Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Скурихин, Пучковые когомологии и размерность равномерных пространств, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:19:16

ПУЧКОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ И РАЗМЕРНОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е. Е. Скурихин

В работе [1] В. И. Кузьминов и И. А. Шведов развили теорию когомологий равномерных пространств и в качестве следствий получили ряд результатов о гомотопической классификации равномерных отображений и когомологической размерности равномерных пространств, в том числе когомологическую характеристику размерности Исбелла.

В предлагаемой работе на равномерных пространствах определяются пучки и пучковые когомологии, причем замечается, что последние изоморфны тем группам когомологий из [1], которые определяются по конечным покрытиям. Поэтому абстрактные теоремы о когомологических размерностях (теоремы 3–6), вытекающие из общих результатов автора [2], содержат результаты о размерностях Исбелла и Бредона.

Зафиксируем равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$, т.е. X – множество, $\mathcal{U}$ – класс покрытий X , называемых равномерными, удовлетворяющий трем известным аксиомам. Обозначим через OX (CX) класс всех подмножеств X , открытых (замкнутых) в топологии X , индуцированной равномерной структурой. Если $A \subset X$, то будем считать его снабженным индуцированной равномерной структурой.

ЛЕММА 1. *Для любого $U \in OX$ определим класс семейств $\rho\tau_X(U) = \rho\tau(U)$ подмножеств U следующим образом. Если $U \neq \emptyset$, то $\alpha \in \rho\tau(U) \Leftrightarrow \alpha$ – конечное открытое равномерное покрытие U . Если же $U = \emptyset$, то $\alpha \in \rho\tau(U) \Leftrightarrow \alpha$ – конечное или пустое семейство пустых подмножеств U . Совокупность $\rho\tau(U)$ ($U \in OX$) образует предтопологию на OX в смысле [3]. Порожденная ею топология Гротендика, обозначаемая $\tau_{\mathcal{U}}$ или τ , является субканонической и $\emptyset \in \tau(\emptyset)$.*

Пучком на X будем называть любой τ -пучок $\mathcal{A}$ на OX ; $\mathcal{A}$ – вялый, если $\forall V \in OX, \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(V)$ – эпиморфизм; $\mathcal{A}$ – мягкий, если $\forall A \in CX, \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}_A(X)$ – эпиморфизм.

Введем обозначения. Пусть $\mathcal{A}$ – пучок, $U \in OX$, $\varphi \subset CX$, $\varphi \neq \emptyset$ и направлено вверх, $\Gamma_{U, \varphi}(\mathcal{A}) = \{s \in \mathcal{A}(U) \mid \exists A \in \varphi : s|_{U \setminus A} = 0\}$. Тогда $\Gamma_{U, \varphi}(\mathcal{A})$ является точным слева аддитивным функтором из категории пучков в категорию абелевых групп. Группа $(R^n \Gamma_{U, \varphi})(\mathcal{A})$ обозначается через $H^n_{\varphi}(U, \mathcal{A})$. Если $\varphi = \{A\}$, $V = X \setminus A \subset U$, то $H^n_{\varphi}(U, \mathcal{A}) = H^n(U, V, \mathcal{A})$ и $H^n(U, \emptyset, \mathcal{A}) = H^n(U, \mathcal{A})$. Если G – абелева группа, $A, B \in CX$, $B \subset A$, N_{α} – нерв семейства α , то $\check{H}^n(A, B, G) = \text{colim}\{H^n(N_{\alpha \cap A}, N_{\alpha \cap B}, G) \mid \alpha \in \rho\tau(X)\}$.

Следующий результат вытекает из [4; теорема 4].

ТЕОРЕМА 2. *Если G – абелева группа, $A, B \in CX$, $B \subset A$, то $\forall n \geq 0, \check{H}^n(A, B, G) = H^n(X, (G_A)_X \setminus B)$, где G справа обозначает пучок, порожденный постоянным предпучком G .*

Две нижеследующие теоремы выводятся из [2; теорема 2.1.4, теорема 3.1.3 и теорема 3.4.2]. Заметим, впрочем, что стандартный метод доказательства ацикличности вялых пучков в данном случае не работает.

ТЕОРЕМА 3. 1) *Следующие условия на пучок $\mathcal{A}$ и число $n \geq 0$ эквивалентны:*

- (fA1) $fd_{\mathcal{A}} X \leq n$, т.е. существует вялая резольвента $\mathcal{A}$ длины n ;
- (fA2) *для любой резольвенты $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}^n \rightarrow 0$ пучка $\mathcal{A}$ длины n из того, что $\mathcal{B}^i$ – вялые ($0 \leq i \leq n-1$), следует, что $\mathcal{B}^n$ – вял;*
- (fA3) $\forall V \in OX, H^{n+1}(X, V, \mathcal{A}) = 0$;
- (fA4) $\forall V \in OX, H^k(X, V, \mathcal{A}) = 0$ при $k > n$;
- (fA5) $\forall V \in OX, H^n(X, \mathcal{A}) \rightarrow H^n(V, \mathcal{A})$ – эпиморфизм;
- (fA6) $\forall V \in OX, H^{n+1}(X, V, \mathcal{A}) \rightarrow H^{n+1}(V, \mathcal{A})$ – мономорфизм.

