Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Варфоломеев, О бифуркации Андронова–Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:06:55

О бифуркации Андронова–Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных

Е. М. Варфоломеев

Нелинейная оптическая система с преобразованиями поля в двумерной обратной связи описывается следующей задачей Неймана [1]:

$$u_t + u = D\Delta u + K \left(1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \cos u_{g_i} \right), \quad x \in Q, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$(\partial u / \partial \tilde{\nu})|_{\partial Q \times \mathbb{R}} = 0. \quad (2)$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $D, K, \gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ – постоянные коэффициенты, не равные нулю; $u_{g_i} = u(g_i(x), t)$, $g_i: \bar{Q} \rightarrow g_i(\bar{Q})$ – взаимно однозначные преобразования, $i = 1, \dots, N$; ν – единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке x , $\tilde{\nu} = (\nu, 0)$.

С точки зрения приложений представляет интерес изучение бифуркации Андронова–Хопфа периодических решений указанного уравнения. Во многих работах (см., например, [2], [3]) эта задача рассматривалась при условии, что область Q – окружность или круг с одним преобразованием переменных в виде вращения на постоянный угол и сжатия. Случай произвольных области Q и одного преобразования переменных изучался в работе [4]. В работе [5] использовалась нормальность линеаризованного оператора задачи. Нормальность такого оператора в случае двух преобразований переменных рассматривалась в работе [6].

В настоящей работе обобщены результаты работы [4] на случай конечного числа преобразований переменных. Для этого используются методы исследования бифуркации Андронова–Хопфа в бесконечномерных задачах, развитые в работах [7], [8].

УСЛОВИЕ 1. $g_i(Q) \subseteq Q$, $g_i(x) \neq x$ ($x \in Q$), $i = 1, \dots, N$.

УСЛОВИЕ 2. Операторы $G_i: L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$, $(G_i u)(x) = u(g_i(x))$, $i = 1, \dots, N$, ограничены.

Решение w задачи (1), (2) называется *пространственно-однородным стационарным решением*, если оно не зависит от $x \in Q$ и $t \in \mathbb{R}$. Оно удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$w = K \left(1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \cos w \right). \quad (3)$$

УСЛОВИЕ 3. $1 + \hat{K} \sin \hat{w} \sum_{i=0}^N \gamma_i \neq 0$, где $\hat{w}$ – решение уравнения (3) для $K = \hat{K}$.

Обозначим через $C_{2\pi}^\sigma(X)$ пространство всех σ -непрерывных по Гёльдеру 2π -периодических функций $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow X$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C_{2\pi}^\sigma(X)} = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \sup_{0 \leq s < t \leq 2\pi} \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_X / (t - s)^\sigma,$$

где X – вещественное банахово пространство, $0 < \sigma < 1$.

Пусть $C_{2\pi}^{1,\sigma}(X)$ – банахово пространство дифференцируемых функций $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow X$ таких, что φ и φ' принадлежат $C_{2\pi}^\sigma(X)$ с нормой $\|\varphi\|_{C_{2\pi}^{1,\sigma}(X)} = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|\varphi(t)\|_X + \|\varphi'\|_{C_{2\pi}^\sigma(X)}$.

Обозначим через $W_p^k(Q)$ ($\widetilde{W}_p^k(Q)$) пространство Соболева вещественнозначных (комплекснозначных) функций с обобщенными производными вплоть до порядка k

из $L_p(Q)$ ($\tilde{L}_p(Q)$). Пусть $W_{p,N}^2(Q) = \{v \in W_p^2(Q) : (\partial v / \partial \nu)|_{\partial Q} = 0\}$, $\tilde{W}_{p,N}^2(Q) = \{v \in \tilde{W}_p^2(Q) : (\partial v / \partial \nu)|_{\partial Q} = 0\}$.

Положим $K = \hat{K} + \kappa$. Пусть $w = w(\kappa)$ удовлетворяет уравнению (3) для $K = \hat{K} + \kappa$ и $w(0) = \hat{w}$. Представим решение задачи (1), (2) в виде $u(x, t, \kappa) = w(\kappa) + v(x, t, \kappa)$. Уравнение (1) примет вид

$$v_t = f(v, \kappa),$$

где $f(v, \kappa) = D\Delta v - v + (\hat{K} + \kappa) \sum_{i=1}^N \gamma_i (\cos(w(\kappa) + v_{g_i}) - \cos w(\kappa))$.

