Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Белов, Размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободных первичных алгебр произвольной сигнатуры, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:51:06

РАЗМЕРНОСТЬ ГЕЛЬФАНДА–КИРИЛЛОВА ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ ПЕРВИЧНЫХ АЛГЕБР ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИГНАТУРЫ

А. Я. БЕЛОВ

Функция роста $V_A(n)$ алгебры A определяется как размерность пространства, натянутого на слова длины не выше n . Размерностью Гельфанда–Кириллова алгебры A называют предел $\text{GKdim}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln V_A(n) / \ln n$, если таковой существует. Размерность GKdim не зависит от выбора образующих. Она вычислялась для алгебры общих матриц [1], для свободной алгебры из многообразия, порожденного алгеброй Кэли–Диксона $\mathbb{O}$, а также простой исключительной йордановой алгебры HC_3 в случае, когда $\text{ch}(\mathbb{K}) \neq 2, 3$ [2], [3]. В работах [4], [5] вычислялась размерность Гельфанда–Кириллова для алгебры общих матриц, а также некоторых других относительно свободных алгебр, в частности, из $\text{Var}(\mathbb{O})$; исследовались некоторые близкие асимптотики (показатель роста).

ТЕОРЕМА. Если L – относительно свободная s -порожденная первичная алгебра сигнатуры Ω , то $\text{GKdim}(A) = sn - t$.

Здесь $n+1$ есть минимальный порядок системы тождеств Капелли, выполняющихся в L (многочленом Капелли C_m порядка m называется многочлен, полилинейный и кососимметричный относительно набора из m переменных $x_1, \dots, x_m$), m – размерность (как алгебраического многообразия) группы автоморфизмов $\hat{L} \otimes C(L)^{\text{alg.cl}}$ над централизатором Мартиндейла $C(L)$. Так, размерность группы автоморфизмов алгебры матриц порядка n равна $\dim SL(n) = n^2 - 1$ и если L есть алгебра общих матриц порядка n , то $\text{GKdim}(L) = sn^2 - (n - 1) = (s - 1)n^2 + 1$ в соответствии с результатом К. Прочези и А. В. Гришина.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – представимая алгебра сигнатуры Ω с образующими $a_1, \dots, a_s$, $\{e_i\}$ – базис векторного пространства с операторами, куда она вложена. Пусть, далее, $a_j = \sum_i \lambda_{ij} e_i$, $j = 1, \dots, s$, коэффициенты λ_i порождают ассоциативно-коммутативное кольцо R , A вложена в R -алгебру, являющуюся нётеровым R -модулем. Тогда $\text{GKdim}(A)$ не превосходит степени трансцендентности кольца R .

Пусть D – первичная ассоциативная PI -алгебра. Если D конечна, то D изоморфна алгебре матриц над расширением основного поля. Если D бесконечна, то D представима матрицами порядка n над кольцом многочленов и при этом многообразие $\text{Var}(D) = \mathbb{M}_n^{\mathbb{F}}$, где $\mathbb{F}$ – бесконечное поле (последний случай и предполагается в дальнейшем). В алгебре D выполняется тождество Капелли C_{n^2+1} , но не выполняется C_{n^2} . Формой $\Psi_n(a)$ порядка n от матрицы a называют сумму главных миноров порядка n . Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_k(a) \cdot C_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}; y_0, \dots, y_{n^2}) \\ = \sum_{i_1 < \dots < i_k} C_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}; y_0, \dots, y_{n^2})|_{x_{i_1} a \rightarrow x_{i_1}, \dots, x_{i_k} a \rightarrow x_{i_k}}. \end{aligned}$$

Алгебра D цела над множеством значений операторов $\Psi_k(a)$, где a пробегает множество слов от образующих длины не выше n . Подробнее см. [6]–[9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{M}$ есть пучок когерентных R -модулей на нётеровой аффинной схеме $\text{Spec}(R)$; M есть модуль глобальных сечений, соответствующий $\mathcal{M}$; $\xi_1, \dots, \xi_s$ – образующие M . И пусть для пары точек максимального спектра общего положения (x, y) модули M_x и M_y не изоморфны (как модули с фиксированными образующими над кольцами $R_x / \text{Ann}(M_x)$ и $R_y / \text{Ann}(M_y)$ с фиксированными образующими). Тогда $\text{GKdim}(M) = \dim(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай модулей ранга 1 над примарным кольцом R . Легко видеть, что и условие, и заключение предложения равносильны отсутствию кручения, не лежащего в радикале Джекобсона $J(R)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{L}$ есть когерентный пучок модулей и одновременно пучок алгебр нётерова типа (т.е. являющихся нётеровыми модулями над центром) сигнатуры Ω над аффинной схемой $\text{Spec}(R)$; L есть алгебра глобальных сечений, соответствующая $\mathcal{L}$; $\xi_1, \dots, \xi_s$ — образующие L . И пусть для пары точек общего положения (x, y) соответствующие алгебры L_x и L_y не изоморфны как алгебры с фиксированным набором образующих. Тогда $\text{GKdim}(L) = \dim(R)$.

