Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Л. М. Сурмина, О T -пространствах n -слов над полем характеристики $p > 0$, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:13:57

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О T -пространствах n -слов над полем характеристики $p > 0$

А. В. Гришин, Л. М. Сурмина

Пусть $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ — свободная счетнопорожденная ассоциативная k -алгебра, k — бесконечное поле характеристики $p > 0$. Следуя [1], [2], назовем T -пространством в алгебре F любое ее линейное подпространство, устойчивое относительно действия полугруппа T гомоморфизмов (подстановок) алгебры F . Через S^T будем обозначать упитано замкнутое T -пространство, порожденное некоторым подмножеством S в алгебре F . Аналогичные определения можно дать и в относительно свободных алгебрах. Их обобщением является понятие абстрактного T -пространства как унитарного правого модуля над полугрупповой алгеброй kT (см. [2]). Под n -словом мы понимаем любой одночлен алгебры F , в который каждая переменная входит с кратностью n . В статье изучаются унитарно замкнутые T -пространства W_n , порожденные n -словами в относительно свободной алгебре $F^{(3)} = F/I$, где I — T -идеал, порожденный “тройным коммутатором” $[[x_1, x_2], x_3]$. Именно в T -пространствах W_n впервые были построены примеры бесконечно базисуемых T -пространств (см. [3], [4]).

Ниже образы свободных переменных x_i в алгебре $F^{(3)}$ обозначаются так же, как и сами переменные. Кроме того, часть переменных иногда для удобства обозначаются буквами y_i, z_i .

Как нетрудно проверить, любое n -слово $f \in F^{(3)}$ можно представить в виде линейной комбинации многочленов следующего вида:

$$g_{r,s}(n) = x_1^{n-1} y_1^{n-1} [x_1, y_1] \cdots x_r^{n-1} y_r^{n-1} [x_r, y_r] z_1^n \cdots z_s^n,$$

где r и s — любые целые неотрицательные числа: если $r = 0$, то отсутствуют x_i, y_i ; если $s = 0$, то отсутствуют z_i^n ; $g_{0,0}(n) = 0$.

Рассмотрим в W_n следующие T -подпространства: $C_n = \{g_{r,0}(n) \mid r \in \mathbb{N}\}^T$, $D_n = \{g_{0,s}(n) \mid s \in \mathbb{N}\}^T$, $CD_n = \{g_{r,s}(n) \mid r \geq 1, s \geq 0\}^T$. Тогда $C_1 = \{[x, y]\}^T$, $CD_1 = C = ([x, y])^T$ — коммутант алгебры $F^{(3)}$.

Структура T -пространства W_n в определенной степени проясняется следующими фактами.

ТЕОРЕМА 1. 1) Если $(n, p) = 1$, то $D_n = F^{(3)}$, $C_n = C_1$, $CD_n = C$.

2) Пусть $n = p^l n_1$, где $l \geq 1$, $(n_1, p) = 1$. Во всех случаях, кроме $p = 2$, $l = 1$, имеют место равенства $D_n = D_{p^l} = \{g_{0,1}(p^l)\}^T$, причем D_{p^l} — нётеров kT -модуль.

3) Если $p = 2$ и $l = 1$, то $D_n = D_2$ имеет бесконечную неприводимую систему порождающих $\{g_{0,s}(2) \mid s \in \mathbb{N}\}$.

Для любого p , если $m < l$, то $D_{p^l} \subsetneq D_{p^m}$.

Для любых p и l $C_n = C_{p^l}$ и $CD_n = CD_{p^l}$ — бесконечно базисуемые T -пространства, причем при $l < m$ $C_{p^l} \subsetneq C_{p^m}$ и $CD_{p^l} \subsetneq CD_{p^m}$.

Для любых p, l и m $C_1 \subsetneq C_{p^l} CD_{p^m} C$.

Легко видеть, что при $(n, p) = 1$ T -пространство W_n совпадает с $F^{(3)} = \{x_1\}^T$ – циклическим kT -модулем. Поэтому интерес представляет только случай $n = p^l n_1$. В этом случае справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. 1) Во всех случаях, кроме $p = 2$, $l = 1$, kT -модуль $W_n = W_{p^l}$ раскладывается в прямую сумму:

$$W_{p^l} = CD_{p^l} \oplus D_{p^l}.$$

2) При $p = 2$ и $l = 1$ имеет место равенство $W_2 = D_2$, причем C_2 и CD_2 – собственные подмодули в D_2 и все указанные T -пространства бесконечно базиремы.

Доказательства этих теорем основаны на коммутаторных соотношениях, соотношениях Фробениуса, на ряде комбинаторных соображений, а также на результатах работ [3] и [4].

Отметим, что все рассмотренные T -пространства являются коммутативными T -подалгебрами алгебры $F^{(3)}$. Естественно, возникает вопрос о структуре этих T -подалгебр.

Список литературы

- [1] А. В. Гришин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 899–927. [2] А. В. Гришин, *Фундам. прикл. матем.*, **1**:3 (1995), 669–700. [3] А. В. Гришин, *Фундам. прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 101–118. [4] В. В. ЩигOLEV, *Матем. сб.*, **191**:3 (2000), 143–160.

А. В. Гришин (A. V. Grishin)

Московский педагогический
государственный университет

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редколлегией

07.01.2007

Л. М. Сурмина (L. M. Surmina)

Московский педагогический
государственный университет

E-mail: liliya-kinder@mail.ru