Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Власов, О некоторых спектральных вопросах, возникающих в теории дифференциально-разностных уравнений, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:36:52

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ВОПРОСАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Власов

В предлагаемой заметке рассмотрены некоторые спектральные вопросы, естественно возникающие в теории дифференциально-разностных уравнений, включающие в себя изучение полноты и базисности Рисса системы экспоненциальных (элементарных) решений, а также установлены оценки (в определенном смысле неуклучшаемые) сильных решений упомянутых уравнений.

Рассмотрим следующую начальную задачу

$$(1) \quad \sum_{j=0}^n \left(B_j u(t - h_j) + D_j \frac{du}{dt}(t - h_j) \right) + \int_0^h K(s) u(t - s) ds = 0, \quad t > 0,$$

$$(2) \quad u(t) = y(t), \quad t \in [-h, 0], \quad u(+0) = \varphi_0 = y(-0).$$

Здесь B_j, D_j ($j = 0, 1, \dots, n$) – матрицы размера $m \times m$ с постоянными комплексными элементами, числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, элементы $K_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) матрицы $K(s)$ принадлежат пространству $L_1(0, h)$.

Обозначим через $l(\lambda)$ характеристический квазимногочлен (см. [1], [4]) уравнения (1), через λ_q – нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные в порядке возрастания модулей, через ν_q – их кратности, через Λ – множество всех нулей функции $l(\lambda)$, через $y_{q,j,s}(t)$ ($j = 1, 2, \dots, p_q, s = 0, 1, \dots, r_{pq}$) – экспоненциальные решения (см. [3], [4]) уравнения (1).

Обозначим через $W_{2,\gamma}^p((a, b), \mathbb{C}^m)$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$, $p = 1, 2, \dots$, весовые пространства Соболева вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$, снабженные нормами

$$(3) \quad \|u\|_{W_{2,\gamma}^p(a,b)} \equiv \left(\int_a^b \exp(-2\gamma t) \left(\sum_{j=0}^p \|u^{(j)}(t)\|_{\mathbb{C}^m}^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Здесь и в дальнейшем полагаем $W_{2,0}^p = W_2^p$, $u^{(p)}(t) = \frac{d^p}{dt^p} u(t)$, $p = 1, 2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W_{2,\gamma}^1((-h, +\infty), \mathbb{C}^m)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}_+$, назовем сильным решением задачи (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при почти всех $t \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, а также условию (2).

ЛЕММА 1. Пусть $\det D_0 \neq 0$. Тогда $\kappa_+ = \sup_{\lambda_q} \operatorname{Re} \lambda_q < \infty$ и для любого $\gamma \geq \kappa_+ + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) задача (1), (2) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^1((-h, +\infty), \mathbb{C}^m)$ для произвольной вектор-функции $y(t) \in W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$, причем для ее решения $u(t)$ справедливо неравенство

$$(4) \quad \|u\|_{W_{2,\gamma}^1(-h, +\infty)} \leq d_\varepsilon \|y\|_{W_2^1(-h, 0)}$$

с постоянной d_ε , не зависящей от функции $y(t)$.

Принимая во внимание лемму 1, введем аналогично [2] полугруппу $\mathbb{V}_t$ ограниченных операторов, действующих в пространстве $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$ согласно правилу $(\mathbb{V}_t y)(s) = u(t + s)$, $t \geq 0, s \in [-h, 0]$, где $u(\cdot)$ – решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $y(s)$.

