Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Адамаровы разложения полупростых ассоциативных алгебр,
УМН, 2003, том 58, выпуск 4, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:17:56

АДАМАРОВЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛУПРОСТЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Д. Н. ИВАНОВ

Теорема 2 [1] утверждает, что прямая сумма двух адамаровых алгебр одинаковой размерности является адамаровой алгеброй. В данной работе этот результат обобщается на случай прямой суммы n адамаровых алгебр, где n – порядок некоторой матрицы Адамара. Кроме этого, дается отрицательный ответ на вопрос из [1] – является ли прямая сумма двух матричных алгебр нечетной размерности адамаровой алгеброй. Это подтверждает гипотезу о делимости размерности адамаровой алгебры на 4.

Напомним основные определения. Пусть $\mathbf{A}$ – ассоциативная конечномерная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра, через $\text{Tr}_{\mathbf{A}}$ обозначим след правого регулярного представления $\mathbf{A}$. Тогда $\text{Tr}_{\mathbf{A}} xy$ является симметричной инвариантной формой на $\mathbf{A}$, которую мы будем называть *формой следа*. Известно, что алгебра $\mathbf{A}$ полупроста тогда и только тогда, когда форма следа невырождена на $\mathbf{A}$. Далее будут рассматриваться полупростые алгебры и термин “алгебра”, если не оговорено противное, будет обозначать ассоциативную конечномерную над $\mathbb{C}$ полупростую алгебру. Таким образом, по теореме Веддербарна алгебра $\mathbf{A}$ изоморфна конечной прямой сумме матричных алгебр $M_n(\mathbb{C}) = M_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство неединичных собственных подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, r\}$ образует *ортogonalное разложение* (ОР) алгебры $\mathbf{A}$, если

- (1) все подалгебры $\mathbf{B}_i$ полупросты и содержат единичный элемент $\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$;
- (2) (условие ортогональности) алгебра $\mathbf{A}$ является прямой суммой попарно ортогональных подпространств

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{1}_{\mathbf{A}} \rangle \oplus \mathbf{B}_1^{\circ} \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_r^{\circ},$$

где $\mathbf{B}_i^{\circ} = \{x \in \mathbf{B}_i \mid \text{Tr}_{\mathbf{A}} x = 0\}$.

Если все подалгебры ОР $\mathcal{D}$ коммутативны, то $\mathcal{D}$ называется *коммутативным*. Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* (или просто *ОР типа $\mathbf{B}$*).

Через kM_n будем обозначать прямую сумму k экземпляров алгебры матриц M_n .

Однородное ОР типа $2M_1$ называется *адамаровым разложением*. Алгебра, допускающая адамарово разложение, называется *адамаровой*.

Нам понадобится следующий результат из [1].

ЛЕММА 1. Пусть подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_r\}$ образуют адамарово разложение алгебры $\mathbf{A}$. Пусть $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) = \{e_{i1}, e_{i2}\}$ – примитивные идемпотенты подалгебры $\mathbf{B}_i$, $i = \overline{1, r}$. Тогда

- (1) число подалгебр в адамаровом разложении на единицу меньше размерности алгебры, т.е. $r = \dim \mathbf{A} - 1$;
- (2) $\text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{i1} = \text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{i2} = \frac{1}{2} \dim \mathbf{A}$ для любого $i = \overline{1, r}$, в частности, размерность адамаровой алгебры четна;
- (3) в каждой подалгебре адамарова разложения содержится ровно две инволюции с нулевым следом регулярного представления, причем эти инволюции, взятые по одной из всех подалгебр разложения, образуют базис подпространства $\mathbf{A}^{\circ} = \{x \in \mathbf{A} \mid \text{Tr}_{\mathbf{A}} x = 0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Прямая сумма n адамаровых алгебр одинаковой размерности является адамаровой алгеброй, если существует матрица Адамара порядка n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{A}_n$ — прямая сумма адамаровых алгебр $\mathbf{A}_i$ одинаковой размерности $\dim \mathbf{A}_i = m$. Тогда для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}$: $\text{Tr}_A x = \text{Tr}_{A_1} x_1 + \dots + \text{Tr}_{A_n} x_n$.

