Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Р. Мусин, Проблема двадцати пяти сфер, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:42:13

ПРОБЛЕМА ДВАДЦАТИ ПЯТИ СФЕР

О. Р. Мусин

1. Контактным числом τ_n называют наибольшее число непересекающихся и одинакового радиуса сфер в $\mathbb{R}^n$, которые одновременно касаются еще одной сферы того же радиуса. Очень образно оно называется по-английски – kissing number.

Очевидно, что $\tau_2 = 6$. Число τ_3 явилось предметом знаменитой дискуссии 1694 г. между И. Ньютоном и Д. Грегором. Ньютон считал, что правильный ответ – 12, а его оппонент, что 13. Как следствие этой дискуссии в математике появилась *проблема тринадцати сфер*. Полное доказательство того, что $\tau_3 = 12$, появилось лишь в 1953 г. в работе ван дер Вардена и Шютте.

Легко показать, что $\tau_4 \geq 24$. Рассмотрим сферы единичного радиуса с центрами в точках $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0, 0)$, где знаки и координаты можно переставлять всеми возможными способами. Все эти 24 сферы касаются единичной сферы с центром в начале координат.

В 1963 г. Кокстер, наряду с другими оценками для τ_n , $n \leq 8$, получил оценку $\tau_4 \leq 26$. (Доказательство Кокстера использовало одну гипотезу, которая была доказана Бёрёкки в 1978 г.) Значительный прорыв в проблеме верхней оценки для контактных чисел произошел в 1970-х гг. [1]. В 1979 г. независимо появились работы [2], [3], где с помощью метода Дельсарта было доказано, что $\tau_8 = 240$ и $\tau_{24} = 196\,560$. Как оказалось, это единственные размерности, где этот метод дает точный результат. В остальных случаях (даже для $n = 3$) верхняя оценка превышает нижнюю. В работе [3] также было показано, что $\tau_4 \leq 25$. Таким образом, взамен проблемы тринадцати сфер в размерности 3 появилась *проблема двадцати пяти сфер* в размерности 4.

Целью настоящей заметки является решение этой проблемы.

ТЕОРЕМА. $\tau_4 = 24$.

2. Контактное число может быть определено по другому: τ_n – это наибольшее число точек, которые можно расположить на единичной сфере S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы угловое расстояние между любыми двумя из них было не меньше 60° .

Рассмотрим множество точек $M = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$, на единичной сфере S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Пусть ϕ_{ij} – сферическое (угловое) расстояние между точками p_i и p_j . Обозначим $t_{ij} = \cos \phi_{ij} = p_i p_j$, тогда $t_{ii} = 1$.

Хорошо известно, что (t_{ij}) – матрица Грама – является неотрицательно определенной. Шёнберг [4] обобщил этот факт и доказал, что матрица (g_{ij}) также является неотрицательно определенной, где $g_{ij} = G_k^{(n)}(t_{ij})$, а $G_k^{(n)}$ – ультрасферический многочлен (многочлен Гегенбауэра). Для $n = 4$ $G_k^{(n)}(t) = U_k(t) = \frac{\sin(k+1)\phi}{(k+1)\sin\phi}$, $t = \cos\phi$, т.е. U_k – нормированные ($U_k(1) = 1$) многочлены Чебышёва второго рода. Для неотрицательно определенной матрицы сумма ее элементов не меньше нуля, т.е. $\sum_{i,j} G_k^{(n)}(t_{ij}) \geq 0$. Если $f(t) = a_0 + a_1 G_1^{(n)}(t) + \dots + a_d G_d^{(n)}(t)$, где все $a_k \geq 0$, $a_0 > 0$, то $F(M) = \sum_{i,j} f(t_{ij}) \geq a_0 N^2$.

В нашем случае $t_{ij} = \cos \phi_{ij} \leq \cos 60^\circ = 1/2$, $i \neq j$. Поэтому для t_{ij} множество возможных значений $A = [-1, 1/2] \cup \{1\}$. Пусть $A_+ = \{t \in A : f(t) > 0\}$. Тогда $F(M) \leq \sum_{t_{ij} \in A_+} f(t_{ij})$. Правая часть этого неравенства содержит N слагаемых $F_i = f(1) + f(t_{ij_1}) + \dots + f(t_{ij_m})$, $t_{ij_k} \in A_+$. Обозначим как $f_{\max}$ максимально возможную для таких F_i величину. Тогда $F(M) \leq f_{\max} N$. Получаем: $f_{\max} N \geq F(M) \geq a_0 N^2$. Итак, доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $a_0 N \leq f_{\max}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работах [2], [3] это предложение применялось для $A_+ = \{1\}$.

