Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, Асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности в бесконечности и инъективность погружений римановых многообразий, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:48:31

АСИМПТОТИКА ДОПУСТИМОГО РОСТА КОЭФФИЦИЕНТА КВАЗИКОНФОРМНОСТИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ И ИНЪЕКТИВНОСТЬ ПОГРУЖЕНИЙ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. А. Зорич

1. Введение. Локально обратимое квазиконформное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально. Это утверждение было сформулировано М. А. Лаврентьевым [1] для $n = 3$ и позднее доказано в работе [2].

Затем оно было развито в нескольких направлениях (см. обзор [3]), и, в частности, в [4] была указана в определенном смысле точная асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности на бесконечности, при которой еще можно гарантировать глобальную обратимость произвольного погружения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Переход от погружений евклидова пространства к общему случаю погружений римановых многообразий [5], [6] и анализ доказательства в [2] стимулировали появление следующей конформно-инвариантной формы исходной теоремы, связанной с асимптотической геометрией и конформной классификацией римановых многообразий [7].

Для глобальной инъективности квазиконформного погружения $f: M^n \rightarrow N^n$ риманова многообразия M^n в односвязное риманово многообразие N^n при $n > 2$ достаточно, чтобы многообразие M^n имело конформно-параболический тип.

В настоящей заметке мы показываем, как выглядит асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности в такой общей теореме о глобальной инъективности для погружений римановых многообразий конформно-параболического типа. (О конформном типе многообразия см., например, в [7], [8].)

Напомним [8], что достаточным признаком конформной параболичности полного риманова некомпактного многообразия M^n является, например, расходимость интеграла $\int^\infty S^{\frac{1}{1-n}}$, где $S = S(r)$ — площадь $((n-1)$ -мера) сферы радиуса r с фиксированным центром $o \in M^n$.

Это непосредственно вытекает из следующей полезной (и используемой ниже) оценки конформной емкости конденсатора $R_{r_0}^{r_1}$, ограниченного сферами радиусов r_0 и r_1 (см. [8]–[10]):

$$\text{cap } R_{r_0}^{r_1} \leq \left(\int_{r_0}^{r_1} S^{\frac{1}{1-n}} \right)^{1-n}.$$

2. Формулировка основного результата. Говоря о коэффициенте квазиконформности отображения в какой-то области, мы имеем в виду верхнюю грань линейных искажений по всем точкам этой области. Линейное искажение в точке измеряется отношением наибольшего растяжения к наименьшему. (Мы не останавливаемся на подробной формулировке этого определения в терминах верхнего и нижнего пределов; оно пригодно и для негладкого отображения.)

Пусть $k(r)$ — коэффициент квазиконформности погружения $f: M^n \rightarrow N^n$ на шаре радиуса r с фиксированным центром $o \in M^n$. Если отображение f квазиконформно, то функция $k(r)$ ограничена. В общем же случае величина $k(r)$ может неограниченно расти с ростом r . Следующая теорема дает асимптотику допустимого роста функции $k(r)$, при котором погружение $f: M^n \rightarrow N^n$ все еще глобально инъективно.

ТЕОРЕМА. Пусть M^n и N^n — римановы многообразия размерности $n > 2$, причем N^n односвязно, а M^n — полное и имеет конформно-параболический тип. Если погружение $f: M^n \rightarrow N^n$ таково, что

$$\int^\infty \frac{dr}{(k S^{\frac{1}{n-1}})(r)} = \infty,$$

то f инъективно и хаусдорфова размерность множества $N^n \setminus f(M^n)$ равна нулю.

В частности, если $M^n = \mathbb{R}^n$, то $S(r) \asymp r^{n-1}$, и мы получаем результат работы [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01291).

3. Схема доказательства. В принципе здесь можно ограничиться одним коротким указанием: следуя идее работы [4], проводим аналогичную последовательность рассуждений, заменяя в нужных местах специальную оценку емкости сферического конденсатора в $\mathbb{R}^n$ приведенной выше общей оценкой величины $\text{cap } R_{r_0}^{r_1}$ на римановом многообразии M^n (см. [11]).

4. Комментарий. Еще Адамар [12], рассматривая локально обратимое отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заметил, что оно глобально обратимо тогда и только тогда, когда $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Это условие, очевидно, равносильно тому, что отображение f собственное (прообраз компакта — компакт), т.е. f — накрытие над односвязным многообразием и, значит, — гомеоморфизм.

Конечно, это рассуждение и условия Адамара остаются в силе при рассмотрении погружения $f: M^n \rightarrow N^n$ любого многообразия в односвязное многообразие той же размерности.

Доказательство глобальной обратимости отображений того или иного класса, например квазиконформных в проблеме М. А. Лаврентьева или полиномиальных в еще открытой проблеме якобиана, в некотором роде сводится, хотя, разумеется, не буквально, к проверке условия Адамара.

В форме, удобной для применения к квазиконформным отображениям, условие Адамара можно сформулировать следующим образом.

Пусть Γ_∞ — семейство всех путей на M^n , уходящих в бесконечность, и пусть $\text{mod } f(\Gamma_\infty)$ — конформный модуль его образа при погружении $f: M^n \rightarrow N^n$. Если M^n — многообразие конформно-параболического типа, то $\text{mod } \Gamma_\infty = 0$. В этом случае при $n > 2$ условие Адамара равносильно тому, что $\text{mod } f(\Gamma_\infty) = 0$.

Если отображение f квазиконформно, то образ любого исключительного семейства, в том числе семейства Γ_∞ , является исключительным. Приведенное в сформулированной выше теореме условие на допустимый рост функции $k(r)$ как раз обеспечивает нужное равенство $\text{mod } f(\Gamma_\infty) = 0$, если $\text{mod } \Gamma_\infty = 0$.

Точность указанной в теореме асимптотики подтверждается примером, построенным в работе [4].

Отметим в заключение, что мы рассматривали здесь погружения многообразий конформно-параболического типа. Однако есть основания считать, что глобальная обратимость квазиконформных погружений имеется и в гораздо более общей ситуации. Модельной тут может служить сформулированная в [3] задача затирания отрезка. Можно сказать, что по отношению к ней мы пока умеем устранивать только точку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Лаврентьев // Докл. АН СССР. 1938. Т. 20. С. 241–242. [2] В. А. Зорич // Матем. сб. 1967. Т. 74. №3. С. 417–433. [3] V. A. Zorich // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1508. P. 132–148. [4] В. А. Зорич // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. №3. С. 530–533. [5] M. Gromov // Ann. of Math. Stud. 1981. V. 97. P. 183–213. [6] M. Gromov (with appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes). Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Boston: Birkhäuser, 1999. [7] В. А. Зорич // Функциональный анализ и его прил. 2000. Т. 34. №3. С. 37–48. [8] В. А. Зорич, В. М. Кесельман // Функциональный анализ и его прил. 1996. Т. 30. №2. С. 40–55. [9] В. Г. Мазья. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. [10] A. Grigor'yan // Oper. Theory Adv. Appl. 1999. V. 109. P. 139–153. [11] V. A. Zorich. Asymptotics of the admissible growth of the coefficient of quasiconformality at infinity and injectivity of immersions of Riemannian manifolds // Preprint. Zürich: ETN, 2002; www.fim.math.ethz.ch/Preprints.cgi/2002. [12] J. Hadamard // Bull. Soc. Math. France. 1906. V. 34. P. 71–84.