Введем оператор $\mathcal{L}(\kappa) : \mathcal{D}(\mathcal{L}(\kappa)) \subset L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}(\kappa)) = W_{p,N}^2(Q)$ по формуле $\mathcal{L}(\kappa)v = f_v(0, \kappa)v = D\Delta v - v - (\hat{K} + \kappa) \sin w(\kappa) \times \sum_{i=1}^N \gamma_i v_{g_i}$. Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\kappa) : \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}(\kappa)) \subset \tilde{L}_p(Q) \rightarrow \tilde{L}_p(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}(\kappa)) = \tilde{W}_{p,N}^2(Q)$, заданный по формуле $\tilde{\mathcal{L}}(\kappa) = \mathcal{L}(\kappa)v_1 + i\mathcal{L}(\kappa)v_2$, где $v_1, v_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}(\kappa))$, $v = v_1 + iv_2$.

Обозначим через $\lambda_s(\kappa) = \delta_s(\kappa) + i\omega_s(\kappa)$, $s = 1, 2, \dots$, собственные значения оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\kappa)$.

УСЛОВИЕ 4. $\lambda_1(0) = i\hat{\omega}$ – простое собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(0) : \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}(0)) \subset \tilde{L}_p(Q) \rightarrow \tilde{L}_p(Q)$, причем $\hat{\omega} > 0$, $k\hat{\omega}i \notin \sigma(\tilde{\mathcal{L}}(0))$, $k = 0, 2, 3, \dots$, и $\delta'_1(0) \neq 0$.

Положим $\tau = \hat{\omega}\omega(\kappa)t$, где $\omega(\kappa)$ – неизвестная частота, близкая к 1, и рассмотрим 2π -периодические решения уравнения

$$v_\tau = (\hat{\omega}\omega(\kappa))^{-1} f(v(\tau), \kappa), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия 1–4. Зафиксируем $\sigma \in (0, 1)$ и $p > n/2$.

Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, аналитическая вектор-функция $\varepsilon \mapsto (v(\varepsilon), \omega(\varepsilon), \kappa(\varepsilon))$ из $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ в $C_{2\pi}^\sigma(W_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(L_p(Q)) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такая, что $v(0) = 0$, $\omega(0) = 1$, $\kappa(0) = 0$ и $v(\varepsilon)$ не постоянна по τ при $\varepsilon \neq 0$, и аналитическая функция $\varepsilon \mapsto w(\kappa(\varepsilon))$ из $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ в $\mathbb{R}$.

Функция $u(x, t, \varepsilon) = w(\kappa(\varepsilon)) + v(x, \tau, \varepsilon)$ является $2\pi(\hat{\omega}\omega(\varepsilon))^{-1}$ -периодическим по t решением задачи (1), (2), где $\tau = \omega(\varepsilon)\hat{\omega}t$. При этом $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots$, $\kappa(\varepsilon) = \varepsilon^2\kappa_2 + \varepsilon^3\kappa_3 + \dots$.

Более того, существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $\bar{\kappa}, \bar{\omega} \in \mathbb{R}$ и $\bar{v} \in C_{2\pi}^\sigma(W_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(L_p(Q))$ удовлетворяют условиям

$$\bar{v}'(\tau) = (\hat{\omega}\bar{\omega})^{-1} f(\bar{v}(\tau), \bar{\kappa}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\|\bar{v}\|_{C_{2\pi}^\sigma(W_{p,N}^2(Q)) \cap C_{2\pi}^{1,\sigma}(L_p(Q))} < \delta_0, \quad |\bar{\kappa}| < \delta_0, \quad |1 - \bar{\omega}| < \delta_0,$$

то существуют $\theta \in [0, 2\pi)$ и $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ такие, что $\bar{\kappa} = \kappa(\varepsilon)$, $\bar{\omega} = \omega(\varepsilon)$, $\bar{v}(\tau) = v(x, \tau + \theta, \varepsilon)$.

Автор глубоко благодарен проф. А.Л. Скубачевскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] М. А. Воронцов, Ю. Д. Думаревский, Д. В. Пруидзе, В. И. Шмальгаузен, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **52**:2 (1988), 374–376. [2] Е. П. Белан, О. Б. Лыкова, *Дифференц. уравнения*, **40**:10 (2004), 1348–1357. [3] А. В. Разгулин, *ЖВМ и МФ*, **33**:1 (1993), 69–80. [4] А. Л. Скубачевский, *Дифференц. уравнения*, **34**:10 (1998), 1394–1401. [5] A. L. Skubachevskii, *Nonlinear Anal.*, **32**:2 (1998), 261–278. [6] Е. М. Варфоломеев, *УМН*, **61**:1 (2006), 173–174. [7] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **67**:1 (1977), 53–72. [8] G. Da Prato, A. Lunardi, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **3**:4 (1986), 315–329.

Е. М. Варфоломеев (Е. М. Varfolomeev)

Российский университет дружбы народов

E-mail: varfolomeyev@mail.ru

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией

27.12.2006