3. Зададим следующий многочлен 9-й степени:

$$f(t) = 53.76t^9 - 107.52t^7 + 70.56t^5 + 16.384t^4 - 9.832t^3 - 4.128t^2 - 0.434t - 0.016.$$

Разложение f по $U_k = G_k^{(4)}$ имеет вид:

$$f = U_0 + 2U_1 + 6.12U_2 + 3.484U_3 + 5.12U_4 + 1.05U_9.$$

Многочлен f имеет на интервале $(-1, 1)$ два корня: $t_0 = -0.6079\dots$ и $1/2$. Если $t \in (t_0, 1/2)$, то $f(t) < 0$ и функция $f(t)$ строго убывает на интервале $(-1, t_0)$, т.е. $A_+ = [-1, t_0] \cup \{1\}$.

Чтобы применить предложение для $n = 4$ и $N = \tau_4$, необходимо оценить $f_{\max}$.

ЛЕММА. $f_{\max} = f(1) + 2f(\cos 150^\circ) = 24.864396\dots$

Из этой леммы сразу следует доказательство теоремы. Поскольку $a_0 = 1$, то из предложения вытекает $N \leq f_{\max}$, т.е. $24 \leq \tau_4 \leq f_{\max} < 25$, и $\tau_4 = 24$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Коэффициенты a_k многочлена $f = \sum a_k U_k$ были найдены с помощью линейного программирования. Минимизировалась оценка на $f_{\max}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть на S^3 задано множество точек $Q = p_1, \dots, p_m, t_{ij} \leq 1/2$, если $i \neq j$. Для произвольной точки $p_0 \in S^3$ определена функция: $h(p_0, Q) = f(1) + f(t_{01}) + \dots + f(t_{0m})$, где $t_{0k} = p_0 p_k$. Для того чтобы оценить $f_{\max}$, требуется найти максимум функции $h(P)$, $P = \{p_0\} \cup Q$, зависящей от p_0 , m и расположения множества Q на сфере. Имеется дополнительное ограничение: $t_{0k} < t_0$, которое означает, что расстояние ϕ_k от точки p_0^* (антипод p_0) до точки $p_k \in Q$ меньше $\phi_0 = 52.5588^\circ$, $\cos \phi_0 = -t_0$. (Здесь и далее показаны 4 знака после запятой.)

Так как $t_{0k} = -\cos \phi_k$, то $h(P) = f(1) + f(-\cos \phi_1) + \dots + f(-\cos \phi_m)$. Функция f монотонно убывает на интервале $(-1, t_0)$, следовательно, при уменьшении ϕ_k величина $h(P)$ увеличивается. Тогда если P – оптимальное множество, т.е. $h(P) = f_{\max}$, то ни одну из точек Q нельзя сдвинуть по направлению к p_0^* . Для оптимального P несложно доказать, что Q – выпуклый, неприводимый многогранник и p_0^* лежит внутри Q . Здесь неприводимым называется такой многогранник на S^d , что из любой его вершины выходит не менее d ребер длины 60° .

Рассмотрим проекцию множества Q на экватор из полюса p_0^* . Тогда минимальное расстояние у точек на проекции не меньше $\rho = 78.0620^\circ$. Наименьшее из расстояний расположения 7 точек на S^2 не превосходит $d_7 = 77.8695^\circ$ ($\cos d_7 = \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ$) [5]. Поскольку $\rho > d_7$, то $m < 7$.

Обозначим h_m верхнюю грань значений $h(P)$ при фиксированном m и $Q^{(m)}$ – соответствующее Q для оптимального P , тогда $f_{\max} = \max\{h_m\}$, $1 \leq m \leq 6$. Исходя из свойств оптимального Q , оценим h_m . Очевидно, что $h_1 = f(1) + f(-1) = 24.48$. $Q^{(2)}$ – дуга $p_1 p_2$ длины 60° . Наибольшее значение $h(P)$ достигается, когда p_0^* лежит в середине $p_1 p_2$, т.е. $h_2 = f(1) + 2f(\cos 150^\circ) = 24.8644$. $Q^{(3)}$ – правильный треугольник, а $Q^{(4)}$ – правильный тетраэдр со сторонами 60° . Вычисления показывают, что $h_3 = 24.8345 < h_2$, $h_4 = 24.8180 < h_2$. У $Q^{(5)}$ имеется вершина, из которой выходит 4 ребра длины 60° . Обозначим через α длину наименьшего ребра, лежащего против этой вершины, тогда $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Численный анализ показывает, что наибольшее значение $h(P) = 24.6856$ достигается при $\alpha = 60^\circ$, т.е. $h_5 < h_2$. Для $m = 6$ верхняя грань $h(P)$ достигается, когда Q – октаэдр. Вычисления показывают, что $h_6 = 22.5205 < h_2$. Таким образом, все $h_m \leq h_2$ и лемма доказана.

Автор благодарит И. А. Дынникова за рецензирование работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Конвей, Н. Слоэн. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. [2] В. И. Левенштейн // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303. [3] А. М. Odlyzko, N. J. A. Sloane // J. Combin. Theory Ser. A. 1979. V. 26. №2. P. 210–214. [4] I. J. Schoenberg // Duke Math. J. 1942. V. 9. P. 96–108. [5] K. Schütte, B. L. van der Waerden // Math. Ann. 1951. V. 123. P. 96–124.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
14.05.2003