Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина, w -функция решения g -го стационарного уравнения КдФ, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:19:08

w -ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ g -ГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ

В. М. БУХШТАБЕР, С. Ю. ШОРИНА

Пусть $t = (t_1 = x, t_2, \dots, t_g)$ и $\partial_k = \partial/\partial t_k$ для $k = 1, \dots, g$. Далее через $u(t)$ мы будем обозначать дифференцируемую функцию, регулярную в $t = 0$, являющуюся решением g -го стационарного уравнения КДФ по x . Рассмотрим уравнение

$$2\partial_x^2 \log w = -u \quad (1)$$

с начальным условием

$$w(0) = 1, \quad \partial_k w(0) = 0, \quad k = 1, \dots, g. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. *Существует решение w уравнения (1), удовлетворяющее (2), такое, что функции*

$$u_k = -2\partial_x \partial_k \log w, \quad k = 1, \dots, g, \quad (3)$$

задают коммутирующее семейство операторов из [1]:

$$\mathcal{L} = \partial_x^2 - u; \quad \mathcal{U}_k = \partial_x^2 \partial_k - \frac{1}{2}(u\partial_k + \partial_k u) - \frac{1}{4}(u_k \partial_x + \partial_x u_k) - \partial_{k+1}, \quad k = 1, \dots, g. \quad (4)$$

Мы считаем, что $\partial_{g+1} = 0$. Заметим, что $u_1 = u$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решения уравнения (1), описанные в теореме 1, будем называть *специальными*.

ЛЕММА 1. *Если w_1 и w_2 — специальные решения, то существует дифференцируемая функция $f(\hat{t})$ такая, что $w_2(t) = w_1(t)f(\hat{t})$, где $\hat{t} = (t_2, \dots, t_g)$, $f(0) = 1$ и $\nabla f(0) = 0$.*

Таким образом, согласно формуле (3) функции u_k не зависят от выбора специального решения w , и поэтому можно положить $\mathbf{u}(t; \xi) = \mathbf{u}(\xi) = \sum_{i=1}^g u_i(t)\xi^i$. Из [1] теперь следует, что для функции $\mathbf{u}(\xi)$ имеет место соотношение

$$\mathbf{u}'(\xi)^2 + 2\mathbf{u}''(\xi)(2 - \mathbf{u}(\xi)) + 4(\xi^{-1} + u)(2 - \mathbf{u}(\xi))^2 = 4\mu(\xi),$$

где $\mu(\xi) = 4\xi^{-1} + \sum_{i=1}^{2g} \mu_i \xi^i$ и все μ_i — константы. Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x . Положим $\mu(\xi, \eta) = 4\xi^{-1} + 4\eta^{-1} + 2\sum_{i=1}^g \mu_{2i} \xi^i \eta^i + \sum_{i=0}^{g-1} \mu_{2i+1}(\xi + \eta)\xi^i \eta^i$ и

$$P(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 \eta^2}{4(\xi - \eta)^2} (-\mathbf{u}'(\xi)\mathbf{u}'(\eta) - (2 - \mathbf{u}(\xi))\mathbf{u}''(\eta) - \mathbf{u}''(\xi)(2 - \mathbf{u}(\eta)) - 2(2 - \mathbf{u}(\xi))(2 - \mathbf{u}(\eta))(\xi^{-1} + \eta^{-1} + 2u) + 2\mu(\xi, \eta)). \quad (5)$$

ЛЕММА 2.

$$P(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g p_{ij} \xi^i \eta^j, \quad (6)$$

где $p_{ij} = p_{ji}$ — функции, зависящие только от t .

ЛЕММА 3. *Имеют место равенства $p_{1i} = u_i$ и $\partial_i p_{jk} = \partial_j p_{ik}$.*

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p_{ij}(t)$ – функции, полученные по формулам (5) и (6). Тогда система уравнений

$$2\partial_i\partial_j \log w = -p_{ij} \quad (7)$$

имеет единственное решение в классе специальных решений уравнения (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Специальное решение уравнения (1), описанное в теореме 2, будем называть w -функцией фиксированного выше решения и стационарного уравнения КдФ.

Приведем явные формулы восстановления w -функции по u . Положим $\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x u(t) dx$. Тогда согласно (1) существует функция $a(t)$ такая, что $w(t) = \exp(a(t) - \varphi(t))$, где $a''(t) = 0$. Следовательно, $a(t) = a_1(\hat{t})x + a_0(\hat{t})$. Условие (2) дает $a_0(0) = 0$, $a_1(0) = 0$ и $\partial_k a_0(0) = 0$, $k = 2, \dots, g$. Из (3) получаем:

$$2\partial_k a_1(\hat{t}) = -u_k + 2\partial_k \int_0^x u(t) dt, \quad k = 2, \dots, g. \quad (8)$$

Система уравнений (8) при начальном условии $a_1(0) = 0$ позволяет однозначно восстановить функцию $a_1(\hat{t})$ по набору функций u_k , $k = 1, \dots, g$. Согласно (7) получаем

$$2\partial_i\partial_j a_0(\hat{t}) = 2\partial_i\partial_j \varphi(t) - 2\partial_i\partial_j a_1(\hat{t})x - p_{ij}(t).$$

Эта система уравнений при начальных условиях $a_0(0) = 1$, $\partial_k a_0(0) = 0$, $k = 1, \dots, g$, позволяет однозначно восстановить функцию $a_0(\hat{t})$ по набору функций u_k , $k = 2, \dots, g$.

Пусть $\sigma(t)$ – гиперэллиптическая функция Клейна рода g и $\zeta_i(t) = \partial_i \log \sigma(t)$, а $\wp_{ij}(t) = -\partial_i\partial_j \log \sigma(t)$. Как показано в [2], функция $2\wp_{gg}(t)$ является решением g -го стационарного уравнения КдФ.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $z \in \mathbb{C}^g$ – такая точка, что $\sigma(z) \neq 0$. Тогда функция

$$w(t) = \frac{\sigma(t+z)}{\sigma(z)} \exp\langle -\zeta(z), t \rangle$$

является w -функцией решения $2\wp_{gg}(t+z)$ стационарного уравнения КдФ.

Доказательство следует из того, что w -функция решения u однозначно восстанавливается по u , и того, что функции $u_i = 2\wp_{g,g-i+1}$ и $p_{ij} = 2\wp_{g-i+1,g-j+1}$ удовлетворяют формулам (5), (7) (см. [2]).

Пусть θ_g – полиномы, описанные в [3], вторые логарифмические производные которых задают рациональные решения высших стационарных уравнений КдФ. Как показано в [4], полином θ_g с точностью до нормировки переменных соответствует рациональному пределу $\hat{\sigma}_g$ для σ -функции рода g . Положим $\hat{\zeta}_i(t) = \partial_i \log \hat{\sigma}_g(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $z \in \mathbb{C}^g$ – такая точка, что $\hat{\sigma}_g(z) \neq 0$. Тогда функция

$$w(t) = \frac{\hat{\sigma}_g(t+z)}{\hat{\sigma}_g(z)} \exp\langle -\hat{\zeta}(z), t \rangle$$

является w -функцией решения $u = -2(\log \theta_g)''$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина // УМН. 2003. Т. 58. №3. С. 187–188. [2] В. М. Бухштабер, В. З. Енольский, Д. В. Лейкин // Функци. анализ и его прил. 1999. Т. 33. №2. С. 1–15. [3] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. №2. P. 1–125. [4] M. Adler, J. Moser // Comm. Math. Phys. 1978. V. 61. P. 1–30.