Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Высшие порядки Брюа, формула Эйлера–Якоби и тождество Турнбулла, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:39:17

ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ БРЮА, ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА–ЯКОБИ И ТОЖДЕСТВО ТУРНБУЛЛА

Г. Г. Ильюта

Один из подходов к кодированию стратов вещественного стратифицированного многообразия комбинаторными объектами основан на замене условия ортогональности каких-либо определяемых стратом векторов $\sum a_i b_i = 0$ условием комбинаторной ортогональности: вектор $(\dots, \operatorname{sgn} a_i \operatorname{sgn} b_i, \dots)$ либо нулевой, либо имеет координаты разных знаков (и затем последнее условие объявляется аксиомой в определении комбинаторного объекта, сопоставляемого страту). Например, тождество Грассмана–Плюккера приводит к ориентированным матроидам (о.м.) [1]. Заметка содержит тесно связанное с предыдущим примером обобщение следующего факта: перестановки на $\overline{m} = \{1, \dots, m\}$ кодируют компоненты дополнения к конфигурации группы кос $\{y_i - y_j = 0, i, j \in \overline{m}\}$. Роль обобщенной конфигурации группы кос играет конфигурация гиперплоскостей (обобщающая дискриминантную конфигурацию Манина–Шехтмана [2]), определяемая равенством 0 разделенных разностей (р.р.) по $(n+1)$ -подмножествам общего набора узлов интерполяции $X_{\overline{m}} = \{X_1, \dots, X_m\} \subset \mathbb{R}^k$, а роль обобщенных перестановок играют элементы определяемых ниже высших порядков Брюа (в.п.Б.) $B(M, n, r, s)$ (M – о.м. ранга $k+1$ на $\overline{m}$, отвечающий набору узлов $X_{\overline{m}}$; для альтернированного (а.) о.м. M и $r = s = 1$ получаем $B(m, n, k)$ из [3], для $k = 1 - B(m, n)$ из [2], для $n = 1$ – слабый порядок Брюа на симметрической группе S_m).

Перестановка π определяется множеством инверсий $\{(ij) : i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$, причем I является множеством инверсий некоторой перестановки, если и только если для любых $i, j, k \in \overline{m}, i < j < k$,

$$\{(ik)\} \neq I \cap \{(ij), (ik), (jk)\} \neq \{(ij), (jk)\}.$$

Это условие является комбинаторным вариантом соотношения ортогональности для р.р. $\Delta_{ij} = (y_i - y_j)/(x_i - x_j), x_1 < \dots < x_m$,

$$(x_i - x_j)\Delta_{ij} - (x_i - x_k)\Delta_{ik} + (x_j - x_k)\Delta_{jk} = 0.$$

В предложении 1 как следствие детерминантного тождества Турнбулла [4] получено обобщение этого тождества для р.р. из [5], а замена его комбинаторной аксиомой приводит к определению $B(M, n, r, s)$. Над $\mathbb{C}$ тождества для р.р. приводят к интересным связям между расслоениями с пространством общих наборов узлов интерполяции в качестве базы и дискриминантными конфигурациями $\{\text{р.р.} = 0\}$ в качестве слоев.

В частном случае $X_i = (x_i, \dots, x_i^k)$ (для $r = s = 1$ он изучался в [3]) нужное тождество для р.р. является следствием формулы Эйлера–Якоби (что составляет содержание предложения 2): если для многочленов $g, f_1, \dots, f_n$ от $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$ $\deg g < \sum \deg f_i - n$ и корни $Y', Y'', \dots$ системы $f_1 = \dots = f_n = 0$ невырождены, то сумма вычетов Гротендика формы $gdY_n/f_1 \dots f_n$ равна 0, т.е. векторы $(g(Y'), g(Y''), \dots)$ и $(1/J(Y'), 1/J(Y''), \dots)$ ортогональны (J – якобиан отображения $(f_1, \dots, f_n)$), и отсюда можно перейти к комбинаторной аксиоме.

Определим $B(M, n, r, s)$. Пусть M – невырожденный о.м. ранга $k+1$ на $\overline{m}$, рассматриваемый как набор ориентаций его базисов $\epsilon_M: C(m, k+1) \rightarrow \{-1, 1\}$ (базисом является любой элемент $C(m, k+1)$ – множества всех $(k+1)$ -подмножеств в $\overline{m}$). Элементом в.п.Б. $B(M, n, r, s)$ назовем отображение $\epsilon: C(m, n+1) \rightarrow \{-1, 1\}$, удовлетворяющее условию: для любого $N \in C(m, n+r+1)$, непересекающихся r -подмножества K и $(k+1)$ -подмножеств $K_1, \dots, K_s$ в N и подмножеств множества представителей π смежных классов группы перестановок множества $K \cup K_1 \cup \dots \cup K_s$ по прямому произведению групп перестановок множеств K_i отображение $\pi \rightarrow \operatorname{sgn} \pi \epsilon(N \setminus \pi^{-1}(K)) \prod_i \epsilon_M(\pi^{-1}(K_i))$ не является константой (частичный порядок вводится по одношаговому включению множеств $\epsilon^{-1}(-1)$, геометрически отвечающему переходу через гиперплоскость $\text{р.р.} = 0$).

