Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гайфуллин, Нервы групп Кокстера, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:59:14

НЕРВЫ ГРУПП КОКСТЕРА

А. А. ГАЙФУЛЛИН

Системой Кокстера называется пара (W, S) , где $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ — конечное множество, W — группа, задаваемая системой образующих S и соотношениями $s_i^2 = 1, i = 1, \dots, m, (s_i s_j)^{n_{ij}} = 1, j = 1, \dots, m, i \neq j$, где $n_{ij} \in \{2, 3, \dots, \infty\}, n_{ij} = n_{ji}$ ($n_{ij} = \infty$ означает отсутствие соответствующего соотношения). Группа W , имеющая такую систему образующих, называется *группой Кокстера*. Система Кокстера (W, S) называется конечной, если группа W конечна. Для любого подмножества $B \subset S$ обозначим через W_B подгруппу группы W , порожденную образующими из множества B .

Нервом системы Кокстера (W, S) называется симплициальный комплекс $N(W, S)$ на множестве вершин S , симплексы которого задаются множествами σ такими, что группа W_σ конечна.

Целью этой статьи является описание систем Кокстера, нервы которых являются псевдомногообразиями или горенштейновыми* комплексами и одновременно обладают довольно высокой степенью смежности (определения см. ниже, а детали в [1]).

Симплициальный комплекс L размерности n называется *горенштейновым**, если $H_*(\text{Lk } \sigma) = H_*(S^{n - \dim \sigma - 1})$ для любого $\sigma \in L$ (мы полагаем, что $\text{Lk } \emptyset = L$ и $\dim \emptyset = -1$). Симплициальный комплекс L называется *k-смежностным*, если любое подмножество из не более чем k его вершин задает симплекс этого комплекса. *Графом Кокстера* системы Кокстера (W, S) называется граф $\Gamma(W, S)$ на множестве вершин S , в котором вершины s_i и s_j ($i \neq j$) соединены $(n_{ij} - 2)$ ребрами (в графе допускаются кратные ребра, но не может быть ребер, у которых совпадают начало и конец).

ТЕОРЕМА 1. *Нерв системы Кокстера (W, S) является 5-смежностным псевдомногообразием тогда и только тогда, когда система (W, S) представляется в виде прямого произведения конечного числа систем Кокстера таких, что граф Кокстера каждой из них имеет не менее 6 вершин и совпадает с одним из графов, изображенных на рис. 1, а–ж.*

ТЕОРЕМА 2. *Нерв системы Кокстера (W, S) является 4-смежностным горенштейновым* комплексом тогда и только тогда, когда система (W, S) представляется в виде прямого произведения конечного числа систем Кокстера таких, что граф Кокстера каждой из них имеет не менее 5 вершин и совпадает с одним из графов, изображенных на рис. 1.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Нерв системы Кокстера (W, S) является 9-смежностным комплексом тогда и только тогда, когда система (W, S) представляется в виде прямого произведения конечного числа систем Кокстера таких, что граф Кокстера каждой из них либо имеет не менее 10 вершин и изоморфен одному из графов, изображенных на рис. 1, а–г, либо изоморфен графу Кокстера конечной системы Кокстера.

Список всех связных графов, являющихся графами Кокстера конечных систем Кокстера, приведен в [2]. Система Кокстера конечна тогда и только тогда, когда ее граф Кокстера является несвязным объединением графов из этого списка. Графы, изображенные на рис. 1, а–о, — в точности все связные графы, имеющие не менее 5 вершин, не изоморфные графам Кокстера конечных систем Кокстера, но такие, что все их собственные полные подграфы изоморфны графам Кокстера конечных систем Кокстера. Поэтому нервы систем Кокстера с графами Кокстера, изображенными на рис. 1, а–о, изоморфны границам симплексов. Легко проверить, что нерв системы Кокстера с графом Кокстера, изображенным на рис. 1, п, изоморфен комплексу $\partial \Delta^4 * \partial \Delta^4$.

Пусть N — нерв системы Кокстера с графом Кокстера, изображенным на рис. 1, р. Тогда N — 4-смежностный комплекс, не являющийся соединением нескольких границ симплексов, но изоморфный границе 9-мерного выпуклого симплициального многогранника с 12 вершинами. Например, можно взять многогранник с вершинами $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\dots$, $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(2, 2, 5, 4, 5, 9, 3, 4, 4)$, $(3, 4, 4, 2, 2, 5, 4, 5, 9)$, $(4, 5, 9, 3, 4, 4, 2, 2, 5)$.

Нерв прямого произведения систем Кокстера изоморфен соединению их нервов. Таким образом, из теорем 1 и 2 получаем:

СЛЕДСТВИЕ 1. 5-смежностное псевдомногообразие является нервом какой-нибудь системы Кокстера тогда и только тогда, когда оно является соединением нескольких границ симплексов.

СЛЕДСТВИЕ 2. 4-смежностный горенштейнов* комплекс является нервом некоторой системы Кокстера тогда и только тогда, когда он является соединением нескольких комплексов, каждый из которых изоморфен либо границе симплекса, либо комплексу N . В частности, любой такой комплекс изоморфен границе выпуклого симплицеального многогранника.

Пусть система Кокстера (W, S) является прямым произведением систем Кокстера с графами Кокстера, изображенными на рис. 1. Тогда ее граф Кокстера $\Gamma(W, S)$ – несвязное объединение графов, изображенных на рис. 1. Обозначим через $k_j(W, S)$ количество компонент связности графа $\Gamma(W, S)$, имеющих ровно j вершин и изоморфных одному из графов на рис. 1, а–о, через $k_{10}^*(W, S)$ и $k_{12}^*(W, S)$ – количества компонент связности графа $\Gamma(W, S)$, изоморфных графам на рис. 1, п, и на рис. 1, р, соответственно.

ТЕОРЕМА 3. Две системы Кокстера (W, S) и (W', S') , каждая из которых является прямым произведением нескольких систем Кокстера с графами Кокстера, изображенными на рис. 1, имеют изоморфные нервы тогда и только тогда, когда $k_j(W, S) = k_j(W', S')$, $j \geq 6$, $k_5(W, S) + 2k_{10}^*(W, S) = k_5(W', S') + 2k_{10}^*(W', S')$ и $k_{12}^*(W, S) = k_{12}^*(W', S')$.

Я благодарен моему научному руководителю В. М. Бухштаберу за постоянное внимание к моей работе, а также Н. Э. Добринской, Т. Е. Панову и Г. И. Шарыгину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // УМН. 2000. Т. 55. № 5. С. 3–106. [2] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.