Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Лобанов, Теорема Пикара для обыкновенных дифференциальных уравнений в пространствах Фреше, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 2, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:00:30

Теорема Пикара для обыкновенных дифференциальных уравнений в пространствах Фреше

С. Г. Лобанов

Основное отличие доказываемого в этой статье варианта обобщения классической теоремы Пикара на случай дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах от предложенных в работах [1]–[3] вариантов связано с трактовкой условия Липшица. Впервые “константы Липшица” являются некоторыми функциями, зависящими от x .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – пространство Фреше, $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$ – некоторая определяющая топологию X возрастающая последовательность непрерывных полунорм, $[0, T]$ – отрезок вещественной прямой, V – открытое подмножество X , Λ – компактное топологическое пространство, $f: [0, T] \times V \times \Lambda \rightarrow X$ – непрерывное отображение, K_n – такая последовательность неубывающих отображений $[0, \infty)$ в $[0, \infty)$, что при всех $(t, x_1, \lambda), (t, x_2, \lambda) \in [0, T] \times V \times \Lambda$

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\|_1 \leq K_1(\max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_1))\|x_1 - x_2\|_1, \quad (1)$$

при $n > 1$

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\|_n \leq K_n(\max(\|x_1\|_{n-1}, \|x_2\|_{n-1}))\|x_1 - x_2\|_n. \quad (2)$$

Тогда для любой точки $x_0 \in V$ найдутся такие содержащие x_0 открытое множество $W \subseteq V$, невырожденный отрезок $I = [0, T_1] \subseteq [0, T]$ и непрерывное отображение $\varphi: I \times I \times W \times \Lambda \rightarrow X$, что при всех $(\theta, u, \lambda) \in I \times W \times \Lambda$ отображение $t \mapsto \varphi(t, \theta, u, \lambda)$ – единственное решение на отрезке I задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$, $x(\theta) = u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$ (общий случай сводится к данному заменой $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{K}_n(\cdot) = K_n(\cdot + \|x_0\|_{n-1})$).

Отображение $\varphi: I \times I \times W \times \Lambda \rightarrow X$ из утверждения теоремы будет строиться методом последовательных приближений как предел последовательности $\varphi_n(t, \theta, u, \lambda)$, где

$$\varphi_1(t, \theta, u, \lambda) = u, \quad \varphi_n(t, \theta, u, \lambda) = u + \int_{\theta}^t f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau, \theta, u, \lambda), \lambda) d\tau \quad \text{при } n > 1.$$

Для построения подходящих I и W , пользуясь открытостью множества V , найдем такие $l \in \mathbb{N}$ и $\rho \in (0, \infty)$, что $Q_{\rho} = \{x \in X : \|x\|_l < \rho\} \subseteq V$.

Далее используем условия (1), (2) для вывода оценки

$$\begin{aligned} \|f(t, x, \lambda)\|_m &\leq \|f(t, x, \lambda) - f(t, 0, \lambda)\|_m + \|f(t, 0, \lambda)\|_m \\ &\leq K_m(\|x\|_m)\|x\|_m + \|f(t, 0, \lambda)\|_m, \end{aligned} \quad (3)$$

справедливой для всех $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times V \times \Lambda$, $m \in \mathbb{N}$.

Отсюда следует, в частности, что

$$\|f(t, x, \lambda)\|_l \leq M \quad \text{при всех } (t, x, \lambda) \in [0, T] \times Q_{\rho} \times \Lambda \quad (4)$$

для некоторого $M > 0$. Поэтому при $W = Q_{\rho/3}$, $I = [0, \rho/(3M)]$ для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\varphi_n(I \times I \times W \times \Lambda) \subseteq Q_{\rho}$.

Таким образом, последовательность φ_n определена для всех n .

