Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, О количестве простых, дающих бесквадратные суммы с заданными числами, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:16:18

О КОЛИЧЕСТВЕ ПРОСТЫХ, ДАЮЩИХ БЕСКВАДРАТНЫЕ СУММЫ С ЗАДАНЫМИ ЧИСЛАМИ

М. Е. ЧАНГА

Пусть даны k целых чисел l_i с условием $0 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k$. Можно поставить такой вопрос: как много натуральных чисел $n \leq x$ таких, что все числа $n + l_1, \dots, n + l_k$ одновременно свободны от m -х степеней? Если через $\delta_m(n)$ обозначить характеристическую функцию множества натуральных чисел, свободных от m -х степеней, то эта задача сведется к изучению суммы

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \delta_m(n + l_1) \cdots \delta_m(n + l_k).$$

В конце сороковых годов Л. Мирский [1], [2] получил для этой суммы асимптотическую формулу.

ТЕОРЕМА (Л. Мирский). Пусть $\alpha(n)$ обозначает количество чисел l_i , различных по модулю n . Тогда

$$S(x) = x \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p^m)}{p^m} \right) + O(x^{\frac{2}{m+1} + \varepsilon}).$$

Доказательство этой теоремы основано на известной формуле для функции $\delta_m(n)$

$$\delta_m(n) = \sum_{d^m | n} \mu(d). \quad (1)$$

Представить константу в главном члене в виде произведения по простым можно с помощью многомерного аналога тождества Эйлера или косвенного подхода, использующего решето. Эта теорема позволяет заключить: $S(x)$ неограниченна тогда и только тогда, когда числа l_i не покрывают полной системы вычетов ни по какому p^m .

В настоящей работе рассматривается задача о количестве простых чисел $p \leq x$ таких, что $p + l_1, \dots, p + l_k$ одновременно свободны от m -х степеней. Введем обозначение

$$T(x) = \sum_{p \leq x} \delta_m(p + l_1) \cdots \delta_m(p + l_k).$$

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\beta(n)$ обозначает количество чисел l_i , различных по модулю n и взаимно простых с ним. Тогда

$$T(x) = \pi(x) \prod_p \left(1 - \frac{\beta(p^m)}{\varphi(p^m)} \right) + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right),$$

где A — произвольное положительное число.

Доказательство этой теоремы использует теорему Зигеля–Вальфиша и, в основном, следует методу Мирского. Однако способ, примененный им при оценке остатка, здесь недостаточен. В этом случае остаток удастся оценить, последовательно применяя формулу (1) и анализируя получающиеся на каждом шаге соотношения. Как и прежде, найденная асимптотическая формула дает следствие: $T(x)$ неограниченна тогда и только тогда, когда числа l_i не покрывают приведенной системы вычетов ни по какому p^m .

Пусть теперь задано нецелое число a , большее единицы. Тогда натуральное число D и целое число r с условием $0 \leq r < D$ определяют множество

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} [(Dn + r)^{1/a}, (Dn + r + 1)^{1/a})$$

и сумму

$$U(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \delta_m(p + l_1) \cdots \delta_m(p + l_k).$$

В этом случае справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta(n)$ обозначает количество чисел l_i , различных по модулю n и взаимно простых с ним. Тогда

$$U(x) = \frac{\pi(x)}{D} \prod_p \left(1 - \frac{\beta(p^m)}{\varphi(p^m)} \right) + O\left(\frac{x}{\log^A x} \right),$$

где $D \leq \log^A x$, A — произвольное положительное число.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1, но использует теорему Зигеля–Вальфиша для простых из множества E . Последняя является следствием теоремы об асимптотическом поведении тригонометрических сумм с простыми числами из множества E [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Mirsky // Proc. London Math. Soc. (2). 1949. V. 50. P. 497–508. [2] L. Mirsky // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1947. V. 18. № 71. P. 178–182. [3] М. Е. Чанга // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 3. С. 423–436.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
24.03.2003