Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде для гипер-эллиптических функций рода $g = 2$, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:41:11

ОБ АСИМПТОТИКЕ ДИАГОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ДЛЯ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РОДА $g = 2$

С. П. СУЕТИН

1. Недавно Д. Любинский [1] и В. И. Буслаев [2], [3] опровергли гипотезу Бейкера–Гаммеля–Уиллса (“Паде-гипотезу”) [4], [5]. Контрпример Любинского основан на классической непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана, а соответствующая функция *мероморфна* в единичном круге $U: |z| < 1$. Найденный Буслаевым контрпример особенно нагляден: функция Буслаева – гиперэллиптическая функция рода $g = 2$, *голоморфна* в U . В обоих случаях соответствующая последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}$ *не содержит* подпоследовательности, которая равномерно сходилась бы (к f) внутри U .

Для $f \in \mathcal{H}(0)$ диагональная аппроксимация Паде $f_n = p_n/q_n$, где $p_n, q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p_n, \deg q_n \leq n$, $q_n \neq 0$ и $(q_n f - p_n)(z) = O(z^{2n+1})$, $z \rightarrow 0$. В соответствии с общей теоремой Штала [6] о сходимости аппроксимаций Паде, имеем: *если $f \in \mathcal{H}(0)$ – алгебраическая функция, то последовательность $\{f_n\}$ сходится к f по емкости внутри области $G = \mathbb{C} \setminus \Sigma$, где “симметричный” компакт Σ состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, а f продолжается в G как мероморфная функция. Замечено [7], что препятствием к равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ является лишь конечное число полюсов f_n с “неопределенным” поведением. Для эллиптических функций в [8] было показано, что в общем положении такие “блуждающие” полюсы всюду плотны в $\mathbb{C}$.*

В контрпримерах Любинского и Буслаева именно наличие блуждающих полюсов играет ключевую роль: для некоторой области $\Omega \Subset U$ функция $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, но при всех $n \in \mathbb{N}$ в Ω имеется полюс f_n (см. также [9]).

Шталам [10] было показано, что для гиперэллиптических функций, риманова поверхность которых находится в общем положении, Паде-гипотеза верна. В [11] (см. также [12], [13]) был предложен новый метод, основанный на краевой задаче Римана, который позволил получить естественное обобщение результата Штала. Здесь мы применяем этот метод для анализа примера Буслаева.

2. Функция Буслаева имеет вид $f(z) = (p_3(z) + \sqrt{h_6(z)})/q_3(z)$, где $p_3(z) = -27 + 6z^2 + 3(9 + \varepsilon)z^3$, $q_3(z) = 2z(9 + 9z + (9 + \varepsilon)z^2)$, $h_6(z) = 81(3 - (3 + \varepsilon)z^3)^2 + 4z^6$, $\varepsilon = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $\varepsilon^3 = 1$. Ветвь корня выбрана так, что $f \in \mathcal{H}(0)$, при этом $f(0) = 0$. Функция f определена на гиперэллиптической римановой поверхности рода $g = 2$. Полином $q_3(z) = cz(z - a)(z - b)$, где $|a| > 1$, $|b| < 1$. Функция f голоморфна в точке $z = b$ и имеет простой полюс в точке $z = a$. “Симметричный” компакт Σ , соответствующий функции $\sqrt{h_6}$, состоит из 3 непересекающихся дуг: $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3$.

Нам удобно сделать замену переменных $\zeta = 1/z$ и перейти к функции $F(\zeta) = f(z)$, $F \in \mathcal{H}(\infty)$. Компакт Σ перейдет в компакт $S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$. Будем считать, что риманова поверхность $\mathfrak{R}: w^2 = h_6(1/\zeta)$ реализована как двулистное накрытие над $\mathbb{C}$, разветвленное в концах дуг S_j . Первый (открытый) лист $D^{(1)}$ будем отождествлять с “физической” областью $D = \mathbb{C} \setminus S$. Переход на второй лист $D^{(2)}$ осуществляется по “верхнему” и нижнему “берегам” ориентированных кривых S_j , которым соответствуют на $\mathfrak{R}$ замкнутые циклы Γ_j . Функция F голоморфна при $|\zeta| > 1$, мероморфна на $\mathfrak{R}$ и имеет простые полюсы в точках $\zeta = \alpha^{(1)}, \beta^{(2)}, \infty^{(2)}$, где $\zeta = \zeta^{(1)}$ или $\zeta^{(2)}$, $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/b$. Диагональные аппроксимации Паде инвариантны относительно сделанной замены: $F_n(\zeta) = f_n(z)$, $F_n(\zeta) = P_n(\zeta)/Q_n(\zeta)$, где P_n и Q_n – полиномы степени $\leq n$ и $R_n(\zeta) := (Q_n F - P_n)(\zeta) = O(1/\zeta^{n+1})$, $\zeta \rightarrow \infty$. Функция остатка R_n мероморфна на $\mathfrak{R}$ и имеет дивизор $(R_n) = (n+1)\infty^{(1)} + \zeta_1(n) + \zeta_2(n) - (n+1)\infty^{(2)} - \alpha^{(1)} - \beta^{(2)}$, где $\zeta_j(n)$ – свободные нули R_n (точки, в которых F_n интерполирует F). Результат Буслаева допускает

