_1, \dots, t_{g-1}$. Положим $\mathcal{A}_k = \partial_x^2 \partial_k - \frac{1}{2}(u \partial_k + \partial_k u) - \frac{1}{4}(u_k \partial_x + \partial_x u_k)$, где $k = 0, 1, \dots, g-1$. Отметим, что $\mathcal{A}_0$ совпадает с A -оператором пары Лакса классического уравнения КДФ.

ЛЕММА 1. Коммутатор $[\mathcal{L}, \mathcal{A}_k]$ является оператором умножения на функцию тогда и только тогда, когда $u'_k = \partial_k u$, при этом $[\mathcal{L}, \mathcal{A}_k] = \frac{1}{2}(u''_k - 2u' u_k - 4u u'_k)$.

Положим $\mathcal{U}_i = \mathcal{A}_i - \partial_{i+1}$ для $i < g-1$ и $\mathcal{U}_{g-1} = \mathcal{A}_{g-1}$.

ЛЕММА 2. Условие $[\mathcal{L}, \mathcal{U}_k] = 0$ эквивалентно условиям

$$\partial_{k+1} u = u'_{k+1} = \frac{1}{4}(u'''_k - 2u' u_k - 4u u'_k), \quad k = 0, \dots, g-2; \quad u'''_{g-1} - 2u' u_{g-1} - 4u u'_{g-1} = 0. \quad (1)$$

ЛЕММА 3. Функции u_i удовлетворяют (1) тогда и только тогда, когда они связаны соотношениями $\partial_{i+1} u = \mathcal{R}(u'_i) = \mathcal{R}^i(u')$. В частности, $\mathcal{R}^g(u') = 0$.

Таким образом, если функции u_i удовлетворяют (1), то u дает решение иерархии КДФ, а u_k , $k > 0$, определены с точностью до слагаемого, не зависящего от x . Пусть $\mathbf{u}(\xi) = \sum_{i=1}^g u_{i-1} \xi^i$.

ЛЕММА 4. Функции u_i удовлетворяют условиям (1) тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{u}'''(\xi) + 2u'(2 - \mathbf{u}(\xi)) - 4(\xi^{-1} + u) \mathbf{u}'(\xi) = 0. \quad (2)$$

ЛЕММА 5. Условия коммутативности $[\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j] = 0$ имеют место тогда и только тогда, когда функции $\{u_i\}$ удовлетворяют условиям (1) и следующим условиям:

$$\partial_i u_k = \partial_k u_i, \quad u'_k u_i - u'_i u_k + 2\partial_{i+1} u_k - 2\partial_{k+1} u_i = 0, \quad 0 \leq i, k < g. \quad (3)$$

В пространстве лорановских рядов от ξ введем операторы D_k при помощи соотношения $D_k(\dots + f_0 + f_1 \xi + f_2 \xi^2 + \dots) = \frac{1}{2}(\dots + f_0 \xi^{-k} + \dots + f_k)$.

ЛЕММА 6. Условия (3) равносильны уравнениям: $\partial_{k+1} \mathbf{u}(\xi) = \xi^{-1} \partial_k \mathbf{u}(\xi) - \frac{1}{2} u_k \mathbf{u}'(\xi) - \frac{1}{2} u'_k (2 - \mathbf{u}(\xi))$, из которых вытекает, что

$$\partial_k \mathbf{u}(\xi) = D_k(2 - \mathbf{u}(\xi)) \mathbf{u}'(\xi) - D_k(\mathbf{u}'(\xi))(2 - \mathbf{u}(\xi)). \quad (4)$$

Положим

$$\mu(\xi) = \frac{1}{4}(\mathbf{u}'(\xi))^2 + 2\mathbf{u}''(\xi)(2 - \mathbf{u}(\xi)) + 4(\xi^{-1} + \mathbf{u})(2 - \mathbf{u}(\xi))^2. \quad (5)$$

ЛЕММА 7. Функция $\mathbf{u}(\xi)$ удовлетворяет уравнениям (2) и (4) тогда и только тогда, когда $\mu(\xi) = 4\xi^{-1} + \sum_{i=1}^{2g} \mu_i \xi^i$, где все μ_i — константы.

