Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гнеденко, Стохастическая задача максимизации линейного функционала с платой за принятие решений, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:36:01

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ
СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО
ФУНКЦИОНАЛА С ПЛАТОЙ ЗА ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Б. Д. ГНЕДЕНКО

Пусть на полупрямой $\mathbb{R}_+$ задан полный стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, где $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t < \infty}$, и марковский момент $T < \infty$.

Цель работы – это исследование следующей задачи стохастического оптимального управления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть на отрезке $[0, T]$ задан прогрессивно измеримый интегрируемый случайный процесс X и число $\lambda \geq 0$. Определим множество U допустимых управлений, как состоящее из кусочно-постоянных предсказуемых случайных процессов с конечным числом переключений, ограниченных по модулю единицей. Для $u \in U$ рассмотрим следующий процесс $J_{X,u}(t)$:

$$J_{X,u}(t) \triangleq \int_0^t u_s dX_s - \frac{\lambda}{2} \int_0^t |du_s|,$$

где $\int_0^t |du_s|$ – процесс полной вариации u . Определим целевой функционал $f_X(u)$ как математическое ожидание случайной величины $J_{X,u}(T)$:

$$f_X(u) \triangleq \mathbb{E} J_{X,u}(T).$$

Задача состоит в поиске управления $\hat{u} \in U$, максимизирующего функционал $f_X(u)$ по всем управлениям из U .

Начнем с определения множества управлений, лежащих “на краю” множества U :

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что управление $\tilde{u} \in U$ принадлежит множеству $U_1 \in U$, если для любого t $\tilde{u}(t)$ принимает только два значения: 1 или -1 (Р-п.н.).

ТЕОРЕМА 1. Для любого $u \in U$ найдется управление $\tilde{u} \in U_1$ такое, что $f_X(\tilde{u}) \geq f_X(u)$. В частности, если множество решений задачи непусто, то оно содержит элемент из U_1 .

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Проводится индукция по номеру интервала постоянства управления u , начиная с последнего. Показывается, что на каждом шаге индукции рассматриваемое управление u_{n-1} мажорируется (в смысле значения функционала f_X) управлением u_n , равным по модулю единице на всех пройденных индукцией интервалах постоянства u . Дойдя до первого интервала постоянства, по индукции приходим к управлению $\tilde{u}$ из U_1 , мажорирующему u , что служит доказательством теоремы.

Основным результатом работы является следующий критерий оптимальности для управлений из U_1 .

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Управление $\hat{u} \in U_1$ является решением задачи тогда и только тогда, когда для любых моментов остановки τ_1 и τ_2 таких, что $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, Р-п.н. выполнено:*

$$E(J_{\hat{u}}(\tau_2) - J_{\hat{u}}(\tau_1) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \geq -\frac{\lambda}{2} [I(\tau_1 > 0) + P(\tau_2 < T \mid \mathcal{F}_{\tau_1})]. \quad (1)$$

2. *Оптимальное управление $\hat{u} \in U$ является единственным решением задачи тогда и только тогда, когда $\hat{u} \in U_1$ и для любых моментов остановки τ_1 и τ_2 таких, что $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, Р-п.н. выполнено:*

$$E(J_{\hat{u}}(\tau_2) - J_{\hat{u}}(\tau_1) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) > -\frac{\lambda}{2} [I(\tau_1 > 0) + P(\tau_2 < T \mid \mathcal{F}_{\tau_1})]. \quad (2)$$

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПУНКТА 1. *Прямая импликация.* В предположении, что для оптимального управления $\hat{u}$ из U_1 не выполнено свойство (1), строится управление, не равное $\hat{u}$ на множестве ненулевой меры, на котором функционал f_X принимает строго большее значение, чем на оптимальном управлении. Тем самым приходим к противоречию.

Обратная импликация. Наряду с управлением $\hat{u} \in U_1$, для которого выполнено свойство (1), рассматривается произвольное управление $\tilde{u} \in U_1$. Далее исследуются взаимные свойства этих управлений на интервалах, на которых каждое из них постоянно. Объединяя эти интервалы в один, приходим к тому, что $f_X(\tilde{u}) \leq f_X(\hat{u})$.

Пункт 2 доказывается по аналогии с пунктом 1.

Когда момент $T < \infty$ фиксирован, $\lambda \neq 0$, а процесс X представляется в виде $X_t = M_t + g(t)$, где M_t – мартингал, а $g(t)$ – непрерывная детерминированная функция, оптимальное управление удастся построить явным образом, причем оно, в свою очередь, также оказывается детерминированным. Точки, в которых происходят переключения построенного оптимального управления, представляют собой локальные экстремумы функции g , удаленные друг от друга по оси ординат не менее чем на λ . В связи с этим результатом следует отметить работу Е. А. Севастьянова [1], в которой для непрерывной функции строится оптимальное (в смысле L_∞) приближение функцией, имеющей не более n интервалов монотонности. Если для непрерывной функции $g(t)$ и некоторого $\lambda > 0$ оптимальное управление имеет N точек переключения, то эти точки будут определять экстремумы кусочно-монотонного приближения с N интервалами монотонности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. А. Севастьянов // Anal. Math. 1975. V. 1. №2. P. 141–164.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: bgnedenko@science.comcor.ru

Принято редколлегией
14.05.2003