Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Матевосян, О единственности решений задачи Робэна для системы теории упругости в полупространстве, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:07:43

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РОБЭНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

О. А. МАТЕВОСЯН

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Положим $x = (x', x_n)$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; тогда $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ – “открытое полупространство” с границей $\partial\mathbb{R}_+^n := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} \equiv \mathbb{R}^{n-1}$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Рассмотрим стационарную линейную систему теории упругости

$$Lu \equiv (Lu)_i = \sum_{j,k,h=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

в области $\Omega \equiv \mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ с границей $\partial\Omega := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$. Здесь и далее суммирование проводится по повторяющимся индексам от 1 до n . Предполагается, что коэффициенты постоянны и выполнены условия: $a_{kh}^{ij} = a_{hk}^{ji} = a_{ih}^{kj}$, $\lambda_1 |\xi|^2 \leq a_{kh}^{ij} \xi_k^i \xi_h^j \leq \lambda_2 |\xi|^2$, где ξ – произвольная симметрическая матрица $\{\xi_k^i\}$, $\xi_k^i = \xi_i^k$, $|\xi|^2 = \xi_k^i \xi_k^i$, λ_1, λ_2 – положительные постоянные.

Для системы (1) будем рассматривать задачу Робэна: найти вектор-функцию $u(x)$, удовлетворяющую системе (1) в области Ω и однородному граничному условию

$$\sigma(u) + \tau(x)u(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2)$$

где $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \dots, \sigma_n(u))$, $\sigma_i(u) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \nu_k$, $i = 1, \dots, n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\tau(x)$ – бесконечно гладкая функция с равномерно ограниченными производными на $\partial\Omega$, $\tau \geq 0$, $\tau \not\equiv 0$.

Положим $D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Пусть $\Omega_R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$,

$$D(u(x), \Omega) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx, \quad E(u(x), \Omega) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 dx.$$

Краевые задачи для системы теории упругости в ограниченных областях хорошо изучены в монографии Г. Фикеры [1]. В работах В. А. Кондратьева и О. А. Олейник [2], [3] для ограниченных и широкого класса неограниченных областей установлены обобщения неравенств Корна и Харди, с помощью которых исследованы основные краевые задачи для системы теории упругости. Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле $D(u(x), \Omega)$ или интеграла энергии $E(u(x), \Omega)$, либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \rightarrow \infty$.

В заметке изучаются свойства обобщенных решений задачи Робэна для системы теории упругости в полупространстве с условием конечности весового интеграла энергии:

$$E_a(u(x), \Omega) \equiv \int_{\Omega} |x|^a \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R}^1.$$

При том же условии на поведение решения на бесконечности в разных классах неограниченных областей автором [4], [5] изучены вопросы единственности и найдены размерности пространства решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи Робэна для системы (1) в Ω с граничным условием (2) на $\partial\Omega$ будем называть вектор-функцию $u(x) \in \mathring{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ такую, что для всякой вектор-функции $\psi(x) \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x_k} dx + \int_{\partial\Omega} \tau(x) u_i(x) \psi_i(x) ds = 0.$$

ЛЕММА. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в Ω , удовлетворяющее граничному условию (2) и неравенству $D(u(x), \Omega_R) \leq C(1 + R^m)$, где C – некоторая положительная постоянная, $m \geq 0$ – целое число. Тогда $u(x)$ – многочлен степени не выше m , т.е. $u(x) = P(x)$, $\text{ord } P(x) \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма является некоторым аналогом теоремы Лиувилля для системы уравнений и справедлива для общих эллиптических систем по Дуглису–Ниренбергу с постоянными коэффициентами. В случае, когда $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$, она доказана в [6].

Доказательство при $\Omega \equiv \mathbb{R}_+^n$ аналогично. Именно в теории эллиптических систем установлено неравенство Бернштейна:

$$\int_{|x| \leq 1/2} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x)|^2 dx \leq C_1 \int_{|x| \leq 1} |u(x)|^2 dx, \quad l \geq 1, \quad (3)$$

где постоянная C_1 не зависит от u .

Если $u(x)$ является решением однородной эллиптической системы с постоянными коэффициентами в полушаре $|x| \leq 1$, $x_n > 0$ и при $x_n = 0$ удовлетворяет нулевым краевым условиям Шапиро–Лопатинского [7] (более подробно см. [8]), то, сделав в (3) замену $x = \lambda y$, получим в силу однородности систем и краевых условий

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{|x| \leq \lambda/2} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x)|^2 dx \leq \lambda^{-l} \int_{|x| \leq \lambda} |u(x)|^2 dx \\ &\leq 2\lambda^{-l} \left(\int_{|x| \leq \lambda} |u(x) - C|^2 dx + \int_{|x| \leq \lambda} C^2 dx \right) \\ &\leq 2\lambda^{-l} \left(C\lambda^2 \int_{|x| \leq \lambda} |\nabla u(x)|^2 dx + C^2 \lambda^n \right), \end{aligned}$$

из условий леммы имеем $I(\lambda) \leq 2\lambda^{-l}(C\lambda^2\lambda^m + C^2\lambda^n)$.

Взяв $l > \max\{2 + m, n\}$ и устремив $\lambda \rightarrow \infty$, получим $D^\alpha u = 0$ при $|x| \leq 1$. Следовательно, $u(x)$ является многочленом степени меньше l при $|x| \leq 1$. Из условия $|D(u(x), \Omega_R)| \leq C(1 + R^m)$ вытекает, что степень такого многочлена не выше m . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x)$ является обобщенным решением задачи Робэна для системы (1) в Ω с граничным условием (2) на $\partial\Omega$ и с условием $E(u(x), \Omega) < \infty$. Тогда $u(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Задача Робэна для системы (1) в Ω с граничным условием (2) на $\partial\Omega$ и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, имеет:

- (i) только тривиальное решение при $-n \leq a < \infty$;
- (ii) n линейно независимых решений при $-2 - n \leq a < -n$.

ТЕОРЕМА 3. Задача Робэна для системы (1) в Ω с граничным условием (2) на $\partial\Omega$ и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, $r \geq 2$, где

$$k(r, n) = n \left(\frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-2)!}{n!(r-2)!} - \frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!} \right), \quad k(0, n) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Фикера. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. [2] В. А. Кондратьев, О. А. Олейник // УМН. 1988. Т. 43. №5. С. 55–98. [3] V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik // Rend. Mat. Appl. (7). 1990. V. 10. P. 641–666. [4] О. А. Матевосян // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №6. С. 806–811. [5] О. А. Матевосян // УМН. 2003. Т. 58. №2. С. 169–170. [6] A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 503–538. [7] С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. М.: ИЛ, 1962. [8] C. B. Morrey. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. New York: Springer-Verlag, 1966.