Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тищенко, Сплетение атомов решетки полугрупповых многообразий, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4, 219–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:05:00

СПЛЕТЕНИЕ АТОМОВ РЕШЕТКИ ПОЛУГРУППОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. В. ТИЩЕНКО

Операция моноидного сплетения полугрупповых многообразий была определена в [1], [2]. Моноидное сплетение полугрупповых многообразий всегда содержит их решеточное объединение (см. [3]), но может в некоторых случаях довольно сильно от него отличаться. Для получения информации о том, насколько моноидное сплетение может быть больше чем решеточное объединение этих же многообразий, показывает исследование поведения этой операции в случае сплетения двух многообразий, каждое из которых является атомом решетки $\mathcal{L}$ полугрупповых многообразий. Отметим, что моноид полугрупповых многообразий с операцией моноидного сплетения изучался в [4].

Атомы решетки $\mathcal{L}$ хорошо известны [5]. Это в точности многообразия $\mathbf{N}_2$ всех полугрупп с нулевым умножением, $\mathbf{SI}$ всех полурешеток, $\mathbf{L}_1$ всех полугрупп левых нулей, $\mathbf{R}_1$ всех полугрупп правых нулей, $\mathbf{A}_p$ всех абелевых групп простой экспоненты p . Предварительно для сплетения атомов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ решетки $\mathcal{L}$ вычисляется базис тождеств и, если это возможно, находится конечная полугруппа, которая порождает это сплетение. При вычислении базисов тождеств существенно используются результаты раздела 4 из [3]. Далее для всевозможных атомов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ вычисляются решетки $\mathcal{L}(\mathbf{UwV})$ всех подмногообразий сплетения $\mathbf{UwV}$, а затем решеточные интервалы $[\mathbf{U} \vee \mathbf{V}, \mathbf{UwV}]$. Решеточные интервалы $[\mathbf{U} \vee \mathbf{V}, \mathbf{UwV}]$ обозначим кратко через $\mathcal{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$.

ТЕОРЕМА 1.

- 1) Если $\mathbf{U}$ – идемпотент моноида MV полугрупповых многообразий, то $\mathbf{UwV} = \mathbf{U} \vee \mathbf{V}$. В частности, $\mathbf{N}_2\mathbf{wV} = \mathbf{N}_2 \vee \mathbf{V}$ и $\mathbf{L}_1\mathbf{wV} = \mathbf{L}_1 \vee \mathbf{V}$ для любого атома $\mathbf{V}$ решетки $\mathcal{L}$.
- 2) $\mathbf{R}_1\mathbf{wN}_2 = \text{var}\{y_1y_2x = z_1z_2x\}$, $\mathbf{R}_1\mathbf{wL}_1 = \text{var}\{xyz = xz\}$,
 $\mathbf{R}_1^2 = \text{var}\{xy_1y_2 = y_1y_2\}$, $\mathbf{R}_1\mathbf{wSI} = \text{var}\{xz = x^2z, xyz = yxz\}$,
 $\mathbf{R}_1\mathbf{wA}_p = \mathbf{R}_1 \vee \mathbf{A}_p = \text{var}\{xyz = yxz, x = y^px\}$.
- 3) $\mathbf{SIwN}_2 = \text{var}\{x_1x_2y = x_1x_2y^2, x_1x_2yz = x_1x_2zy\}$,
 $\mathbf{SIwL}_1 = \text{var}\{xy = xy^2, xyz = xzy\}$,
 $\mathbf{SIwR}_1 = \text{var}\{x^2 = x^3, xyx = xyxyx, xyxzx = xzyxy\}$,
 $\mathbf{SIwSI} = \text{var}\{x^2 = x^3, xyx^2 = xyx, xyxy = xy^2x, xyvxy = xyvxy, xyxy = xyxy, xyvxy = xyvxy\}$.
- 4) $\mathbf{A}_p\mathbf{wN}_2 = \text{var}\{x_1x_2yz = x_1x_2zy, x_1x_2y^p = x_1x_2\}$,
 $\mathbf{A}_p\mathbf{wL}_1 = \mathbf{A}_p \vee \mathbf{L}_1 = \text{var}\{xyz = xzy, xy^p = x\}$,
 $\mathbf{A}_p\mathbf{wR}_1 = \text{var}\{x = x(yx)^p, x^2yx = xyx^2, (x^py)^p = (xy)^p\}$,
 $\mathbf{A}_p\mathbf{wSI} = \text{var}\{x = x^{1+p}, xyvxy = xyvxy\}$.
- 5) Многообразия $\mathbf{A}_p^2$ и $\mathbf{A}_p\mathbf{wA}_q$, где p и q – простые числа, конечно базиремы. Многообразие $\mathbf{SIwA}_p$ (p – простое число) существенно бесконечно базиремо.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечная базиремость сплетения групповых многообразий следует из результатов известной книги [6]. Существенная бесконечная базиремость многообразий $\mathbf{SIwA}_p$ доказана в [7]. Базис тождеств и конечная полугруппа, порождающая многообразие $\mathbf{SIwR}_1$, найдены в [3]. Базисы тождеств для полупрямых произведений псевдомногообразий $\mathbf{R}_1 * \mathbf{R}_1$, $\mathbf{SI} * \mathbf{R}_1$ и $\mathbf{SI} * \mathbf{SI}$ были известны в литературе [8], [9].

