Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Якимова, О классификации пар Гельфанда, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:33:43

О КЛАССИФИКАЦИИ ПАР ГЕЛЬФАНДА

О. С. ЯКИМОВА

Пусть G – вещественная группа Ли, $K \subset G$ – компактная подгруппа и риманово однородное пространство $X = G/K$ связно.

Однородное пространство X называется *коммутативным* или пара (G, K) называется *парой Гельфанда*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) алгебра K -инвариантных мер с компактным носителем на X коммутативна (относительно свертки);
- 2) алгебра G -инвариантных дифференциальных операторов на X коммутативна;
- 3) алгебра G -инвариантных функций на кокасательном расслоении T^*X , полиномиальных на слоях, коммутативна относительно скобки Пуассона.

Эквивалентность первых двух условий доказана в [1], а последних двух – в [2].

Пусть G/K – коммутативное однородное пространство. В работе [3] показано, что тогда имеет место разложение Леви $G = N \ltimes L$, где N – нильпотентная группа, а L – редуктивная подгруппа, содержащая K . Кроме того, выполнены условия

- (a) $[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] = 0$,
- (b) $\mathbb{R}[\mathfrak{n}]^K = \mathbb{R}[\mathfrak{n}]^L$.

Здесь и в дальнейшем $\mathfrak{n} = \text{Lie } N$, $\mathfrak{l} = \text{Lie } L$, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\mathfrak{k} = \text{Lie } K$, а также $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}/\mathfrak{k}$.

В работе [4] доказан простой критерий коммутативности. Приведем его здесь в несколько другой, но эквивалентной формулировке.

ТЕОРЕМА 1. *Однородное пространство $X = G/K$ коммутативно тогда и только тогда, когда выполнены условия (a), (b), а также*

- (c) *для всякого $\gamma \in \mathfrak{n}$ пространство L_γ/K_γ коммутативно;*
- (d) *для всякого $\beta \in \mathfrak{m}$ пространство $(N \ltimes K_\beta)/K_\beta$ коммутативно.*

Пусть P – ядро неэффективности действия $L : \mathfrak{n}$ группы L на пространстве $\mathfrak{n}$. Заметим, что P – нормальная подгруппа групп L и G . Из условия (b) следует, что $L/P \subset \text{O}(\mathfrak{n})$. Следовательно, группа L_γ для любой точки $\gamma \in \mathfrak{n}$ и, в частности, стабилизатор общего положения $L_*(\mathfrak{n})$ действия $L : \mathfrak{n}$ редуктивны. В силу компактности группы K условие (b) равносильно наличию разложения $L = L_*(\mathfrak{n})K$. Разложения редуктивных групп в произведение двух собственных редуктивных подгрупп описаны в работе [4].

Также можно легко проверить, выполнено ли условие (c). Коммутативные однородные пространства редуктивных групп – это в точности вещественные формы сферических аффинных однородных многообразий, классифицированные в работе [6].

Коммутативное однородное пространство $X = (N \ltimes K)/K$ называется пространством гейзенбергова типа, если $L = K$. Пространства этого типа классифицированы в [3] и [7] при следующем дополнительном ограничении: представление группы K в пространстве $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ неприводимо. В [3] также доказано несколько важных теорем, касающихся структуры коммутативных пространств гейзенбергова типа, однако полной классификации пока не существует.

Нас будет интересовать противоположный случай. А именно, начиная с этого момента будем предполагать, что пространство $X = G/K$ удовлетворяет следующему условию:

$$L \neq K \text{ и действие } L : \mathfrak{n} \text{ локально эффективно.} \quad (*)$$

Будем также считать, что пространство $X = G/K$ односвязно. Это ограничение оправдано тем, что однородное пространство, локально изоморфное коммутативному, само коммутативно, см. [3].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть пространство X коммутативно и удовлетворяет условию (*). Тогда каждый некоммутативный простой сомножитель группы K , не равный SU_2 или PSU_2 , содержится в некотором простом сомножителе группы L .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородное пространство G/K называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения $G_1/K_1 \times G_2/K_2$, где $G = G_1 \times G_2$, $K = K_1 \times K_2$.