ЛЕММА 2. Пусть $\det D_0 \neq 0$. Тогда семейство операторов $\mathbb{V}_t$ ($t \geq 0$) образует C^0 – полугруппу в пространстве $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$ с генератором $\mathbb{D}$, имеющим область определения

$$\operatorname{Dom}(\mathbb{D}) = \left\{ \varphi \in W_2^2((-h, 0), \mathbb{C}^m), \sum_{j=0}^n (B_j \varphi(-h_j) + D_j \varphi^{(1)}(-h_j)) + \int_0^h K(s) \varphi(-s) ds = 0 \right\}$$

и действующим по правилу $(\mathbb{D}\varphi)(s) = \varphi^{(1)}(s)$, $s \in (-h, 0)$, причем решения $y_{q,j,s}(t)$ являются его корневыми векторами, отвечающими собственным значениям λ_q .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-00333, 96-15-96091).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. Тогда:

1. резольвента $R(\lambda, \mathbb{D})$ оператора $\mathbb{D}$ является конечномероморфной, а система корневых векторов $\{y_{q,j,s}(t)\}$ оператора $\mathbb{D}$ полна и минимальна в пространстве $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$;
2. конечны величины $\varkappa_- = \inf_{\lambda_q \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda_q$, $N = \max_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$;
3. существуют положительные постоянные δ и Δ , а также последовательность отрезков $r_n = (t + ic_n)$, $t \in [\varkappa_- - \beta, \varkappa_+ + \beta]$, $\beta > 0$, $0 < \delta \leq c_{n+1} - c_n \leq \Delta < +\infty$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежащих области голоморфности резольвенты $R(\lambda, \mathbb{D})$, таких, что количество μ_n нулей λ_q (с учетом кратности), лежащих в прямоугольниках Γ_n , сторонами которых являются отрезки r_n и r_{n+1} , а также отрезки $(\varkappa_- - \beta) + i\tau$, $(\varkappa_+ + \beta) + i\tau$, $\tau \in [c_n, c_{n+1}]$, равномерно ограничено по n :

$$(5) \quad \max_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n \leq M;$$

4. система подпространств $\mathcal{W}_n = \mathcal{P}_n W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\mathcal{P}_n$ – рессовские спектральные проекторы оператора $\mathbb{D}$, отвечающие контурам $\partial\Gamma_n$ (границам Γ_n), образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, причем $\inf_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$.

Тогда система подпространств $V_{\lambda_q} = \operatorname{Span}\{y_{q,j,s}(t), j = \overline{1, p_q}; s = \overline{0, r_{pq}}\}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. Тогда для любого сильного решения $u(t)$ задачи (1), (2) выполнено неравенство

$$(6) \quad \|u(t+\cdot)\|_{W_2^1(-h,0)} \equiv \|(\nabla_t u)(s)\|_{W_2^1(-h,0)} \leq d(t+1)^{M-1} \exp(\varkappa_+ t) \|y\|_{W_2^1(-h,0)}, \quad t \geq 0,$$

с постоянной d , не зависящей от начальной функции $y(s)$, и постоянной M , определяемой в пункте 3 теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда для любого сильного решения $u(t)$ задачи (1), (2) справедливо неравенство вида (6), в котором постоянная M заменяется на постоянную $N = \max_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $\inf_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$, $K(s) \equiv 0$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2, причем (6) справедливо с постоянной $M = N = \max_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оценка, аналогичная (6), для которой величина $\varkappa_+$ заменяется на $(\varkappa_+ + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, давно и хорошо известна (см. [1], [2]). В этой связи возникал [2] вопрос: можно ли положить $\varepsilon = 0$? Теоремы 2 и 3 дают в определенном смысле утвердительный ответ на данный вопрос.

В заключение отметим, что теоремы 1–3 и их следствия существенно усиливают и развивают соответствующие результаты из [3], [4]. При ином понимании решений базисность и полнота экспоненциальных решений в пространстве $\mathbb{C}^m \oplus L_2((-h, 0), \mathbb{C}^m)$ рассматривалась в [5].

Автор благодарит А. Г. Костюченко за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
- [2] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
- [3] Власов В. В. // Известия вузов. Математика. 1996. № 1. С. 22–35. [4] Власов В. В. // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 143–144. [5] Verduyn Lunel S., Yakubovich D. V. // Integr. Eq. & Oper. Theory. 1997. V. 27. P. 347–378.

Московский физико-технический институт

Принято редколлегией
03.06.1998