Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Устранимые особенности решений нелинейных эллиптических уравнений, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:41:11

Устранимые особенности решений нелинейных эллиптических уравнений

А. В. Покровский

Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), и пусть

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x, u, \nabla u) D_j u) + \sum_{i=1}^n b_i(x, u, \nabla u) D_i u + c(x, u, \nabla u) u$$

– нелинейный дифференциальный оператор, удовлетворяющий следующему условию эллиптичности в G : для каждого ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}$ существует такое $\lambda_K > 0$, что неравенство $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, z, p) q_i q_j \geq \lambda_K |q|^2$ выполняется при всех $x \in G$, $z \in K$, $p \in K^n$ и $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. Здесь функции $a_{ij}(x, z, p)$, $b_i(x, z, p)$ и $c(x, z, p)$ (в настоящей работе мы рассматриваем только измеримые вещественные функции) определены на множестве $G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($i, j = \overline{1, n}$), $\nabla u = (D_1 u, \dots, D_n u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, $|q| = (q_1^2 + \dots + q_n^2)^{1/2}$. Мы также предполагаем, что для каждого множества $K \subseteq \mathbb{R}$ существует такое $M_K > 0$, что, каковы бы ни были $x, y \in G$, $z, w \in K$ и $p, q \in K^n$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x, z, p) - a_{ij}(y, w, q)| + \sum_{i=1}^n |b_i(x, z, p) - b_i(y, w, q)| \\ & + |c(x, z, p) - c(y, w, q)| \leq M_K (|x - y|^\gamma + |z - w|^\gamma + |p - q|), \end{aligned}$$

где $\gamma \in (0, 1]$ зависит только от оператора A . В дальнейшем если хотя бы одна из функций $a_{ij}(x, z, p)$, $b_i(x, z, p)$ и $c(x, z, p)$ ($i, j = \overline{1, n}$) зависит от x , то мы считаем, что граница области G принадлежит классу $C^{1,\gamma}$. Предположим, что $c(x, z, p) \leq 0$ всюду в $G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Пусть E – непустое замкнутое множество в G , $E \neq G$, $\alpha \in (0, 1)$. Как обычно, $C^{1,\alpha}(G)$ – линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых функций в G , для которых конечна норма

$$\|f\|_{C^{1,\alpha}(G)} := \sup_G |f| + \sum_{i=1}^n \left(\sup_G |D_i f| + \sup_{x,y \in G, x \neq y} \frac{|D_i f(x) - D_i f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right).$$

Множество E назовем A -устранимым в классе $C^{1,\alpha}(G)$, если любая функция $u \in C^{1,\alpha}(G)$, для которой при всех $\varphi \in C_0^\infty(G \setminus E)$ выполняется равенство

$$\int_G \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) D_j u D_i \varphi - \sum_{i=1}^n b_i(x, u, \nabla u) D_i u \varphi - c(x, u, \nabla u) u \varphi \right) dx = 0,$$

может быть так переопределена на E с сохранением ее принадлежности к $C^{1,\alpha}(G)$, что после этого переопределения последнее равенство будет иметь место при всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

При сделанных выше предположениях и во введенных обозначениях имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$ и $\alpha < 1$. Тогда для A -устранимости множества E в классе $C^{1,\alpha}(G)$ необходимо и достаточно равенство нулю его хаусдорфовой меры $\text{mes}^{n-1+\alpha} E$ порядка $n - 1 + \alpha$.

Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ теорема 1 установлена в работах [1], [2], для уравнения минимальных поверхностей $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} \right) = 0$ – в [3] (с $\gamma = 1$). Доказательство в общем случае проводится с помощью рассуждений из последней работы. Поэтому мы остановимся только на его основных моментах.

Достаточность условия $\operatorname{mes}^{n-1+\alpha} E = 0$ проверяется с использованием леммы о разбиении единицы из работы [4]. Установим его необходимость. Пусть $\operatorname{mes}^{n-1+\alpha} E > 0$. Выделяя подмножество, можно без уменьшения общности считать, что E – компакт в G без внутренних точек. По лемме Фростмана (см. [5]) существует такая борелевская мера μ с носителем на E , что $\mu(E) > 0$ и $\mu(B(x, r)) \leq r^{n-1+\alpha}$ для любого шара $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ ($r > 0$). Пусть $t > 0$, $f \in C^{1,\alpha}(G)$, и пусть g_t – функция из соболевского класса $W_0^{1,2}(G)$, являющаяся обобщенным решением уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x, f, \nabla f) D_j g_t) + \sum_{i=1}^n b_i(x, f, \nabla f) D_i g_t + c(x, f, \nabla f) g_t = -t\mu.$$

Переписывая правую часть этого уравнения в виде $t \operatorname{div}(\nabla h)$, где функция $h \in W_0^{1,2}(G) \cap C^{1,\alpha}(G)$ является обобщенным решением уравнения $\Delta u = -\mu$ (см. [3]), и пользуясь известными результатами из теории линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка в дивергентной форме [6; теоремы 8.3, 8.16, 8.33 и 8.34], мы заключаем, что функция g_t существует, единственна и принадлежит классу $C^{1,\alpha}(G)$, а отображение $F_t: f \rightarrow g_t$ непрерывно по норме пространства $C^1(G)$ и при малых t переводит в себя единичный шар пространства $C^{1,\alpha}(G)$. По теореме Шаудера (см. [6; теорема 11.1]) отсюда следует, что при достаточно малом t это отображение имеет неподвижную точку u_t . Это означает, что функция u_t принадлежит классу $C^{1,\alpha}(G)$ и является обобщенным решением уравнения $A(u_t) = -t\mu$. Поэтому множество E не является A -устраиваемым в классе $C^{1,\alpha}(G)$. Если функции $a_{ij}(x, z, p)$, $b_i(x, z, p)$ и $c(x, z, p)$ ($i, j = \overline{1, n}$) не зависят от x , то в приведенных рассуждениях можно заменить область G на любой содержащий ее открытый шар, и условие на гладкость границы в этом случае излишне. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 применима к линейным равномерно эллиптическим уравнениям в дивергентной форме с гёльдеровыми коэффициентами, к уравнению капиллярности $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} \right) + cu = 0$ ($c = \operatorname{const} \leq 0$) с $\gamma = 1$, к уравнению Эмдена–Фаулера $\Delta u - |u|^{p-1}u = 0$ ($p > 1$) с $\gamma = \min\{1, p-1\}$ и к уравнению $\Delta u - u|\nabla u|^2 = 0$ с $\gamma = 1$.

Список литературы

- [1] Е. П. Долженко, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:5 (1964), 1113–1130. [2] Е. П. Долженко, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1251–1270. [3] А. В. Покровский, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:4 (2005), 62–68. [4] R. Harvey, J. Polking, *Acta Math.*, **125**:1/2 (1970), 39–56. [5] Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971. [6] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

А. В. Покровский (А. V. Pokrovskii)
Институт математики НАН Украины
E-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Представлено Л. Р. Волевичем
Принято редколлегией
08.02.2007