2) *Пусть Φ – некоторая совокупность непустых подмножеств $\varphi \subset CX$, направленных вверх, такая, что $\forall V \in OX, \{X \setminus V\} \in \Phi$. Тогда для любого пучка $\mathcal{A}$ и целого $n \geq 0$ каждое из условий (fA1)–(fA6) эквивалентно следующему условию: $\forall \varphi \in \Phi, H^n_{\varphi}(X, \mathcal{A}) = 0$ при $k \geq n+1$, а также условию $\forall \varphi \in \Phi, H^{n+1}_{\varphi}(X, \mathcal{A}) = 0$.*

В частности, при $n = 0$ получается кохомологический критерий вялости: $\mathcal{A}$ – вялый $\Leftrightarrow \forall V \in OX, H^1(X, V, \mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \forall V \in OX, \forall k \geq 1, H^k(X, V, \mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Phi, H_\varphi^n(X, \mathcal{A}) = 0$ при $k \geq 1 \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Phi, H_\varphi^1(X, \mathcal{A}) = 0$.

ТЕОРЕМА 4. 1) Следующие условия на пучок $\mathcal{A}$ и число $n \geq 0$ эквивалентны:

- (A1) $d_{\mathcal{A}} X \leq n$, т.е. существует мягкая резольвента длины n ;
- (A2) для любой резольвенты $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}^n \rightarrow 0$ пучка $\mathcal{A}$ длины n из того, что $\mathcal{B}^i$ – мягкие ($0 \leq i \leq n-1$), следует, что $\mathcal{B}^n$ – мягок;
- (A3) $\forall V \in OX, H^{n+1}(X, \mathcal{A}_V) = 0$;
- (A4) $\forall A, B \in \text{Ob}(\widehat{K}), H^k(X, (\mathcal{A}_{A'})_B) = 0$ при $k \geq n+1$;
- (A5) $\forall A, B \in \text{Ob}(\widehat{K})$ таких, что $A \subset B, H^n(X, \mathcal{A}_{A'}) \rightarrow H^n(V, \mathcal{A}_{B'})$ – эпиморфизм;
- (A5') для любого замкнутого $C \in X, H^n(X, \mathcal{A}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{A}_C)$ – эпиморфизм.

2) Всякий инъективный пучок мягок.

Если $A \in CX, \mathcal{B} = \mathcal{A}_A$, то $d_{\mathcal{B}} X$ обозначается через $d_{\mathcal{A}}^X A$.

Напомним, что размерность Исбелла $\Delta X \leq m$ (соответственно, $\delta X \leq m$) тогда и только тогда, когда в любое (соответственно, в любое конечное) $\alpha \in \mathcal{U}$ можно вписать $\beta \in \mathcal{U}$ (соответственно, конечное $\beta \in \mathcal{U}$) кратности $\leq m+1$. Если $A \subset X$, то через ΔA и δA будем обозначать размерности пространства $(A, \mathcal{U} \cap A)$. Известно, что $\delta X \leq \Delta X$, а если $\Delta X < \infty$, то $\delta X = \Delta X$.

Назовем размерностью Бредона [5], [6] $\text{dB } X$ пространства X наименьшее из чисел $m \geq 0$ таких, что для любого пучка $\mathcal{A} \forall \varphi \in \Phi, H_\varphi^k(X, \mathcal{A}) = 0$ при $k \geq m+1$, где Φ обозначает то же, что в теореме 3.

Следующий результат вытекает из теорем 2–4 и кохомологической характеристики размерности Исбелла, данной в [1].

ТЕОРЕМА 5. 1) $\forall A \in CX, \delta A = d_Z^X A$, в частности, $\delta X = d_Z X$. Здесь Z – пучок, порожденный постоянным предпучком целых чисел.

2) $\delta X \leq \text{dB } X \leq \delta X + 1$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A – пучок.

1) Пусть $\mathcal{B} \subset OX$ – большая база X , т.е. $\forall V, W \in OX$ таких, что $\{V, W\} \in \mathcal{U}$, имеется семейство $\alpha = \{V_i \in \mathcal{B} \mid i \in I, V_i \subset V\}$ такое, что $\alpha \cup W \in \mathcal{U}$. Если $d_{\mathcal{A}} X = n$, то имеется $U \in \mathcal{B}: H^n(X, \mathcal{A}_U) \neq 0$.

2) Пусть $I = \{1, 2, \dots\}$ – не более чем счетное множество, $C, C_k \in CX$ и выполняются следующие условия: $\forall \{V_k \in OX \mid k \in I\}$ из того, что $\forall k \in I \{V_k, X \setminus C_k\} \in \mathcal{U}$, следует, что $\{V_k, X \setminus C_k \mid k \in I\} \in \mathcal{U}$ (это условие всегда выполняется, если I конечно и $C = \bigcup \{C_k \mid k \in I\}$). Если для любого $k \in I \ d_{\mathcal{A}}^X C_k \leq n$, то $d_{\mathcal{A}}^X C \leq n$. В частности, если $C = X$, то $d_{\mathcal{A}} X \leq n$.

3) Пусть $H \in CX$. Если $d_{\mathcal{A}}^X C \leq n$, где $C = H$ или C замкнуто и $\{X \setminus H, X \setminus C\} \in \mathcal{U}$, то $d_{\mathcal{A}} X \leq n$.

Отметим, что в силу теорем 2 и 5 частными случаями теорем 3, 4 и 6 являются результаты о размерностях $\delta X, \Delta X$ и $\text{dB } X$ равномерного пространства X .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. №3. С. 565–595.
- [2] Е. Е. Скурихин // Труды МИАН. 2002. Т. 239. С. 289–317. [3] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de géométrie algébrique dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier. Berlin: Springer-Verlag, 1972–1973. (Lecture Notes in Math. V. 269, 270.)
- [4] Е. Е. Скурихин // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 179–180. [5] G. E. Bredon. Sheaf Theory. New York: McGraw-Hill, 1967. [6] В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. №1. С. 24–27.