Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Лосев, Классификация слабо коммутативных комплексных однородных пространств, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 2, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:35:02

Классификация слабо коммутативных комплексных однородных пространств

И. В. Лосев

Пусть G – комплексная связная алгебраическая группа, а H – ее алгебраическая подгруппа. Отметим, что многообразие $T^*(G/H)$ наделяется естественной симплектической формой, что задает скобку Пуассона на поле реальных функций $\mathbb{C}(T^*(G/H))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородное пространство G/H называется *слабо коммутативным*, если поле рациональных инвариантов $\mathbb{C}(T^*(G/H))^G$ коммутативно относительно скобки Пуассона, индуцированной с $\mathbb{C}(T^*(G/H))$.

Цель этой работы – классификация слабо коммутативных однородных пространств с редуктивным стабилизатором H при некоторых технических ограничениях.

Ниже алгебра Ли алгебраической группы, обозначаемой прописной латинской буквой, обозначается строчной готической буквой.

Обсудим некоторые результаты, полученные ранее в том же направлении. Известна классификация в случае, когда и G , и H редуктивны, ее обзор дан в [1]. В работах [1]–[4] рассматривался случай вещественной группы Ли G и компактной подгруппы H (здесь в определении слабой коммутативности рассматривают алгебру всех инвариантных гладких функций на $T^*(G/H)$, полиномиальных на слоях расслоения $T^*(G/H) \rightarrow G/H$). В [2] были классифицированы все слабо коммутативные пространства вида $(N \rtimes H)/H$, где H – компактная группа Ли, а N – односвязная нильпотентная группа Ли, на которой H действует автоморфизмами, причем представление H в $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ неприводимо. Классификация в общем случае была проведена в [3], ее результаты частично представлены также в [4]. В работе [5] рассмотрен случай комплексного однородного пространства $(N \rtimes H)/H$ с редуктивным стабилизатором H . Там получена классификация при технических ограничениях, аналогичных введенным в [2].

Приведем теперь основной классификационный результат. Мы рассматриваем однородные пространства вида $(N \rtimes L)/H$, где L – связная редуктивная группа, H – ее связная редуктивная подгруппа, N – некоммутативная унитарная группа, на которой L действует автоморфизмами, причем L -модуль $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ неприводим. Отметим, что слабая коммутативность пространства G/H зависит лишь от пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Мы говорим, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (соответственно тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$) слабо коммутативна, если однородное пространство G/H (соответственно $(N \rtimes L)/H$) таково.

Мы говорим, что тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ *неразложима*, если не существует разложения $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^1 \times \mathfrak{l}^2$ в прямое произведение идеалов, для которого $\mathfrak{l}^2$ действует в $\mathfrak{n}$ тривиально и $\mathfrak{h} = (\mathfrak{l}^1 \cap \mathfrak{h}) \times (\mathfrak{l}^2 \cap \mathfrak{h})$. Классификация в общем случае тривиально сводится к случаю неприводимых троек.

В отличие от случая компактного стабилизатора, степень нильпотентности алгебры $\mathfrak{n}$ может быть больше 2. Однако классификация в случае, когда степень нильпотентности больше 2, несложно сводится к случаю $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}$, который был разобран в [5]. Мы полагаем $\mathfrak{z} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ и обозначаем через $\mathfrak{v}$ L -инвариантное дополнение к $\mathfrak{z}$ в $\mathfrak{n}$.

Мы говорим, что тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ *насыщена*, если $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = 1$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ представляется в $\mathfrak{v}$ нетривиально и $\mathfrak{n}_\mathfrak{l}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Классификацию всех слабо коммутативных троек можно свести к классификации насыщенных.

Пусть $\mathfrak{l}_0$ – редуктивная алгебра Ли, $\mathfrak{h}_0$ – ее редуктивная подалгебра, а $\mathfrak{n}$ – нильпотентная алгебра Ли, в которой действует дифференцированием алгебра Ли $\mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2)$. Положим $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n - 2)$, где идеал $\mathfrak{sl}(2)$ алгебры $\mathfrak{h}$ вложен диагонально в $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n)$. Мы говорим, что тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ получена из тройки $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2), \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{sl}(2))$ *удвоением*.

Наконец, нам понадобится одно обозначение. Для векторного пространства V , снабженного кососимметрической формой ω , мы обозначаем через $\mathfrak{heis}(V, \omega)$ алгебру Ли, которая совпадает с $V \oplus \mathbb{C}z$ как векторное пространство, а $[v_1, v_2] = \omega(v_1, v_2)z$,

$[z, v_1] = 0$, $v_1, v_2 \in V$. Когда мы пишем $\mathfrak{heis}(V)$, то имеем в виду, что кососимметрическая форма, участвующая в определении, невырождена.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие тройки насыщены, неразложимы и слабо коммутативны. Обратное, любая насыщенная неразложимая слабо-коммутативная тройка есть одна из перечисленных.*

