Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Р. Азаматов, Эффективные оценки для обобщенных глобальных соотношений, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 5, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:39:58

Эффективные оценки для обобщенных глобальных соотношений

Т. Р. Азаматов

В работе использована p -адическая модификация метода Зигеля–Шидловского [1].

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над полем $\mathbb{Q}$, V – множество всех нормирований поля $\mathbb{K}$. Для $v \in V$ обозначим $\mathbb{K}_v$ пополнение поля $\mathbb{K}$ по этому нормированию. Если p – простое число, $v|p$, то считаем, что $|p|_v = p^{-\kappa_v/\kappa}$, где $\kappa_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_p]$.

В 1981 г. Э. Бомбиери в работе [2] ввел понятие глобального соотношения. Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}$. Соотношение $P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0$ называется *глобальным*, если оно выполняется во всех тех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$. В [2] это понятие было исследовано для так называемых G -функций.

В 1990 г. В. Г. Чирский [3] рассмотрел F -ряды, естественно дополняющие E - и G -функции Зигеля (определение E - и G -функций дано в [1]). Ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ принадлежит классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, если: 1) $|\bar{a}_n| = O(\exp(c_1 n))$, $n \rightarrow \infty$; 2) существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что для всех n и $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. При этом натуральные числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не превосходящие $c_2 n$, и $\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 (\log_p n + n/p^2)$. Пусть $c_1^* = c_1 + \ln 2$, $c_2^* = \max(c_2, 1)$, $c_3^* = (c_3 + 1)d$, $q^* = q^{1+[\ln d]}$.

В работах [3], [4] с помощью p -адической модификации метода Зигеля–Шидловского получен критерий отсутствия глобальных соотношений для F -рядов, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям. В 2004 г. в статье Д. Бертрана, В. Г. Чирского, Й. Йеббоу [5] установлен критерий, в котором входящие в него оценки полностью эффективны.

В 1970 г. А. И. Галочкин [6] опубликовал теорему об алгебраической независимости значений E -функций в трансцендентных точках, допускающих достаточно хорошие приближения алгебраическими числами. В 2000 г. В. Г. Чирский [4] рассмотрел обобщение понятия глобального соотношения на случай ряда, сходящегося в каждом из полей $\mathbb{K}_v$ к элементу этого поля, хорошо приближаемому числами из $\mathbb{K}$.

В настоящей работе получена теорема, дающая полностью эффективное решение задачи о глобальных соотношениях для вышеупомянутого обобщения понятия глобального соотношения.

ТЕОРЕМА. Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z) \in F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i(z) = \sum_{j=1}^m Q_{j,i}(z) y_j(z), \quad i = 1, \dots, m, \quad Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

и алгебраически независимы над $\mathbb{K}(z)$. Пусть θ_k – целые числа из $\mathbb{K}$ и

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \quad \Theta_n = \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $d \in \mathbb{N}$, $M = \binom{m+d}{m}$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p таких, что $p \leq \exp(\ln^{1+2\varepsilon} |\bar{\Theta}_n|)$, и любого нормирования v , продолжающего p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполнено неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(M - 1 + \delta) \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\bar{\Theta}_n|) \ln^{1+2\varepsilon} |\bar{\Theta}_n|).$$

Пусть последовательность h_n определена равенством

$$\ln h_n = \delta \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta}_n|) \ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta}_n| - c_4 \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta}_n|) \ln^{(1+\varepsilon)/2} |\overline{\Theta}_n|,$$

где $c_4 = 2 + c_5$ при $\varepsilon \geq 1$ и $c_4 = 2$ при $\varepsilon < 1$, а $c_5 = M^2(c_1^* \log_p q^* + 1.25c_2^* c_3^* + 2c_3^* + 5)$.

Тогда существует эффективная постоянная n_0 такая, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ степени d по совокупности переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}_K$, высота которого h удовлетворяет условиям $h_{n-1} < h \leq h_n$ при $n > n_0$, существуют простое число p в интервале

$$|\overline{\Theta}_n| \leq p \leq M \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta}_n|)$$

и нормирование v , продолжающее p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$\begin{aligned} |P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v &\geq \exp\left(-\ln h + \left(-\frac{M-1}{\delta} - \frac{c_4(M-1)(1-\delta)}{\delta(\ln \ln h_n)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}}\right) \ln h_n\right) \\ &= \exp(-B(h, h_n)). \end{aligned} \quad (2)$$

Для n_0 имеется оценка сверху через высоту $H(\mathbf{D})$ и степень $\tilde{d}$ системы (1):

$$n_0 \leq (m+M)^{2M} C(\kappa, m, \tilde{d}) H(\mathbf{D})^{c(\kappa, m, \tilde{d})},$$

$$c(\kappa, m, \tilde{d}) = \log_2 C(\kappa, m, \tilde{d}) = (2\kappa(\tilde{d}+1)m)^{(2(\tilde{d}+1)m)^{8m}}.$$

Точные определения $H(\mathbf{D})$ и $\tilde{d}$ даны в [5; замечание 1.5].

Наличие эффективной оценки снизу позволяет указать теоретически эффективный алгоритм для проверки, выполняется ли соотношение (2) в поле $\mathbb{K}_v$, $v|p$, $p \leq M \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta}_n|)$. Для этого достаточно рассматривать N -е частичные суммы рядов $f_i(\xi)$, где

$$N \leq p^2(p-1) \frac{\kappa B(h, h_n)}{\kappa_v c_3 \ln p} - 1.$$

В качестве приложений теоремы рассматриваются гипергеометрические ряды следующего вида: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn}$, где $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)$, $n \geq 1$. Для доказательства алгебраической независимости таких рядов использованы результаты В. Х. Салихова [7].

Теорема может быть применена к точкам ξ вида

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n p_k^{\gamma_k(n)},$$

где p_k — k -е простое число, а $\gamma_k(n)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая некоторым условиям, которые мы ввиду их громоздкости опускаем. Другим примером служат ряды, рассмотренные в [4].

Список литературы

- [1] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987. [2] Е. Bombieri, *Recent progress in analytic number theory*, vol. 2 (Durham, 1979), Academic Press, London, 1981, 1–68. [3] В. Г. Чирский, *Матем. заметки*, **48:2** (1990), 123–127. [4] В. Г. Чирский, *Арифметические свойства рядов некоторых классов в полях с неархимедовыми нормированиями*, Изд-во мех-мат. ф-та МГУ, М., 2000. [5] D. Bertrand, V. G. Chirskii, J. Yebbou, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **13:2** (2004), 241–260. [6] А. И. Галочкин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1970, № 5, 58–63. [7] В. Х. Салихов, *Докл. АН СССР*, **307:2** (1989), 284–287.

Т. Р. Азаматов (T. R. Azamatov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: azamatov@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
09.07.2007