Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Тумаркин, Гиперболические n -мерные многогранники Кокстера с $n + 3$ гипергранями, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:18:49

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ n -МЕРНЫЕ МНОГОГРАННИКИ КОКСТЕРА С $n + 3$ ГИПЕРГРАНЯМИ

П. В. ТУМАРКИН

1. Выпуклый многогранник называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π . Группа, порожденная отражениями относительно гиперграней произвольного многогранника Кокстера, дискретна, причем фундаментальной областью такой группы является сам многогранник. Многогранники Кокстера удобно описывать схемами Кокстера [1].

Наибольший интерес представляют гиперболические многогранники Кокстера конечного объема. В отличие от сферического и параболического случаев, полной классификации таких многогранников нет. Известно, что размерность ограниченного многогранника Кокстера не превышает 29 [2], а неограниченного – 995 [3]. Полностью охарактеризованы многогранники Кокстера в $\mathbb{H}^3$ [4], [5]; перечислены также все гиперболические симплексы [6], [7] и многогранники с $n + 2$ гипергранями [8]–[10].

В [9] доказано, что размерность ограниченного n -мерного гиперболического многогранника Кокстера с $n + 3$ гипергранями не превышает 8. Известен пример неограниченного многогранника в $\mathbb{H}^{15}$ с 18 гипергранями (см. [1]). Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *В гиперболическом пространстве размерности $n \geq 17$ не существует многогранников Кокстера конечного объема с $n + 3$ гранями. В $\mathbb{H}^{16}$ существует ровно один такой многогранник; он имеет следующую схему Кокстера:*

2. Каждому комбинаторному типу n -мерного многогранника с $n + 3$ гипергранями соответствует стандартная двумерная *диаграмма Гейла* (см., например, [11]). Стандартная диаграмма Гейла n -мерного многогранника с $n + 3$ гранями, не являющегося пирамидой, представляет собой правильный $2k$ -угольник со взвешенными вершинами с центром в начале координат. Веса удовлетворяют следующим условиям:

- 1) веса являются целыми неотрицательными числами, и их сумма равна $n + 3$, причем веса никаких двух соседних (а также противоположных) вершин не равны нулю одновременно;
- 2) для любой прямой, проходящей через начало координат, сумма весов вершин, лежащих в каждой открытой полуплоскости, ограниченной этой прямой, не меньше двух.

Комбинаторный тип многогранника P можно восстановить по диаграмме Гейла следующим образом. Вершине многоугольника a_i с весом μ_i соответствует μ_i гиперграней P $f_{i,1}, \dots, f_{i,\mu_i}$. Для любого подмножества I множества гиперграней многогранника P пересечение набора гиперграней $\{f_{j,\gamma} \mid (j, \gamma) \in I\}$ является гранью P тогда и только тогда, когда начало координат лежит в выпуклой оболочке множества $\hat{I} = \{a_j \mid (j, \gamma) \notin I\}$. Начало координат лежит в относительной внутренней выпуклой оболочке множества $\hat{I}$ тогда и только тогда, когда I – максимальный (по включению) набор гиперграней, дающий в пересечении данную грань.

Ланнеровской (квази-ланнеровской) схемой называется связная схема Кокстера, которая не является ни эллиптической, ни параболической, но любая ее собственная подсхема – эллиптическая (эллиптическая или параболическая).

Если G – диаграмма Гейла многогранника P , то через $S_{m,l}$ мы будем обозначать подсхему схемы Кокстера $S(P)$, соответствующую последовательным $l - m + 1 \pmod{2k}$ вершинам $a_m, \dots, a_l$ диаграммы G .

Следующие две леммы выводятся непосредственно из определения диаграммы Гейла и теорем 3.1 и 3.2 работы [1].

ЛЕММА 1. Пусть G – диаграмма Гейла многогранника P . Пусть веса точек a_i, a_{k+i} отличны от нуля. Тогда

- 1) веса точек a_i и a_{k+i} равны 1, а схемы Кокстера $S_{i+1, k+i-1}$ и $S_{k+i+1, i-1}$ являются связными параболическими;
- 2) если веса точек a_{i+1} и a_{k+i+1} не равны нулю, то схема $S_{i+1, k+i}$ является квази-ланнеровской;
- 3) если вес точки a_{i+1} равен нулю, то схема Кокстера $S_{i+2, k+i}$ является квази-ланнеровской.

ЛЕММА 2. Пусть G – диаграмма Гейла многогранника P . Пусть веса точек a_i и a_{k+i-1} равны нулю. Тогда схема Кокстера $S_{i+1, k+i-2}$ является ланнеровской.

Поскольку число вершин в ланнеровской диаграмме не превосходит 5 [6], а в квази-ланнеровской – 10 [7], из леммы 2 и утверждений 2) и 3) леммы 1 следует

ЛЕММА 3. Пусть G – диаграмма Гейла многогранника P и веса точек a_i и a_{i+2} равны нулю. Тогда сумма весов всех вершин не превышает 20.

Небольшая проверка оставшихся случаев показывает, что размерность многогранника не может превышать 17. Поэтому число вершин (с кратностями) с ненулевыми весами в диаграмме Гейла не превосходит 20. С другой стороны, при достаточно большом k и достаточно большом количестве вершин с нулевыми весами соответствующая схема Кокстера содержит не менее двух ланнеровских подсхем. В последнем случае $n \leq 15$. Отсюда следует ограничение на k : если $n \geq 16$, то $k \leq 13$. Перебор оставшихся случаев показывает, что при $n = 17$ исследуемых многогранников нет, а при $n = 16$ такой многогранник ровно один.

Осталось разобрать случай, когда P является пирамидой. Используя тот факт, что двукратная пирамида в пространстве Лобачевского не может быть многогранником Кокстера [10], несложно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 4. Если n -мерный гиперболический многогранник Кокстера конечного объема с $n + 3$ гранями является пирамидой, то это пирамида над произведением трех симплексов.

Все такие многогранники несложно перечислить, их размерность не превышает 11.

Автор благодарит Э. Б. Винберга за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Б. Винберг // УМН. 1985. Т. 40. № 1. С. 29–66. [2] Э. Б. Винберг // Труды ММО. 1984. Т. 47. С. 68–102. [3] М. Н. Прохоров // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 2. С. 413–424. [4] Е. М. Андреев // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 3. С. 445–478. [5] Е. М. Андреев // Матем. сб. 1970. Т. 83. № 2. С. 256–260. [6] F. Lannér // Comm. Sem. Math. Univ. Lund. 1950. V. 11. P. 1–71. [7] Э. Б. Винберг // Матем. сб. 1967. Т. 72. № 3. С. 471–488; Т. 73. № 2. С. 303. [8] И. М. Каплинская // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 1. С. 159–164. [9] F. Esselmann. Über kompakte hyperbolische Coxeter-Polytope mit wenigen Facetten // Preprint No. 94-087. Bielefeld: Universität Bielefeld, SFB 343. [10] P. Tumarkin. Hyperbolic Coxeter n -polytopes with $n + 2$ facets // math.MG/0301133. [11] B. Grünbaum. Convex Polytopes. London: Wiley, 1967.