Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Точность верхней оценки Рислера для полной кривизны аффинной вещественной алгебраической гиперповерхности, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 2, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:20:26

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Точность верхней оценки Рислера для полной кривизны
аффинной вещественной алгебраической гиперповерхности

С. Ю. Оревков

Пусть A – вещественная алгебраическая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ степени d . Обозначим через $k(p)$ ее кривизну в точке p (т.е. якобиан гауссова отображения $\gamma: A \rightarrow S^n$). Обозначим также через $K(p)$ гауссову кривизну ее комплексификации SA в точке p . Ж.-Ж. Рислер [1], используя результаты В. Тесье и Р. Ланжевэна, доказал, что

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_A |k| \leq \frac{1}{\sigma_{2n}} \int_{SA} |K| = \frac{d(d-1)^n}{2} \quad (‘<’ \text{ вместо } ‘\leq’ \text{ при } d \geq 3), \quad (1)$$

где σ_n – объем единичной n -мерной сферы. Применяя построение Харнака, он также показал, что эта оценка точна при $n = 1$, т.е. для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественная алгебраическая кривая A в $\mathbb{R}^2$ такая, что $\int_A |k| > \pi d(d-1) - \varepsilon$. Цель данной заметки – показать, что точность оценки (1) очевидна при всех n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любых положительных n, d и для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественная алгебраическая гиперповерхность A в $\mathbb{R}^{n+1}$ такая, что

$$\int_A |k| > \frac{1}{2} d(d-1)^n \sigma_n - \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – многочлен от одной переменной степени d , имеющий d различных вещественных корней $a_1, \dots, a_d$ на отрезке $[-1, 1]$. При $c \in \mathbb{R}$ положим

$$F_c(x_0, \dots, x_n) = f(x_0) + c \cdot (f(x_1) + \dots + f(x_n)),$$

и пусть A_c – гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданная уравнением $F_c = 0$.

ШАГ 1. Существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < |c| < \delta$ ограничение координаты x_0 на гиперповерхность A_c имеет $d(d-1)^n$ невырожденных критических точек.

Действительно, критические точки ограничения x_0 на A_c – это решения системы уравнений

$$\frac{\partial F_c}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial F_c}{\partial x_n} = F_c = 0 \quad (2)$$

По теореме Ролля f' имеет $d-1$ вещественных корней $b_1, \dots, b_{d-1}$. Поэтому если $c \neq 0$, то решением системы $\partial F_c / \partial x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, является объединение $(d-1)^n$ прямых $x_j = b_{i_j}$, $1 \leq i_j \leq d-1$. Гиперплоскости $x_0 = a_i$, $i = 1, \dots, d$, этим прямым трансверсальны, следовательно, при добавлении уравнения $F_0 = 0$ мы получим $d(d-1)^n$ решений. Ясно, что при $|c| \ll 1$ гиперповерхность $F_c = 0$ является C^1 -близкой к $F_0 = 0$ в кубе $[-1, 1]^{n+1}$, значит возмущенная система имеет то же число решений. При этом решения невырождены, а значит, и критические точки – тоже.

ШАГ 2. Фиксируем c , $0 < |c| < \delta$, и положим $A_{c,h} = \{F_{c,h} = 0\}$, где

$$F_{c,h}(x_0, \dots, x_n) = F_c(hx_0, x_1, \dots, x_n).$$

Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{A_{c,h}} |k| \geq \frac{1}{2} d(d-1)^n \sigma_n.$$

Действительно, ясно, что $A_{c,h} = s_h(A_c)$, где $s_h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ есть растяжение $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0/h, x_1, \dots, x_n)$. Обозначим через $p_1, \dots, p_N \in A_c$ (где $N = d(d-1)^n$) критические точки функции $x_0|_{A_c}$. Выберем непересекающиеся окрестности $U_1, \dots, U_N \subset A_c$ точек $p_1, \dots, p_N$. Достаточно доказать, что $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{s_h(U_\nu)} |k| \geq \sigma_n/2$ при любом ν . По определению, k – якобиан гауссова отображения $\gamma_h: A_{c,h} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ относительно метрики на $\mathbb{RP}^n$, индуцированной стандартной проекцией единичной сферы S^n на $\mathbb{RP}^n$. Следовательно, $\int_{s_h(U_\nu)} |k| \geq \text{vol}_{\mathbb{RP}^n} \gamma_h(s_h(U_\nu))$. Рассмотрим аффинную карту V_0 на $\mathbb{RP}^n$, отвечающую координатам $X_1, \dots, X_n$, где $X_i = x_i/x_0$. Из невырожденности критической точки p_ν следует, что $\gamma_1(U_\nu)$ содержит некоторый открытый шар $B \subset V_0$ с центром в начале координат. Осталось заметить, что $\gamma_h(s_h(U_\nu)) = S_h(\gamma_1(U_\nu))$, где $S_h: V_0 \rightarrow V_0$ – гомотетия $(X_1, \dots, X_n) \mapsto (X_1/h, \dots, X_n/h)$, следовательно,

$$\text{vol}_{\mathbb{RP}^n} \gamma_h(s_h(U_\nu)) \geq \text{vol}_{\mathbb{RP}^n} S_h(B) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{volume}(\mathbb{RP}^n) = \sigma_n/2.$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительности, в [1] Рислер доказал больше, чем точность оценки (1) при $n = 1$. Он доказал, что (1) при $n = 1$ остается точной при рассмотрении только *максимальных кривых*, т.е. кривых, имеющих максимально возможное число $(d-1)(d-2)/2 + d$ компонент связности (напомним, что кривые аффинны). Наша конструкция при $n = 1$ дает далеко не максимальные кривые.

Список литературы

- [1] J.-J. Risler, *Bull. London Math. Soc.*, **35:4** (2003), 445–454.

С. Ю. Оревков (S. Yu. Orevkov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

Université Paul Sabatier, Toulouse, France

E-mail: orevkov@mi.ras.ru

Представлено С. К. Ландо

Принято редколлегией

06.02.2007