СЛЕДСТВИЕ 1. Моноидное сплетение $\mathbf{UwV}$ атомов решетки L всех полугрупповых многообразий не имеет конечного базиса тождеств тогда и только тогда, когда $\mathbf{U} = \mathbf{SI}$ и $\mathbf{V} = \mathbf{A}_p$ для некоторого простого числа p .

ТЕОРЕМА 2. Моноидное сплетение $\mathbf{UwV}$ атомов решетки L всех полугрупповых многообразий не порождается конечной полугруппой тогда и только тогда, когда $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{A}_p$ для некоторого простого числа p .

ТЕОРЕМА 3.

- 1) Если $\mathbf{U} = \mathbf{N}_2$, или $\mathbf{U} = \mathbf{L}_1$, или $\mathbf{U} = \mathbf{R}_1$, и $\mathbf{V} = \mathbf{A}_p$, или $\mathbf{U} = \mathbf{A}_p$ и $\mathbf{V} = \mathbf{L}_1$, то $|\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})| = 4$ и $|\mathcal{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V})| = 1$.
- 2) $|\mathcal{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V})| = 2$ и $|\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})| = 5$.
- 3) $|\mathcal{T}(\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_2)| = |\mathcal{T}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1)| = |\mathcal{T}(\mathbf{R}_1, \mathbf{SI})| = |\mathcal{T}(\mathbf{SI}, \mathbf{L}_1)| = |\mathcal{T}(\mathbf{A}_p, \mathbf{N}_2)| = |\mathcal{T}(\mathbf{A}_p, \mathbf{R}_1)| = 3$.
 При этом $|\mathcal{L}(\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_2)| = 10$, $|\mathcal{L}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1)| = 5$, $|\mathcal{L}(\mathbf{R}_1, \mathbf{SI})| = |\mathcal{L}(\mathbf{SI}, \mathbf{L}_1)| = 12$, $|\mathcal{L}(\mathbf{A}_p, \mathbf{N}_2)| = |\mathcal{L}(\mathbf{A}_p, \mathbf{R}_1)| = 9$.
- 4) $|\mathcal{T}(\mathbf{SIwN}_2)| = |\mathcal{T}(\mathbf{A}_p, \mathbf{SI})| = 4$. При этом $|\mathcal{L}(\mathbf{SIwN}_2)| = 13$, $|\mathcal{L}(\mathbf{A}_p, \mathbf{SI})| = 11$.
- 5) Решетка $\mathcal{L}(\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_q)$ конечна для любых различных простых чисел p и q .
- 6) Решеточные интервалы $\mathcal{T}(\mathbf{SI}, \mathbf{R}_1)$, $\mathcal{T}(\mathbf{SI}, \mathbf{SI})$, $\mathcal{T}(\mathbf{SI}, \mathbf{A}_p)$, $\mathcal{T}(\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_p)$ (p – простое число) бесконечны.

Следствие 1 и теорема 2 были анонсированы в [10]. Теорема 3 существенно уточняет теорему 3 из [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tilson B. // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 48. № 1–2. P. 83–198. [2] Тищенко А. В. // Междунар. конф. по алгебре памяти А. И. Ширшова (Барнаул, август 1991). Тезисы докл. по логике и универс. алгебрам, прикл. алгебре. Новосибирск, 1991. С. 144. [3] Тищенко А. В. // Фундам. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 1. С. 233–249. [4] Тищенко А. В. // УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 177–178. [5] Шеврин Л. Н., Волков М. В. // Изв. вузов. Матем. 1985. № 11. С. 3–47. [6] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969. [7] Тищенко А. В. // Труды ММО. 1996. Т. 57. С. 218–238. [8] Almeida J. // J. Pure Appl. Algebra. 1989. V. 60. P. 113–128. [9] Pin J.-E. // Semigroup Forum. V. 28. № 1–3. P. 73–81. [10] Tishchenko A. V. // Международная конф. “Полугруппы и их приложения, включая полугрупповые кольца” в честь Е. С. Ляпина. Тезисы докладов. С.-Петербург, 1995.

Принято редколлегией
03.06.1998