Для любого ограниченного множества $B \subseteq W$ и всех $m \in \mathbb{N}$ множество чисел $H_m(B) = \{\|\varphi_n(t, \theta, u, \lambda)\|_m : (t, \theta, u, \lambda) \in I \times I \times B \times \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. При $m \leq l$ это вытекает из неравенства (4). Далее, применяя индукцию по m , допустим,

что для некоторого m ограниченность $H_m(B)$ доказана, и обозначим через C_m верхнюю грань $H_m(B)$. Тогда, используя условие (2), получим, опуская для краткости аргументы θ и λ у функций φ_k ,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t, u) - \varphi_{n-1}(t, u)\|_{m+1} &\leq \left| \int_{\theta}^t \|f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau, u), \lambda) - f(\tau, \varphi_{n-2}(\tau, u), \lambda)\|_{m+1} d\tau \right| \\ &\leq K_{m+1}(C_m) \left| \int_{\theta}^t \|\varphi_{n-1}(\tau, u) - \varphi_{n-2}(\tau, u)\|_{m+1} d\tau \right|. \end{aligned}$$

Применяя повторно только что полученное неравенство, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t, u) - \varphi_{n-1}(t, u)\|_{m+1} &\leq K_{m+1}^{n-2}(C_m) \left| \int_{\theta}^t \int_{\theta}^{\tau_1} \dots \int_{\theta}^{\tau_{n-3}} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{n-2} \right| S f_{m+1} \\ &= \frac{K_{m+1}^{n-2}(C_m) |t - \theta|^{n-2}}{(n-2)!} S f_{m+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $S f_{m+1} = \sup\{\|f(t, u, \lambda)\|_{m+1} : (t, u, \lambda) \in I \times B \times \Lambda\} < \infty$ в силу неравенства (3).

Следовательно, последовательность $\varphi_n(t, \theta, u, \lambda)$ фундаментальна по полунорме $\|\cdot\|_{m+1}$ равномерно по $(t, \theta, u, \lambda) \in I \times I \times B \times \Lambda$. В частности, эта последовательность равномерно ограничена по этой полунорме, что доказывает ограниченность $H_{m+1}(B)$. Одновременно доказана равномерная по $(t, \theta, u, \lambda) \in I \times I \times B \times \Lambda$ сходимости последовательности $\varphi_n(t, \theta, u, \lambda)$ к некоторому пределу $\varphi(t, \theta, u, \lambda)$. Как обычно, отсюда следует, что $t \mapsto \varphi(t, \theta, u, \lambda)$ — одно из решений на отрезке I задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$, $x(\theta) = u$.

Допустим, что φ и ψ — некоторые решения этой задачи. Тогда аналогично оценке (5) получим для всех n и m

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, \theta, u, \lambda) - \psi(t, \theta, u, \lambda)\|_{m+1} &\leq \frac{K_{m+1}^n(C_m) T^n}{n!} \\ &\times \sup\{\|\varphi(t, \theta, u, \lambda) - \psi(t, \theta, u, \lambda)\|_{m+1} : t \in I\}, \end{aligned}$$

что возможно лишь в случае совпадающих φ и ψ . Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР. В пространстве $X = \mathbb{R}^\infty$ всех числовых последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ с полунормами $\|x\|_n = \max\{|x_k|, k \leq n\}$ для уравнений

$$\dot{x}_n = x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$\dot{x}_n = n^2 + x_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

условие Липшица из теоремы 1 не выполняется. При этом уравнение (6) для любых начальных условий имеет бесконечное множество определенных при всех t решений, а уравнение (7) совсем не имеет решений. Правые части этих уравнений удовлетворяет условиям $\|f(x) - f(y)\|_n \leq \|x - y\|_{n+1}$ и $\|f(x) - f(y)\|_n \leq 2 \max(\|x\|_n, \|y\|_n) \|x - y\|_n$ соответственно.

Список литературы

- [1] В. М. Миллионщиков, *Докл. АН СССР*, **131**:3 (1960), 510–514. [2] В. М. Миллионщиков, *Матем. сб.*, **57(99)**:4 (1962), 385–406. [3] С. Г. Лобанов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1217–1243.

С. Г. Лобанов (S. G. Lobanov)

Государственный университет – Высшая школа экономики
E-mail: lobanov@hse.ru

Представлено А. Г. Костюченко

Принято редколлегией
07.12.2006