Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, Принцип инвариантности для (BL, θ) -зависимого случайного поля, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:33:23

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ (BL, θ)-ЗАВИСИМОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

А. П. ШАШКИН

Цель данного сообщения – доказательство принципа инвариантности для случайного поля, обладающего свойством зависимости, введенным в [1]. Это свойство обобщает понятия ассоциированности и отрицательной зависимости. Для случайных полей, обладающих свойством ассоциированности и близкими ему свойствами, известны различные формы принципа инвариантности, см., например, [2]–[4].

Напомним, что функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, называется липшицевой, если

$$\text{Lip}(f) := \sup_{x \neq y} |f(x) - f(y)| / \|x - y\|_1 < \infty.$$

Здесь $\|z\|_1 = |z_1| + \dots + |z_n|$, $z \in \mathbb{R}^n$. Для конечного множества Q пусть $|Q|$ – его мощность. Множества $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ снабдим нормой $|z| = \max_{i=1, \dots, d} |z_i|$. Введем также для подмножеств $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ соответствующее расстояние между ними $\text{dist}(I, J) = \inf\{|i - j| : i \in I, j \in J\}$. Запись $n \rightarrow \infty$, где $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, означает, что $n_1 \rightarrow \infty, \dots, n_d \rightarrow \infty$. Для $x, y \in \mathbb{R}$, как всегда, $x \wedge y = \min\{x, y\}$. Для $x \in \mathbb{R}$ пусть $[x] = \min\{n \in \mathbb{N} : n \geq x\}$.

Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{N}^d\}$ – действительное центрированное случайное поле такое, что $\text{EX}_j^2 < \infty$ для всех $j \in \mathbb{N}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поле X называется (BL, θ) -зависимым, если существует последовательность $\theta_r \downarrow 0$, $r \in \mathbb{N}$, такая, что для любых конечных непересекающихся множеств $I, J \subset \mathbb{N}^d$ с $\text{dist}(I, J) \geq r$, где $r \in \mathbb{N}$, и ограниченных липшицевых функций $F: \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G: \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|\text{cov}(F(X_i, i \in I), G(X_j, j \in J))| \leq \text{Lip}(F) \text{Lip}(G)(|I| \wedge |J|) \theta_r. \quad (1)$$

Для $W \subset \mathbb{Z}^d$, $|W| < \infty$, положим $S_W = \sum_{j \in W} X_j$. Пусть также U – произвольный целочисленный параллелепипед в $\mathbb{N}^d$ с длинами ребер $l_1, \dots, l_d \in \mathbb{N}$, т.е. $U = V \cap \mathbb{Z}^d$, где $V = (a_1, a_1 + l_1] \times \dots \times (a_d, a_d + l_d]$ и $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Класс таких множеств U обозначим $\mathcal{U}$. В случае, когда $(a_1, \dots, a_d) = (0, \dots, 0)$, $l_i = n_i$, $i = 1, \dots, d$, будем обозначать $S_U = S_n$. Пусть $B^2(U) = \sum_{j \in U} \text{EX}_j^2$ для $U \in \mathcal{U}$.

Функцию $h(x): \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовем медленно колеблющейся, если $h(x) > 0$ при $|x| \geq a > 0$ и

$$\frac{h(sy(s))}{h(sz)} \rightarrow 1, \quad s \rightarrow \infty,$$

для любого $z \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ и любой функции $y(s): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ такой, что $y(s) \rightarrow y \neq 0$ при $s \rightarrow \infty$. Заметим, что это и ряд близких определений обобщают известное понятие медленно меняющейся функции одной переменной (см. [5]).

Введем следующие условия:

$$\theta_r \leq c_0 r^{-\lambda} \quad \text{для некоторых } c_0 > 0, \lambda > 3d \text{ и всех } r \in \mathbb{N}; \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00724).

для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{L}_\varepsilon(U) = B^{-2}(U) \sum_{j \in U} \mathbb{E} X_j^2 I\{|X_j| > \varepsilon B(U)\} \rightarrow 0 \quad \text{при } |U| \rightarrow \infty, \quad B^2(U) > 0; \quad (3)$$

$$DS_n = n_1^{\rho_1} \cdots n_d^{\rho_d} h(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $\rho_i \geq 1$, $i = 1, \dots, d$, а h — медленно колеблющаяся функция d переменных такая, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} h(n) > 0$.

Для $n \in \mathbb{N}^d$ пусть

$$m_{ni}(x) = [n_i x^{1/\rho_i}],$$

где $x \geq 0$, $i = 1, \dots, d$, и $m_n(t) = (m_{n1}(t_1), \dots, m_{nd}(t_d)) \in \mathbb{Z}^d$, $t \in [0, 1]^d$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{N}^d\}$ — введенное выше случайное поле, удовлетворяющее условиям (1)–(4). Тогда случайное поле $W_n(t) = S_{m_n(t)} / \sqrt{DS_n}$, $t \in [0, 1]^d$, сходится по распределению в равномерной топологии при $n \rightarrow \infty$ к d -параметрическому броуновскому движению $W(t)$, $t \in [0, 1]^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для установления плотности семейства $\{W_n(t), n \in \mathbb{N}^d\}$ установлено следующее неравенство, представляющее самостоятельный интерес.

ЛЕММА. Пусть X — случайное поле такое, что выполнены условия теоремы 1 (за исключением, возможно, условия (4)). Тогда семейство случайных величин $\{M_U^2 / (B^2(U) + |U|), U \in \mathcal{U}\}$, где $M_U = \max_{V \subseteq U, V \in \mathcal{U}} |S_V|$, равномерно интегрируемо.

Доказательство этой леммы использует метод урезания исходных величин, условия (1)–(3) и метод рандомизации (см., например, [3]), а также теорему Морица [6].

Из приведенной леммы и условий (1), (2), (4) следует, что любое случайное поле $\{Y(t), t \in [0, 1]^d\}$, являющееся частичным пределом по распределению полей $W_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$, представляет собой поле с независимыми приращениями, траектории которого непрерывны с вероятностью 1. При этом $\mathbb{E} W_n(t) = 0$ и $DW_n(t) = t_1 \cdots t_d$, $t \in [0, 1]^d$. Отсюда аналогично [4] следует утверждение теоремы 1.

Отметим, что в приведенной теореме не требуется наличия моментов выше второго порядка и стационарности поля X , а условие зависимости имеет более общий вид, чем условия ассоциированности или отрицательной зависимости (при соответствующей (2) скорости убывания ковариаций).

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Bulinski, C. Suquet // Statist. Probab. Lett. 2001. V. 54. №2. P. 215–226.
- [2] A. V. Bulinski, M. S. Keane // J. Math. Sci. 1996. V. 81. №5. P. 2905–2911.
- [3] L.-X. Zhang, J. Wen // Statist. Probab. Lett. 2001. V. 53. №3. P. 259–267.
- [4] T.-S. Kim, M.-H. Ko // Honam Math. J. 2002. V. 24. №1. P. 121–130. [5] А. Л. Якимив // Матем. сб. 1981. Т. 115. №3. С. 463–478. [6] F. Moricz // Acta Math. Hungar. 1983. V. 41. №3–4. P. 337–346.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.03.2003