Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Л. Сабина, О пространствах Киккавы, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:13:33

О ПРОСТРАНСТВАХ КИККАВЫ

Л. В. САБИНИНА

Киккава в статье [1] заметил, что операция

$$x \underset{p}{\cdot} y = \text{Exp}_x \circ \tau_x^p \circ \text{Exp}_p^{-1} y \quad (1)$$

определяет гладкую локальную лупу в некоторой окрестности точки p многообразия M с аффинной связностью ∇ . Здесь $\text{Exp}_p: T_p(M) \rightarrow M$ – экспоненциальное отображение, а τ_x^p – параллельный перенос из точки p в точку x вдоль геодезической дуги. В дальнейшем всегда будем предполагать, что M – многообразие класса C^∞ .

Под гладкой локальной лупой в точке p мы будем понимать некоторую окрестность U многообразия M с тремя бинарными операциями $(\cdot)$, $(\backslash)$, $(/)$, которые являются C^∞ -гладкими отображениями из $U \times U$ в M .

При этом должны выполняться следующие равенства:

$$x \backslash (x \cdot y) = x \cdot (x \backslash y) = (y \cdot x) / x = (y / x) \cdot x = y, \quad (2)$$

в том случае, если обе части каждого равенства имеют смысл. Должно выполняться также следующее условие:

$$x \cdot p = p \cdot x = x, \quad (3)$$

т.е. точка p является нейтральным элементом.

Лупы, определяемые операцией (1), называются геодезическими. Очевидно, геодезические лупы моноассоциативны (см. [2]).

В работе [1] Киккава рассмотрел геодезическую лупу в точке p многообразия M с симметрической аффинной связностью ∇ ($T = 0$, где T – тензор кручения) со свойством правой моноальтернативности

$$(x \underset{p}{\cdot} y^m) \underset{p}{\cdot} y^n = x \underset{p}{\cdot} y^{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

и показал, что в этом случае кривизна в точке p равна нулю ($R_p = 0$).

Пусть (M, ∇) – такое многообразие аффинной связности, что геодезические лупы в каждой точке обладают свойством правой моноальтернативности. Назовем такое многообразие пространством Киккавы.

ЛЕММА. Для пространств Киккавы имеет место следующая зависимость между тензором кривизны и тензором кручения:

$$R(X, Y; Z) = \frac{1}{3} \mathfrak{S}(\nabla_X T(Y, Z) + T(T(X, Y), Z)), \quad (5)$$

где $\mathfrak{S}$ – циклическая сумма по X, Y, Z .

Из этой леммы следует цитированный выше результат Киккавы, так как при $T = 0$ имеет место $R = 0$. Заметим также, что при $\nabla T = 0$ пространства Киккавы являются редуктивными ($\nabla T = 0, \nabla R = 0$), при этом имеет место следующая формула:

$$R(X, Y; Z) = \frac{1}{3} \mathfrak{S}(T(T(X, Y), Z)). \quad (6)$$

Известно, что локально редуктивное пространство определяется тройной алгеброй Ли (Ямагути [3], Киккава [4]). Легко видеть, что в случае редуктивных пространств Киккавы эта алгебра сводится к бинарной антикоммутативной алгебре с тождествами:

$$J(xy, z, u) + J(yz, x, u) + J(zx, y, u) = 0, \quad (7)$$

$$J(x, y, uv) = J(x, y, u)v - J(x, y, v)u, \quad (8)$$

$$J(u, v, J(x, y, z)) = J(J(u, v, x), y, z) + J(x, J(u, v, y), z) + J(x, y, J(u, v, z)), \quad (9)$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$.

Работа выполнена при поддержке PROMEP-SEP.

Тройная алгебра Ли в точке локально однозначно определяет геодезическую лупу редуктивного пространства аффинной связности (Сабинин [2], Киккава [4]). Такая лупа является левомоноальтернативной левой A -лупой, т.е. отображение $L_{x \cdot y}^{-1} \circ L_x \circ L_y$, где $L_x y = x \cdot y$, является автоморфизмом такой левомоноальтернативной лупы.

Анализ тождеств касательной алгебры пространства Киккавы показывает, что

$$((xy)x)y = ((xy)y)x. \quad (10)$$

Откуда следует, что соответствующая геодезическая лупа диассоциативна (Гайнов [5], Мальцев [6]). Таким образом, получаем теорему.

ТЕОРЕМА 1. *C^∞ -гладкая локальная левая A -лупа со свойством двусторонней моноальтернативности является диассоциативной.*

Отсюда, используя работы [7] и [2], получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Аналитическая локальная альтернативная левая A -лупа диассоциативна.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Kikkawa // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. 1964. V. 28. P. 199–207.
- [2] M. Kikkawa // Hiroshima Math. J. 1975. V. 5. №2. P. 141–179. [3] L. V. Sabinin. Smooth Quasigroups and Loops. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1999. [4] K. Yamaguti // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. 1957. V. 21. №2. P. 107–113. [5] А. Т. Гайнов // УМН. 1957. Т. 12. №3. С. 141–146. [6] А. И. Мальцев // Матем. сб. 1955. Т. 36 (78). №3. С. 569–576. [7] Л. В. Сабинин, П. О. Михеев // Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калининский университет, 1985. С. 72–75.

UAEM México
E-mail: liudmila@servm.fc.uaem.mx

Принято редколлегией
14.05.2003