- (1) $(\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^{2m+2n}), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2m+2n), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2m) \times \mathfrak{sp}(2n)), (\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^{2n}), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2n) \times \mathfrak{sp}(2n), \mathbb{C} \times \mathfrak{sp}(2n)), (\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^7 \otimes \mathbb{C}^2), \mathbb{C} \times \mathfrak{so}(7) \times \mathfrak{sl}(2), \mathbb{C} \times G_2 \times \mathfrak{sl}(2))$.
- (2) $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ получается однократным (соответственно двукратным) $\mathfrak{sl}(2)$ -удвоением из тройки вида $(\mathfrak{heis}(\mathbb{C}^{2n}), \mathbb{C} \times \mathfrak{l}_1, \mathbb{C} \times \mathfrak{l}_1)$, где $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{sp}(2n)$ – одна из следующих линейных алгебр $\mathfrak{Li}$: $\mathfrak{sp}(2m_1) \otimes \mathfrak{so}(m_2) \subset \mathfrak{sp}(2m_1 m_2)$ ($m_1 = 1$ или $m_2 = 3, 4$), $\mathfrak{spin}(2k+1) \otimes \mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{sp}(2^{k+1})$, $k = 3, 4$, $G_2 \otimes \mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{sp}(14)$ (соответственно $\mathfrak{sp}(2m) \otimes \mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{sp}(8m)$).
- (3) $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ получается однократным или двукратным $\mathfrak{sl}(2)$ -удвоением троек $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_1)$ из следующего списка:
 - (a) $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}(2n) \times \mathfrak{so}(m)$, $n > 1$, $m = 3, 4$, $\mathfrak{v} = \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^{2m}$, $\mathfrak{z} = \bigwedge^2 \mathbb{C}^{2n}$;
 - (b) $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}(5) \times \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{v} = \bigwedge^2 \mathbb{C}^5 \otimes \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{z} = (\mathbb{C}^5)^*$;
 - (c) $\mathfrak{l}_1 = \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}(n) \times \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{v} = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{z} = S^2 \mathbb{C}^n$;
 - (d) $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{so}(10) \times \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{v} = \mathbb{C}^{16} \otimes \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{z} = \mathbb{C}^{10}$ (здесь $\mathbb{C}^{16}$ обозначает спинорный $\mathfrak{so}(10)$ -модуль).

Приведем теперь некоторые соображения, использованные при классификации. Основным соображением является следующая теорема, обобщающая теорему 1 из [4].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{l}^1, \mathfrak{l}^2$ – произвольные дополнительные идеалы в $\mathfrak{l}$, для которых $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1 \times \mathfrak{h}^2$, $\mathfrak{h}^i := \mathfrak{l}^i \cap \mathfrak{h}$. Пусть β, γ – элементы общего положения в $(\mathfrak{l}^2/\mathfrak{h}^2)^*$, $(\mathfrak{l}^1/\mathfrak{h}^1) \oplus \mathfrak{n}^*$ соответственно. Тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ слабо коммутативна тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

- (1) $\mathfrak{l}^2 \subset \mathfrak{h}^2 + (\mathfrak{h}^1 + \mathfrak{l}^2)_\gamma$;
- (2) тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}^1 \times \mathfrak{h}_\beta^2, \mathfrak{h}^1 \times \mathfrak{h}_\beta^2)$ слабо коммутативна;
- (3) пара $(\mathfrak{h}^1 \times \mathfrak{l}^2)_\gamma, \mathfrak{h}_\gamma$ слабо коммутативна.

Следующие два предложения являются следствиями теоремы 2. Они играют важную роль при классификации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть α – элемент из $\mathfrak{z}$ общего положения. Определим форму $\hat{\alpha}$ на $\mathfrak{v}$ посредством $\hat{\alpha}(v_1, v_2) = \alpha([v_1, v_2])$. Предположим, что группа L_α редуктивна. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ слабо коммутативна;
- (2) $\mathfrak{l}_\alpha + \mathfrak{h} = \mathfrak{l}$ и тройка $(\mathfrak{heis}(\mathfrak{v}, \hat{\alpha}), \mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha)$ слабо коммутативна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{l}_0$ – редуктивная алгебра $\mathfrak{Li}$, $\mathfrak{h}_0$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{n}$ – некоторая nilпотентная алгебра $\mathfrak{Li}$, в которой $\mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2)$ действует дифференцированиями. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) тройка вида $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n-2)$, идеал $\mathfrak{sl}(2)$ вложен в $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sp}(2n)$ диагонально, слабо коммутативна.
- (2) тройка $(\mathfrak{n}, \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{t}(1), \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{t}_1)$, где $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{sl}(2)$ – картановская подалгебра, слабо коммутативна, а $(\mathfrak{h}_{0\gamma_1} \times \mathfrak{sl}(2))_\gamma \not\subset \mathfrak{h}_0$, где γ_1 – элемент общего положения в $(\mathfrak{l}_0, \mathfrak{h}_0)^*$.

Список литературы

- [1] Э. Б. Винберг, УМН, 56:1 (2001), 3–62. [2] Э. Б. Винберг, Тр. ММО, 2003, № 64, 54–89.
 [3] О. Yakimova, Gelfand pairs, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (Bonn, 2004), Bonner Math. Schriften, 374, Universität Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 2005. [4] О. Yakimova, Transform. Groups, 11:2 (2006), 305–335. [5] И. В. Лосев, Тр. ММО, 2006, № 67, 228–255.

И. В. Лосев (I. V. Losev)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ivanlosev@yandex.ru

Представлено Э. Б. Винбергом

Принято редколлегией

09.02.2007