следующую интерпретацию: $\mathbb{N} = \Lambda_0 \sqcup \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$ так, что: $\zeta_1 = \alpha^{(1)}$, $\zeta_2 = \beta^{(2)}$ при $n \in \Lambda_0$; $\zeta_1 = \varepsilon\alpha^{(1)}$, $\zeta_2 = \varepsilon\beta^{(2)}$ при $n \in \Lambda_1$; $\zeta_1 = \varepsilon^2\alpha^{(1)}$, $\zeta_2 = \varepsilon^2\beta^{(2)}$ при $n \in \Lambda_2$. Таким образом, $F_n(\zeta_1) = F(\zeta_1)$, но $F_n(\zeta_2) = F(\zeta_2^{(2)})$, т.е. в точках $\zeta_2(n) \in D$ аппроксимации Паде интерполируют *другую ветвь* функции F .

3. Пусть $d\Omega_1, d\Omega_2$ – нормированный относительно кривых Γ_1, Γ_2 базис голоморфных абелевых дифференциалов на $\mathfrak{R}$. Из теоремы Абеля вытекает, что точки ζ_1, ζ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\Omega_k(\zeta_1) + \Omega_k(\zeta_2) \equiv \Omega_k(\alpha^{(1)}) + \Omega_k(\beta^{(2)}) + 2\Omega_k(\infty^{(2)}) + 2n\Omega_k(\infty^{(2)}), \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где равенство “ $\equiv$ ” понимается по модулю периодов дифференциалов $d\Omega_k$, а многозначные функции $\Omega_k(\zeta)$ нормированы условием $\Omega_k(\infty^{(1)}) \equiv -\Omega_k(\infty^{(2)})$. Так как $\alpha \neq \beta$, то дивизор $d(n) = \zeta_1(n) + \zeta_2(n)$ неспециальный при каждом $n \in \mathbb{N}$ и (1) имеет единственное решение. Система (1) при заданной правой части представляет собой проблему обращения Якоби. Рассмотрим проблему обращения Якоби

$$\Omega_k(\tilde{\zeta}_1) + \Omega_k(\tilde{\zeta}_2) \equiv \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_k^+(\zeta) + 2n\Omega_k(\infty^{(2)}), \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где $\rho \neq 0$. Можно подобрать функцию ρ так, чтобы

$$\frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_k^+(\zeta) \equiv \Omega_k(\alpha^{(1)}) + \Omega_k(\beta^{(2)}) + 2\Omega_k(\infty^{(2)}), \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

(задав, например, ρ равной постоянной на каждой дуге S_j). Тогда правые части (1) и (2) совпадают при всех $n \in \mathbb{N}$. Дивизор $d(n)$ неспециален, поэтому $\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1$, $\tilde{\zeta}_2 = \zeta_2$ при всех n . Так как $\{\zeta_1(n), \zeta_2(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in D$, то при каждом $n \in \mathbb{N}$ существует кусочно-мероморфная на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, функция $\Psi_n(\zeta)$ такая, что дивизор $(\Psi_n) = \zeta_1 + \zeta_2 + (n-2)\infty^{(2)} - n\infty^{(1)}$ и выполняется краевое условие $\rho(\zeta)\Psi_n^+(\zeta) = \Psi_n^-(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$ (здесь предполагается, что ρ голоморфна на S) [11]–[13]. При этом для функции $\hat{\rho}(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(t)}{w^+(t)} \frac{dt}{t - \zeta}$ знаменатели $Q_n(\zeta; \hat{\rho})$ ее диагональных аппроксимаций Паде при подходящей нормировке имеют следующую асимптотику: $Q_n(\zeta; \hat{\rho}) = \Psi_n(\zeta^{(1)})(1 + o(1))$, $n \rightarrow \infty$. Тем самым, асимптотическое поведение блуждающих полюсов диагональных аппроксимаций Паде *голоморфной* в $D = \mathbb{C} \setminus S$ функции $\hat{\rho}$ и *мероморфной* в D функции Буслаева совпадают. Следовательно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любая голоморфная в D функция $\hat{\rho}$, для которой $\rho \neq 0$ голоморфна на S и удовлетворяет условиям (3), является контрпримером к Паде-гипотезе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Lubinsky // Ann. of Math. 2003. V. 157. № 4. P. 847–889. [2] V. I. Buslaev // East J. Approx. 2001. V. 7. № 4. P. 515–517. [3] В. И. Буслаев // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 6. С. 25–38. [4] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. [5] H. Stahl // Constr. Approx. 1997. V. 13. № 2. P. 287–292. [6] H. Stahl // Constr. Approx. 1986. V. 2. № 3. P. 225–240; 241–251. [7] J. Nuttall // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. № 4. P. 299–386. [8] S. Dumas. Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues. Thesis. Zürich, 1908. [9] G. A. Baker // Elsevier preprint (to appear). [10] H. Stahl // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1996. Spec. Iss. P. 121–193. [11] С. П. Суетин // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 81–114. [12] С. П. Суетин // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 45–142. [13] С. П. Суетин // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 81–114.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru

Принято редколлегией
14.07.2003