Пусть инволюции $a_j(i)$ порождают подалгебры адамарова разложения в алгебре $\mathbf{A}_i$, $j = 1, \dots, m-1$, $i = 1, \dots, n$. В силу леммы 1, $\text{Tr}_{A_i} a_j(i) = 0$. Пусть $H = (h_{ij})$ — нормализованная матрица Адамара порядка n , т.е. $h_{ij} = \pm 1$ и $H \cdot H^t = E_n$ (E_n — единичная матрица), причем первая строка (и столбец) матрицы H состоят из одних единиц. Рассмотрим следующую систему инволюций:

$$\begin{aligned} b_{js} &= (h_{s1}a_j(1), \dots, h_{sn}a_j(n)), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad s = 1, \dots, n; \\ c_i &= (h_{i1}\mathbf{1}_{A_1}, \dots, h_{in}\mathbf{1}_{A_n}), \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Легко видеть, что эти инволюции ортогональны единичному элементу $\mathbf{1}_A$ и попарно ортогональны (относительно формы следа). Так как их число равно $(m-1)n + (n-1) = mn - 1 = \dim \mathbf{A} - 1$, то подалгебры, порожденные указанными инволюциями, образуют адамарово разложение алгебры $\mathbf{A}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если алгебра $M_{n_1} \oplus M_{n_2}$ адамарова, то n_1 и n_2 четны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{A} = M_{n_1} \oplus M_{n_2}$ — адамарова алгебра. Положим $n = \dim \mathbf{A} = n_1^2 + n_2^2$ и $\text{Tr}_A = \text{Tr}$. В силу леммы 1, n четно. Для $X = (X_1, X_2) \in \mathbf{A}$ имеем

$$\text{Tr } X = n_1 \text{tr } X_1 + n_2 \text{tr } X_2,$$

где tr обозначает след матрицы.

Случай $n_1 = n_2 = 1$ тривиален, так как очевидно, что алгебра $M_1 \oplus M_1$ неадамарова. Поэтому далее без ограничения общности предполагаем $n_1 > 1$.

Инволюции $A_i = (A_{i1}, A_{i2})$, $i = 1, \dots, n-1$, выбранные по одной из каждой подалгебры адамарова разложения, вместе с единичным элементом $\mathbf{1}_A$ в силу леммы 1 образуют ортогональный базис алгебры $\mathbf{A}$. Следовательно, для любого $X = (X_1, X_2) \in \mathbf{A}$

$$n \text{Tr } X^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Tr } X A_i)^2 + (\text{Tr } X)^2. \quad (1)$$

Подставляя в (1) $X = (E_{n_1}, 0)$, где E_{n_1} — единичная матрица, получим

$$nn_1^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Tr } A_{i1})^2 + n_1^4.$$

Отсюда, после сокращения на n_1^2 и учитывая, что $n = n_1^2 + n_2^2$, выводим

$$n_2^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\text{tr } A_{i1})^2.$$

Так как след инволютивной матрицы есть целое число, то в силу неравенства $n-1 = n_1^2 + n_2^2 - 1 > n_2^2$ получаем, что для некоторого i : $\text{tr } A_{i1} = 0$. Но след инволютивной матрицы A_{i1} может быть равен нулю, только если ее порядок n_1 четен. Значит, $n_2^2 = n - n_1^2$ также четно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Автор предполагает, что если алгебра $\mathbf{A} = M_{n_1} \oplus M_{n_2}$ адамарова, то $n_1 = n_2$ и любое адамарово разложение алгебры $\mathbf{A}$ содержит ее центральную двумерную подалгебру.

Автор благодарен проф. М. В. Зайцеву за поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Н. Иванов // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 12. С. 83–102.