Определим р.р. из [5]. Пусть любое $(k+1)$ -подмножество $X_T \subset X_{\overline{m}} \subset \mathbb{R}^k, T \in C(m, k+1)$, аффинно независимо, т.е. не равен нулю ориентированный объем $d(T)$ симплекса с вершинами

из X_T и невырожден соответствующий о.м. M , для которого $\epsilon_M(T) = \operatorname{sgn} d(T)$. Р.р. функции $h((y_{ij}))$, $i, j \in \bar{k}$, определим формулой $\Delta_L[h] = \sum h(X_I) / \prod_{j \in L \setminus I} d(X_I, X_j)$, где суммирование проводится по всем перестановкам k -подмножеств $I \subset L \in C(m, n+1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для р.р. $\Delta_L[h]$ справедливо тождество

$$\sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \Delta_{N \setminus \pi^{-1}(K)}[h] \prod_i d(\pi^{-1}(K_i)) = 0.$$

Если для любого $L \in C(m, n+1)$ $\Delta_L[h] \neq 0$, то $\{\epsilon(L) = \operatorname{sgn} \Delta_L[h]\} \in B(M, n, r, s)$.

Обозначим через $\omega(A, B)$ и $V(A)$ произведение всех разностей $a - b$, $a \in A, b \in B$, и $a, b \in A$, $a \neq b$. Пусть $X_{\overline{m}} \subset \mathbb{R}$, $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{k+1j})$, $Y = Y_{\overline{r}} \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_s$, $X = X_K \cup X_{K_1} \cup \dots \cup X_{K_s}$, $g(Y, Z_{\overline{r}}) = \omega(Z_{\overline{r}}, Y_{\overline{r}}) V(Y_{\overline{r}}) \prod_j \omega(Y_{\overline{r}}, Y_j) V^2(Y_j) \prod_{i < j} \omega(Y_i, Y_j)$, $f_l = \omega(y_l, X)$, $l = 1, \dots, r$, $f_{ij} = \omega(y_{ij}, X)$, $i = 1, \dots, k+1$, $j = 1, \dots, s$. Из формулы Эйлера–Якоби вытекает, что при $k + (r+1)/2 > t$ сумма вычетов формы $gdY / \prod f_i \prod f_{ij}$ равна 0, и, домножая эту сумму на $F(Z_{\overline{r}}) V(X) / \omega(Z_{\overline{r}}, X_N)$ и интегрируя (т.е. берем сумму вычетов по Z_T для любой F), получим при $k = t$ следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеет место тождество

$$\sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \int (F(Z_k) / \omega(Z_k, X_{N \setminus \pi^{-1}(K)})) dZ_k \prod_j V(X_{\pi^{-1}(K_j)}) = 0. \quad (1)$$

Если для любого $L \in C(m, n+1)$ интегралы для X_L из (1) не равны 0, то $\{\epsilon(L) = \operatorname{sgn}(\text{интеграл для } X_L \text{ из (1)})\} \in B(M, n, k, s)$ для а.о.м. M ранга $k+1$ на $\overline{m}$.

Отметим, что для $F(Z) = f(Z) V(Z)$ интегралы из (1) приводят к р.р., связанным с симметризатором Якоби и интерполяцией по многочленам Шуберта [6], а для симметрической функции f и $F(Z) = f(Z) V^2(Z)$ — к р.р., связанным с симметризатором Сильвестра и интерполяцией по симметрическим функциям [6], [3], которую можно рассматривать как внешнюю k -степень интерполяции Ньютона. Полагая $F = f$, приходим к симметрическим k -степеням интерполяции (действие других симметризаторов Юнга на интерполяцию реализуются домножением f на подходящие комбинации определителей Вандермонда). В обоих случаях в качестве базиса интерполяции можно взять многочлены Макдональда $P_{\lambda}(Y_k; q, t)$ (в первом случае $\lambda_1 \leq n - k$, а во втором — $\lambda_1 \leq n - 1$) и в качестве узлов — все выборки по k элементов из $X_{\overline{n}}$ без повторений в первом случае и с повторениями во втором (результаты из [7] позволяют получить аналогичные факты для многочленов Макдональда–Корнвиндера).

Не вполне формально содержание заметки можно представить как изучение операции “опускания степени в индекс”: $x^i \rightarrow x_i$. Например, матрица интерполяционной системы в базисе из мономальных симметрических функций m_{λ} [6], [3] переходит в матрицу Зелевинского–Штурмфельса [8]. Назовем мультисимметрическим многочленом Макдональда $P'_{\lambda}((x_{ij}); q, t)$ результат действия этой операции на многочлен Макдональда $P_{\lambda}(x_1, x_2, \dots; q, t)$. Базисы $\{m_{\lambda}\}$ и $\{P_{\lambda}\}$ связаны верхнетреугольной матрицей, той же матрицей связаны элементы матрицы Зелевинского–Штурмфельса и $\{P'_{\lambda}\}$, и поэтому из [8] получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Произведение максимальных миноров матрицы (x_{ij}) , $i = 0, \dots, n - k$, $j = 1, \dots, n$, равно $\det(P'_{\lambda}(X_I; q, t))$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $n - k \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Björner, M. Las Vergnas. Oriented Matroids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. [2] Y. Manin, V. Schechtman // Adv. Stud. Pure Math. 1989. V. 17. P. 289–308. [3] Г. Г. Ильюта // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 217–218. [4] B. Leclerc // Adv. Math. 1993. V. 100. P. 101–132. [5] M. Neamtu // SIAM J. Numer. Anal. 1992. V. 29. P. 1435–1445. [6] A. Lascoux. Interpolation // <http://phalanstere.univ-mlv.fr/al>. [7] K. Mimachi // Duke Math. J. 2001. V. 107. P. 265–281. [8] B. Sturmfels, A. Zelevinsky // Adv. Math. 1993. V. 98. P. 65–112.