Так как произведение двух однородных пространств коммутативно тогда и только тогда, когда коммутативно каждое из них, мы будем рассматривать только неприводимые пространства.

Обозначим центры групп L и K через $Z(L)$ и $Z(K)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем коммутативное пространство G/K *главным*, если $Z(K)^0 = Z = (L_1 \cap Z) \times \cdots \times (L_m \cap Z)$, где L_i – простые множители группы L , а также $Z(L)^0 = C = (N_{\text{GL}(V_1)}(L) \cap L) \times \cdots \times (N_{\text{GL}(V_t)}(L) \cap L)$. Здесь V_i – неприводимые L -инвариантные слагаемые пространства $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ и $N_{\text{GL}(V_i)}(L)$ – множество элементов группы $\text{GL}(V_i)$, нормализующих группу L .

Пусть L_i – простой сомножитель группы L , не содержащийся в K и не изоморфный SU_2 или PSU_2 . Обозначим через $\hat{V}$ сумму тех неприводимых L -инвариантных подпространств пространства $\mathfrak{n}$, на которых L_i действует нетривиально. Пусть $\hat{L}$ – максимальная связная подгруппа группы L , действующая на $\hat{V}$ локально эффективно. Положим $\hat{K} = \hat{L} \cap K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Все тройки $(\hat{L}, \hat{K}, \hat{V})$, которые могут возникнуть в результате описанной выше процедуры, перечислены в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

	$\hat{L}$	$\hat{K}$	$\hat{V}$
1a	$(\text{S})\text{U}_{2n}$	$\text{Sp}_n(\times \text{U}_1)$	$\mathbb{C}^{2n}(\oplus \mathbb{R})$
1b	SU_4	U_3	$\mathbb{R}^6$
2a	SO_7	G_2	$\mathbb{R}^7$
2b	Spin_7	SO_6	$\mathbb{R}^8$
3	SO_{2n}	U_n	$\mathbb{R}^{2n}$
4a	$\text{SO}_8 \times \text{SO}_2$	$\text{Spin}_7 \times \text{SO}_2$	$\mathbb{R}^8 \otimes \mathbb{R}^2$
4b	SO_8	Spin_7	$\mathbb{R}^8 \otimes \mathbb{R}^2$
4c	SO_8	Spin_7	$\mathbb{R}^8$
4d	SO_8	$\text{Sp}_2 \times \text{SU}_2$	$\mathbb{R}^8$

Каждой строке таблицы соответствует коммутативное пространство $(\hat{N} \ltimes \hat{L})/\hat{K}$, где $\mathfrak{n} \cong V$ как $\hat{L}$ -модуль и $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = 0$. Первой строке соответствуют шесть различных коммутативных однородных пространств, а именно, $\hat{L}$ может равняться SU_{2n} или U_{2n} , во-втором случае для группы $\hat{K}$ также имеется две возможности: Sp_n и $\text{Sp}_n \times \text{U}_1$; кроме того, независимо $\hat{V}$ может быть либо $\mathbb{C}^{2n}$, либо $\mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{R}$, в первом случае группа N будет коммутативной, а во-втором N есть группа Гейзенберга H_n .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X = G/K$ – главное коммутативное пространство, удовлетворяющее условию (*). Тогда пара (L, K) изоморфна локально прямому произведению пар из таблицы 1, пар вида $(\text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \times \text{SU}_2, \text{SU}_2)$, $(\text{SU}_2 \times \text{SU}_2, \text{SU}_2)$ или $(\text{SU}_2, \text{U}_1)$, и пары (K^1, K^1) , где K^1 – компактная группа Ли. Более того, однородные пространства, соответствующие строкам таблицы 1, выделяются как локально прямые сомножители пространства X .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. G. F. Thomas // Contemp. Math. 1984. V. 26. P. 379–385. [2] Л. Г. Рыбников // Функци. анализ и его прил. 2003. Т. 37. № 2 (в печати). [3] Э. Б. Винберг // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 3–62. [4] О. С. Якимова // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 171–172. [5] А. Л. Онищик // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 199–242. [6] О. С. Якимова // Вестник МГУ. 2002. № 2. С. 57–60. [7] Э. Б. Винберг // Труды ММО. 2002. Т. 63.