Пусть $\widehat{L}$ есть центральное расширение Мартиндейла первичной алгебры L сигнатуры Ω , и пусть в L выполняется система разреженных тождеств, а стало быть, и система тождеств Капелли некоторого порядка n . В силу теоремы о ранге [10] $\widehat{L}$ есть n -мерная алгебра над централизатором Мартиндейла $C(L)$. Поэтому алгебра L представима и допускает расширение формами $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}$ есть алгебра нётерова типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. а) Пусть L — первичная алгебра произвольной сигнатуры. Тогда операторная алгебра $D(L)$ также является первичной. Если L к.п. и в ней выполняется система тождеств Капелли, то в $D(L)$ также выполняется система тождеств Капелли и $D(L)$ представима. $\text{Var}(D(L)) = \text{Var}(\mathbb{M}_m)$ и минимальный порядок тождества Капелли, выполняющегося в $D(L)$, есть $m^2 + 1$.

б) Пусть I есть идеал в $D(L)$, порожденный элементами из C_{m^2} , $Z \neq 0 \in I$ — центральный многочлен на $D(L)$. Пусть, далее, $\widehat{D(L)}$ есть расширение $D(L)$ значениями операторов форм $\Psi_j(u_i)$, $R = \mathbb{K}[\{\Psi_j(u_i)\}]$. Тогда оператор $xZ \rightarrow x$ не имеет нетривиального аннулятора и $\widehat{D(L)}$, $\widetilde{L}$, $\widehat{D(L)}I = D(L)I$, $\widehat{L} \cdot I = L \cdot I$, $\widehat{D(L)}Z = D(L)Z$, $\widehat{L} \cdot Z = L \cdot Z$ суть точные нётеровы R -модули.

в) Размерность Гельфанда–Кириллова этих модулей совпадает с размерностью кольца R и с размерностью Гельфанда–Кириллова алгебры L .

Построена многоосновная система $(\widetilde{L}, \Psi)$, состоящая из алгебры $\widetilde{L}$, являющейся нётеровым модулем над центроидом Ψ (нётеровым кольцом) и $\text{GKdim}(\widetilde{L}) = \text{GKdim}(\Psi) = \text{GKdim}(L)$. Имеем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть L есть к.п. первичная алгебра произвольной сигнатуры Ω , в которой выполняется система разреженных тождеств. Тогда L представима. Далее, пусть R есть кольцо представления, $\xi_1, \dots, \xi_s$ — образующие L . И пусть для пары точек общего положения (x, y) соответствующие алгебры L_x и L_y неизоморфны как алгебры с фиксированным набором образующих. Тогда $\text{GKdim}(L) = \dim(R)$.

Пусть G есть группа автоморфизмов $\widehat{L} \otimes C(L)^{\text{alg.cl}}$, m есть размерность G как алгебраического многообразия. Для доказательства основной теоремы заметим, что любой автоморфизм, стабильный на каждой из образующих, тождественен. Выберем подмногообразие представителей в кольце коэффициентов относительно действия группы G . Его размерность равна разности размерностей кольца параметров и группы G . Остается применить предыдущее следствие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Procesi. Rings with Polynomial Identities. New York: Dekker, 1973. [2] С. В. Поликарпов, И. П. Шестаков // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 6. С. 709–723. [3] С. В. Поликарпов // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. № 6. С. 131–141. [4] А. В. Гришин // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 6. С. 608–625. [5] А. В. Гришин // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 5. С. 536–557. [6] А. Ya. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latyshev // J. Math. Sci. (New York). 1997. V. 87. № 3. P. 3463–3575. [7] А. Р. Кемер // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 4. С. 726–753. [8] Ю. П. Размыслов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 143–166. [9] К. А. Зубрилин // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 53–64. [10] L. H. Rowen. Polynomial Identities in Ring Theory. New York: Academic Press, 1980.