Полагая $u_k = 0$ при $k \geq g$, получаем из (5), что $u_k = \frac{1}{4}\mu_k + J_k(u, u', u'', \dots, u_{k-1}, u'_{k-1}, u''_{k-1})$ для всех $k = 1, \dots, 2g$, где J_k — полиномы. Отметим, что условие $J'_g = 0$ приводит к g -му стационарному уравнению КдФ, а при $k > g$ условия $J_k = -\frac{1}{4}\mu_k$ приводят к интегралам высших КдФ (см. [5]).

ТЕОРЕМА 1. Следующие условия эквивалентны:

- (1) функция u является решением g -го стационарного уравнения КдФ;
- (2) для функции u определены функции $u, u_1, \dots, u_{g-1}$, задающие семейство коммутирующих операторов $\mathcal{L}, \mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_{g-1}$;
- (3) функции $u, u_1, \dots, u_{g-1}$ и константы $\mu_1, \dots, \mu_{2g}$ удовлетворяют уравнению (5).

ЛЕММА 8. Коммутирующие операторы $\mathcal{L}, \mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_{g-1}$ связаны соотношением

$$4(\mathcal{U}_0 \mathcal{L}^{g-1} + \mathcal{U}_1 \mathcal{L}^{g-2} + \dots + \mathcal{U}_{g-2} \mathcal{L} + \mathcal{U}_{g-1})^2 = 4\mathcal{L}^{2g+1} + \mu_1 \mathcal{L}^{2g-1} + \mu_2 \mathcal{L}^{2g-2} + \dots + \mu_{2g}.$$

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 для $A = A_g + \sum_{i=0}^{g-2} a_i A_i$ имеем $A = \mathcal{U}_0 \mathcal{L}^{g-1} + \mathcal{U}_1 \mathcal{L}^{g-2} + \dots + \mathcal{U}_{g-1}$ и $\mu_k = 8a_{g-k-1} + 4 \sum_{i=1}^{k-2} a_{g-i-1} a_{g-k+i}$, $k = 1, \dots, g-1$.

Пусть $V = \{(E, \alpha_0, \dots, \alpha_{g-1}) \in \mathbb{C}^{g+1} \mid \exists \Psi = \Psi(x, t_1, \dots, t_{g-1}): \mathcal{L}\Psi = E\Psi, \mathcal{U}_i \Psi = \alpha_i \Psi\}$ и $\Gamma = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid \eta^2 = \mu(\xi)\}$.

ТЕОРЕМА 3. Имеет место векторное расслоение $\pi: V \rightarrow \Gamma$ со слоем $\mathbb{C}^{g-1}$ такое, что $\pi(E, \alpha_0, \dots, \alpha_{g-1}) = (\xi(E), 2\alpha(\xi(E)))$, где $\xi(E) = E^{-1}$ и $\alpha(\xi) = \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i \xi^{i+1}$.

Для $F = F(x, t_1, \dots, t_{g-1}; \xi)$, где $\partial_i F = \frac{D_i(2 - \mathbf{u}(\xi))}{2 - \mathbf{u}(\xi)}$, положим

$$\Phi = \Phi(x, t_1, \dots, t_{g-1}; \xi, \alpha_0, \dots, \alpha_{g-1}) = \sqrt{2 - \mathbf{u}(\xi)} \exp(2\alpha(\xi)F) \exp\left(-2 \sum_{i=1}^{g-1} D_i(\alpha(\xi))t_i\right).$$

ТЕОРЕМА 4. (1) $\mathcal{U}_k \Phi = \alpha_k \Phi$, $k = 0, \dots, g-1$.

(2) Φ является собственной функцией оператора $\mathcal{L}$ с собственным значением E тогда и только тогда, когда $\{\xi, 2\alpha(\xi)\} \in \Gamma$, где $\xi = E^{-1}$.

(3) Φ определяется функцией u и точкой на многообразии V однозначно с точностью до умножения на константу.

Авторы выражают благодарность С. П. Новикову, И. М. Кричеверу и П. Г. Гриневичу за стимулирующее обсуждение результатов этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. D. Lax // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490. [2] С. П. Новиков // Функци. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №3. С. 54–66. [3] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. №2. P. 3–125. [4] И. М. Кричевер // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 183–208. [5] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
14.05.2003